振荡器理论的重构

于红兵 著

ZHENDANGQI
LILUN DE CHONGGOU

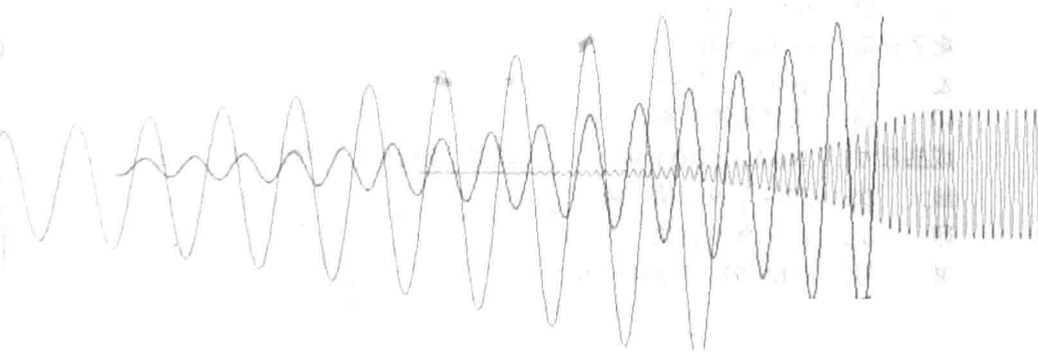
电子科技大学出版社

基金项目：四川省科技厅（201
论体系的重构及新型

ZHENDANGQI
LILUN DE CHONGGOU

振荡器理论的重构

于红兵 著



电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

振荡器理论的重构 / 于红兵著. —成都：电子科技大学出版社，2014. 9

ISBN 978-7-5647-2615-7

Ⅰ. ①振… Ⅱ. ①于… Ⅲ. ①振荡器－理论研究 Ⅳ. ①TN752

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 207421 号

振荡器理论的重构

于红兵　著

出　　版：	电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：	万晓桐
责任编辑：	万晓桐
主　　页：	www.uestcp.com.cn
电子邮箱：	uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：	新华书店经销
印　　刷：	成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸：	140mm×203 mm　　印张　3.625　　字数　100 千字
版　　次：	2014 年 9 月第一版
印　　次：	2014 年 9 月第一次印刷
书　　号：	ISBN 978-7-5647-2615-7
定　　价：	18.00 元

序　言

振荡器是一种巧妙的电路，它可以无中生有地产生交流信号。或者说，振荡器是一类电路的统称，这类电路具有静态（直流）不稳定性，因而在有直流源供电的情况下，它将自发地过渡到某种动态平衡状态。与此相伴地，电路中所有电压电流变量经历一个瞬态过程，最后达到稳定的周期变化状态，从而获得可用的周期信号。

对于正弦波振荡器，其瞬态与稳态所涉及的物理机制不太一样。具体来说，瞬态过程经历的是增幅振荡，达到稳态后得到的是等幅振荡；瞬态过程中在信号很小的期间内电路是线性的，达到稳态后电路是非线性的。

长久以来，笔者希望关于正弦波振荡器的书应该是这样的，它能系统完整地论述电路为什么会从无到有地开始正弦波起振，最终又凭什么达到平衡振荡；它应该是自给自足的，从某些毋庸置疑的逻辑出发点开始，一切结论都应是严谨数理逻辑的顺理成章的果实，不能因为所谓的“工程计算的方便”而无厘头地随意对电路做手脚；即使要做近似处理，也要给出充分的理由，不应该有因为不恰当地引入近似方法而引发的逻辑跳跃或断裂；对电路的分析，所导出的定量结论应该具有实验上的可验证性，应该直接表达关于可测量的物理量之间的定量关系。除非万不得已，最好不要让某个不易测量的所谓的等效量出现在结论表达式中。

只要有一本这样的书，无论是国内的还是国外的，哪怕只有

一本，本书就没有存在的必要了。很遗憾，从我十几年前开始在成都信息工程学院讲授振荡器电路到现在，还没有见到这样的书。所有的专著或教材，都以一种大同小异的手法讨论正弦波振荡器，它们都是被同一种思路塑造的，大致使用着同一套语言体系，错起来也如此相似。虽然某些作者也许感觉到了这种语言或思路的若干牵强之处，而回避了其中的一些概念、结论或分析过程，但这也只是回避而不是贡献。跳出传统手法之外来讨论振荡器的一些工作，可能在另一些主旨并不在振荡器的书中被顺手牵羊地引出，或在某篇针对特定的振荡器的分析文章中被尝试着。这些小打小闹的认识改进，且不论正确与否，单就其处理方法来说，或者过于复杂，或者不具有普遍的有效性，而且无法在一定程度上批判性地“兼容”传统的分析方法，因此不能作为一个有效的体系打破传统理论的垄断。

从实用设计的角度看，振荡器是一种巧妙的电路，但从学理上看，就不那么美妙了。在很长一段时间内，我无法以一种低于相似学科一般逻辑水平的方式来接受正弦波振荡器，事实上，在最基础的环节上就让人想不通。根据传统理论，对于具有反馈型结构的电路而言，起振条件为：$T(\mathrm{j}\omega)>1$（式中 $T(\mathrm{j}\omega)$ 是环路增益）。之所以有这个结论，据说是因为当反馈量 $x_i(t)\cdot T(\mathrm{j}\omega)$ 大于电路变量的原值 $x_i(t)$ 时，信号就会不断加强，振幅就会不断增长，接通电源后振荡会由小到大地建立起来，起振就得以实现。

但是，这种貌似合理的简单推理在逻辑上存在着两处致命的硬伤：

1．当环路增益被写为 $T(\mathrm{j}\omega)$ 时，显然是在用相量法讨论，但

相量法的使用前提却不可不察——在电路中的信号以等幅正弦振荡的形式存在时相量法才适用。然而，在电路起振时，电路中的信号具有增幅振荡的形式。在起振分析中如何正确地引入相量形式的分析方法，这本身就是一个有待解决的问题。不能一上来就不分青红皂白地进入相量法的窠臼。传统振荡器理论面对振荡器，一上来就不假思索地抡起相量法这件似乎相当顺手的“利器”一路拼杀到底，以科学的审慎态度来看这种做法是相当地失态的，简直就是愣头青嘛！谁批准你了，你就到处祭出自家的“法宝”？按说，相量法也算得上是电路分析的“利器”了，不过先别忘了，它原本是为处理放大电路中的等幅正弦信号而准备的工具，现在要转移战场，用来处理振荡器中处于增幅振荡状态的内部信号，难道使用前不经过严格的逻辑论证就可以自我授权吗？

2．即使采取相量分析方法，这种简单推理也是不合规范的。众所周知，进行相量分析时，电路中所有电路变量都是相量，都具有 $e^{j\omega t}$ 的变化形式，或者说，所有电路变量都隐含着具有 $e^{j\omega t}$ 这一变化因子（只不过通常不用写出而已）。这也就意味着，任意两个电路变量的相量值的比较，隐含地肯定是这两个电路变量在同一时间的比较。具体到反馈量与电路变量的原值，这两者本来就出现在同一个位置，是从不同角度谈论同一个物理量，现在再考虑到两者又是同一时间的量，那么它们就完完全全指的是同一个对象，而不能其中一个大于另一个。

将 $T(j\omega)>1$ 作为起振条件，其理由竟然这样地粗糙不通，而其流传却又如此广泛，竟然被几代电子学人奉为圭臬，让我深深地感觉骇异，又时刻引以为戒。人们习惯于说细微处见精神，在众多书籍大同小异的分析中，逻辑细节上却总是不断暴露出这种

臆想的或是唯象的论述，于细微处我见到的是逻辑的溃败。由此导致传统振荡器分析方法没有达到相似学科的一般逻辑水平，没有从臆想的或是唯象的论述走到严密求证的一步。基本概念上的先天不足让许多华丽繁复的运算终为幻象。所谓差之毫厘，谬以千里，是为一例。

很遗憾也很幸运，现实的不幸就是本书的机会。

在笔者看来，我们必须摆脱放大电路的思维模式，以一种全新的角度来看待正弦波振荡器，换句话说，就是把它当作完全不同于放大器的电路来尊重它，而不是所谓的正反馈放大器的特例。人人都知道，振荡器不需要输入信号，但传统振荡器理论总是习惯于把它看成由放大器蜕变而来，从而偏离了它的本质。你只要抛去所有杂念，就能抓住振荡器的本质。什么本质？就是不需要输入信号，没有输入信号，就是零激励嘛？就这么简单，就够了，这就是逻辑大厦的基础。当然，还有一点也要说明一下：电路起振基本上是从零开始的，虽然最后电路要进入非线性区得到稳定振荡，但至少在刚刚起振时我们可以完全相信它工作在线性区。也就是说，在考虑电路能否起振的问题时，你可以肯定地说它是线性电路。所以说，当你考虑电路能否起振时，是不是应当把这个问题视为线性电路的零激励问题呢？进一步说，对零激励的线性电路中的一系列电路变量，是不是原则上可以列出齐次的（因为无激励）线性（因为是线性电路）微分方程组求解？齐次的线性微分方程组的解是不是很规范地具有确定不移的形式？

一切就将这样顺理成章地自然流淌出来，不需要逻辑的跳跃，更不会有逻辑的断裂。本书后续各章节将平顺地引领读者解决一个个相关问题。书中有些片断曾经以作者论文的形式发表过，但

本书作为专著，将更加细密完整地编织起正弦波振荡器理论新体系的方方面面，更多地展示新体系中分析方法的多样性和结论的一致性，更多地包含对于传统理论下疑难电路的有效解决。尤其值得一提的是，相量法以一种新的形式在振荡器理论的新体系中获得了新生，它现在可以以一种融洽的方式嵌入振荡器理论中，为振荡器的分析提供了多样化的解决方案，使振荡器理论的新体系成为一个兼容并包的深刻体系。逻辑的严谨性要求并没有妨碍相量法应用手法的丰富多样，也没有妨碍通过相量法引入更多近似分析方法或定性分析方法，恰恰相反，它使所有的实用手法有了牢固的存在理由，有了简明的操作方式，有了确切的适用范围，使这些实用手法真正成为有效的分析利器。

本书对具体电路的定量分析结论将尽量体现为关于可测的物理量之间的定量关系，从而易于进行实验验证，而这些实验全部经实际电路实验或仿真实验验证过。所验证的，不仅是某种现象的有无，还有获得这种现象所需要的准确数量条件。书后所列文献，都是笔者已发表的论文。至于传统振荡器理论，读者可以在任何一本教材中找到，故没有必要特意列出。

（以下章节中，振荡器一词都指的是正弦波振荡器。除非特别说明，所讨论的电路都是交流通路。）

目　录

第一章　电路起振问题的复频域分析

1.1　普适的电路起振判据

振荡器是这样一种电路，在有直流源供电的情况下，它无需交流输入，就能自发地产生交流信号。具体来说，一个电路要成为振荡器，它要先经历一个增幅振荡的瞬态过程（**起振过程**），最后要能够达到等幅振荡的稳态（**平衡态**）。

下面考虑电路能否起振的问题。在没有外来激励的情况下，起振时振荡器电路能够将微小的噪声、干扰或电路接通时的电流冲击转化为增幅振荡，信号（即电压或电流的交流分量，也叫电路变量）从无到有，由小到大。刚刚开始起振时，信号从极微弱的量值开始变化，将经历一个小信号过程，这时的电路当然算得上是线性电路。虽然随着电路中信号的增大，电路后来会进入非线性区工作，但能否检测到起振信号与这些后续情况无关，在判断能否起振的问题（即能否检测到起振信号的问题）上采取线性分析是恰当的。开始起振的小信号过程实际上是一个线性电路的零激励问题。再考虑到小信号下元件参数还来不及改变，因此对于开始起振的小信号过程而言，所要处理的对象可以最终归结为**定常参数线性电路的零激励问题**。

需要强调的是，由于考虑的定常参数线性电路中并无独立信号源，因此线性的元件约束的形式，除了有形如电阻伏安关系 $v=R\cdot i$ 这样的描述变量当前值之间的齐次线性关系外，也有形如电感伏安关系 $v=L\cdot\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$（或电容伏安关系 $i=C\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$）这样的描述一个变量的当前值与另一个变量的导数之间的齐次线性关系。实际上这些齐次线性关系就是齐次线性方程或齐次微分方程。按照电路分析的标准方法，从数学上解析一个线性电路，除了需要列出所有的元件约束外，还需要列出所有的几何约束，也就是所有的KVL和KCL，显然这些几何约束都是齐次线性方程。

于是，全部的元件约束和全部的几何约束都是齐次线性方程或齐次微分方程，它们一起构成了**描述定常参数线性电路零激励问题的完备的定常系数线性齐次微分方程组**。

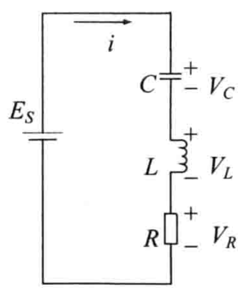


图 1.1.1　RLC 串联电路

图1.1.1是一个由无源（指独立信号源）器件构成的零激励定常参数线性电路（RLC串联电路，不是交流通路）。它在数学上可以归结为一组四元的完备定常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases} i - C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = 0 \\ v_L - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \\ v_R - Ri = 0 \\ v_C + v_L + v_R = 0 \end{cases}$$

其中$\begin{cases} v_C = V_C - E_S \\ v_L = V_L \\ v_R = V_R \end{cases}$都是元件电压的交流分量。通过简单的消元过程，对这一组四元的完备定常系数线性齐次微分方程组解的探讨又可转化为对于一个一元二阶常系数线性齐次微分方程$LC\dfrac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C = 0$解的探讨。

在数学上，完备的定常系数线性齐次微分方程组的解有着确定无疑的规范形式，即e^{st}（其中$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$为**固有复频率**，或此电路的**特征根**）或$t^n\mathrm{e}^{st}$（其中n为正整数）。也可以说，零激励的定常参数线性电路中能够存在的信号不会有任何出人意料的变化形式，信号模式有着确定的规范性，这种信号模式只能为e^{st}或$t^n\mathrm{e}^{st}$（其中n为正整数）。

▲ 附加说明：

初学者或一些受传统振荡器理论影响过深却没有进行深入思考的人，容易在两种错误想法之间摇摆。要么不假思索地使用相量法进行分析，而没有考虑到应用相量法时隐含着信号是等幅振荡信号这样一个前提，只有当信号的变化具有$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$的形式才能使用相量法。如果你告诉他不假思索地应用相量法是错的，他也许会

跳到另一个极端，把问题想得复杂而难解甚至无解。比如说由于电路中引入了反馈就没法清楚地解析啦，比如说振荡器是非线性电路要列非线性方程才能严格分析啦，如此等等。

西哲弗朗西斯·培根说过：知因果而知者，始得真知。我们不能因为自己用得顺手就不自觉地赋予客观事物某种它本并不具备的特性；我们也不应该在客观事物面前手足无措，封杀解决问题之道。

如上所述，电路起振时就是一个零激励的定常参数线性电路，对应的数学表达就是完备的定常系数线性齐次微分方程组，而完备的定常系数线性齐次微分方程组的解有着毋庸置疑的规范化的简单形式。清晰的逻辑因果与简单的结论，是为真知。

既然 s 是电路的特征根，那么根据电路中的约束关系得到的含有特征根 s 的方程都可以称为**特征方程**。读者在后面可以看到，藉由不同的思路可以写出特征方程的不同表达式，不过这些不同的特征方程可以通过恒等变换相互推导，它们在本质上是一样的，所解出的特征根也是一样的。

根据特征方程，原则上可以解出一系列特征根。只要存在某个特征根 s，满足 $\begin{cases}\mathrm{Re}(s)>0\\ \mathrm{Im}(s)\neq 0\end{cases}$，则电路中存在 $\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(s)t+\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(s)t}$ 模式的增幅振荡，电路能起振。如果特征根中有一组重根满足 $\begin{cases}\mathrm{Re}(s)=0\\ \mathrm{Im}(s)\neq 0\end{cases}$，则电路中容得下 $\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(s)t}$ 模式以及 $t^n\mathrm{e}^{st}=t^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(s)t}$ 模式的信号，虽然 $t^n\mathrm{e}^{st}=t^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(s)t}$ 模式的信号也是增长型的信号，但它在实际电路中并不能稳定增长。因为特征根 s 与电路中的元件参数有关，元件参

数不可避免的微小扰动将导致特征根的微小变化，使 $\mathrm{Re}(s)<0$，从而使 $t^n\mathrm{e}^{st}$ 不能稳定地增长。对于其他情况而言，电路中都不能存在增幅振荡信号。因此，我们的结论是，为使电路中存在稳定可靠的增幅振荡，必须有一个特征根 s，满足 $\begin{cases}\mathrm{Re}(s)>0\\ \mathrm{Im}(s)\neq 0\end{cases}$。也就是说：

定理1：

电路起振的充分必要条件是，存在一个特征根 s，满足 $\begin{cases}\mathrm{Re}(s)>0\\ \mathrm{Im}(s)\neq 0\end{cases}$。

这一结论可以作为普适的电路起振判据。

换句话说，电路起振的充分必要条件是电路的特征根中至少有一个是实部为正的复根。

得到这一结论前，并没有对电路结构做出任何限制。**这是一个普适的结论，既适用于具有反馈结构的电路，也适用于含负阻器件的电路。**

现在，问题在于如何找出特征根 s。特征根 s 当然由特征方程解出，那么特征方程又从何而来呢？

按照微分方程理论的一般分析方法，虽然在有重根的情况下 e^{st} 与 $t^n\mathrm{e}^{st}$ 都是通解，但在求解微分方程的相关讨论中，只需用通解 e^{st} 代入完备定常系数线性齐次微分方程组中即可，无需考虑将通解 $t^n\mathrm{e}^{st}$ 的代入会有新的不同。**以后在讨论特征方程和特征根时，只需考虑 e^{st} 模式的信号。**

原则上，如果不厌其烦地列出用来描述电路的完备的微分方程组（或由此导出的一元高阶微分方程），将电路中可以存在的信

号模式 e^{st} 代入，就可以得到特征方程。例如图1.1.1的RLC串联电路对应的特征方程为 $LCs^2+RCs+1=0$。但在多数情况下，写出电路的微分方程组（或微分方程）是件吃力不讨好的事，一个自然的想法是避免出现微分运算，直接写出电路变量之间的代数关系（即代数方程）。如前所述，所有电路方程不外乎几何约束与元件约束两种。其中，几何约束本身就是代数方程，只有元件约束可能具有微分运算。考虑到现在电路中的信号模式为 e^{st}，即所有交流电压电流都含有 e^{st} 形式的变化因子，或者说，它们都具有 $x(t)=x\cdot e^{st}$ 的形式，唯一的区别只是各自的系数 x（x 为复数）不同。所以，**所有这些电路变量之间都成正比关系，且相互间保持固定的比例系数（一般为复数）**。具体到电感元件，电压 $v(t)=v\cdot e^{st}$，电流 $i(t)=i\cdot e^{st}$（其中 v 和 i 都是复数形式的常数），则微分形式的元件约束 $v(t)=L\cdot\dfrac{di(t)}{dt}$ 就可以写为代数形式：$v(t)=sL\cdot i(t)$ 或 $v=sL\cdot i$。同理，对于电容而言，其元件约束也可写为代数形式：$v(t)=\dfrac{1}{sC}\cdot i(t)$ 或 $v=\dfrac{1}{sC}\cdot i$。对于电阻，仍有 $v(t)=R\cdot i(t)$ 或 $v=R\cdot i$。也就是说，在现有的信号模式下，无源器件的伏安关系都是正比关系，其比例系数 sL、$\dfrac{1}{sC}$、R 可以称作**复频域阻抗**。而有源（指受控源）器件的伏安关系本来就是代数意义上的齐次线性关系（不涉及微分运算）。现在，由于有了复频域阻抗的概念，我们就可以说，所有元件的伏安关系（或者说元件约束）都是代数意义上的齐次线性关系，而所有的几何约束本来就是齐次线性方程。因此，我们可以避开微分方程组而直接写出电路中交流电压电流之间的

代数方程组。

原则上，电路的完备的常系数线性齐次微分方程组是存在的，由此可以得到一组完备的常系数线性齐次代数方程组（因为**微分运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 作用于 e^{st} 形式的信号相当于乘以 s**），因此**完备的常系数线性齐次代数方程组是存在的**。

对于图1.1.1的RLC串联电路，这组完备的常系数线性齐次代数方程组为$\begin{cases} i - sCv_C = 0 \\ v_L - sLi = 0 \\ v_R - Ri = 0 \\ v_C + v_L + v_R = 0 \end{cases}$。

由于需要关注的是非平凡解，所以要求系数行列式为零，“系数行列式为零”这一等式也成为了关于 s 的特征方程。另一方面，线性齐次代数方程组中的 s 只能出现在分子中（因为微分运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 作用于 e^{st} 形式的信号相当于乘以 s），通过“系数行列式为零”得到的关于 s 的特征方程必然是一元n次方程（实系数）。一般而言，**无论特征方程以何种方式获得，它都能够通过恒等变换转化为实系数一元n次方程。**

以图1.1.1所示的RLC串联电路为例，考虑交流电压之间的关系 $v_C + v_L + v_R = 0$，其中每一个电压都与电流成正比，因而有 $\frac{1}{Cs} \cdot i + Ls \cdot i + R \cdot i = 0$。由于讨论的是非平凡解，因而 $i \neq 0$，得到 $\frac{1}{Cs} + Ls + R = 0$，即 $LCs^2 + RCs + 1 = 0$，它就是特征方程。这是避