



测绘地理信息职业教育教学指导委员会“十二五”推荐教材

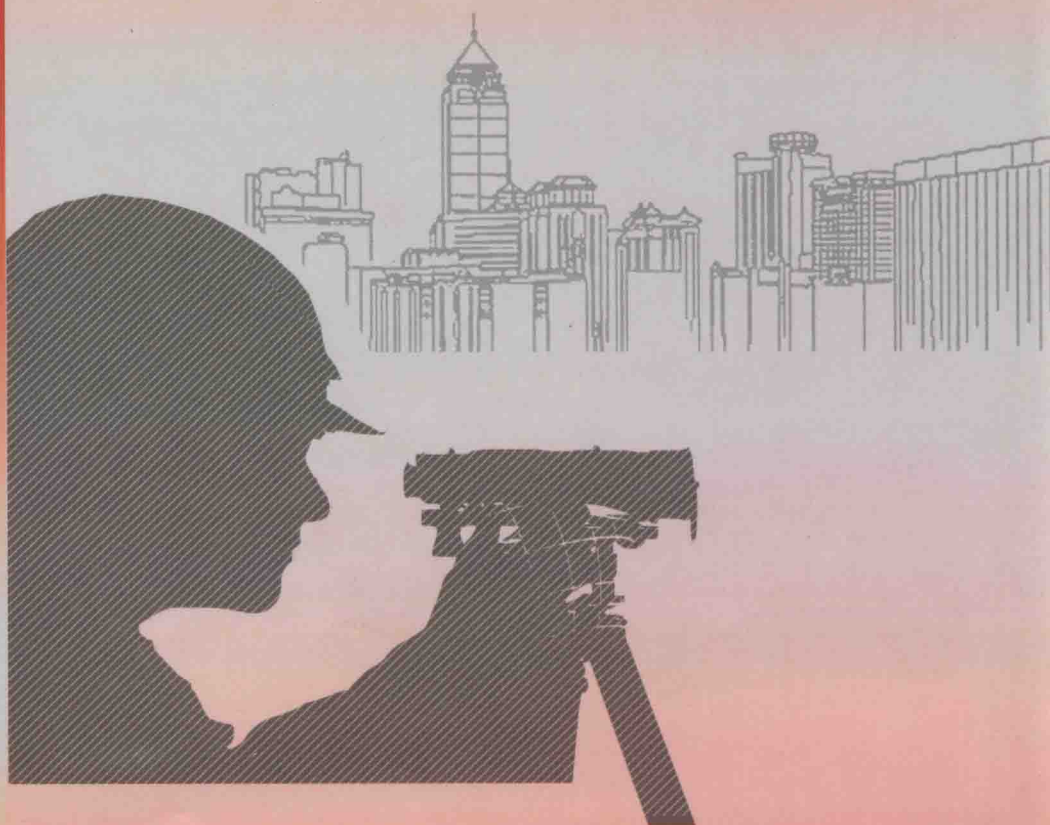
测量平差基础

CELIANG PINGCHA JICHU

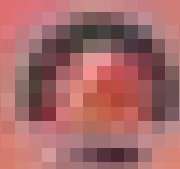


主 编 李 泽

主 审 赵国忱 卜丽静



武汉理工大学出版社



教育部審定 高中地理科教學參考用書

測量平差基礎

СРЕДНЕЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

主編 李 強
主編 謝國興 謝國興



中國人民教育出版社

测绘地理信息职业教育教学指导委员会“十二五”推荐教材

测量平差基础

主 编 李 泽

副主编 李 飞 张慧慧

主 审 赵国忱 卜丽静

武汉理工大学出版社

· 武 汉 ·

内 容 提 要

本书是根据高职高专测绘类专业教材编写委员会制定的编写规划,针对高职高专的特点,突出应用能力培养的特色而编写的。全书共分五章,内容主要包括:测量误差理论、测量平差方法、测量平差应用、误差椭圆、测量平差计算方法介绍。

本书可作为高职高专测绘类专业的测量平差课程教学用书,也可供有关专业的工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差基础/李泽主编. —武汉:武汉理工大学出版社,2013. 7
ISBN 978-7-5629-3740-1

I. ① 测… II. ① 李… III. ① 测量平差 IV. ① P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 142361 号

项目负责人:汪浪涛

责任编辑:彭佳佳

责任校对:余士龙

装帧设计:牛 力

出版发行:武汉理工大学出版社

地 址:武汉市洪山区珞狮路 122 号

邮 编:430070

网 址:<http://www.techbook.com.cn>

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:武汉理工大印刷厂

开 本:787×1092 1/16

印 张:7.75

字 数:200 千字

版 次:2013 年 7 月第 1 版

印 次:2013 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1—3000 册

定 价:18.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:027-87515778 87515848 87785758 87165708(传真)

· 版权所有 盗版必究 ·

高职高专测绘类专业新编系列教材

编 审 委 员 会

顾 问:赵文亮 黄声享

主 任:李生平 陈传胜 田 高

副主任:(以姓氏笔画为序)

牛志宏	王晓春	冯大福	刘仁钊	吴 迪
李 泽	李风贤	李井永	李占宏	李孟山
张晓东	张福荣	邹晓军	杨旭江	杨晓平
赵 杰	赵 红	高 见	高小六	唐保华
董钧祥	蔡德民			

委 员:(以姓氏笔画为序)

王 云	王 芳	孔令惠	牛志宏	王晓春
王朝林	王新鹏	王福增	左美蓉	冯大福
孙 焱	孙茂存	刘 飞	刘仁钊	刘海涛
江新清	吴 迪	李 泽	李风贤	李井永
李占宏	李泽球	李聚方	张玉堂	张晓东
张桂蓉	张福荣	张慧慧	陈 琳	邹娟茹
杨木生	杨旭江	杨晓平	周 波	赵凤阳
赵淑湘	胡良柏	高 见	高小六	翁丰惠
唐保华	董钧祥	谢爱萍		

秘书长:汪浪涛

出版说明

教材建设是教育教学工作的重要组成部分,高质量的教材是培养高质量人才的基本保证。高职高专教材作为体现高职教育特色的知识载体和教学的基本条件,是教学的基本依据,是学校课程最具体的形式,直接关系到高职教育能否为一线岗位培养符合要求的高技术应用型人才。

伴随着国家建设的大力推进,高职高专测绘类专业近几年呈现出旺盛的发展势头,开办学校越来越多,毕业生就业率也在高职高专各专业中名列前茅。然而,由于测绘类专业是近些年才发展壮大的,也由于开办这个专业需要很多的人力和设备资金投入,因此很多学校的办学实力和办学条件尚需提高,专业的教材建设问题尤为突出,主要表现在:缺少符合高职特色的“对口”教材;教材内容存在不足;教材内容陈旧,不适应知识经济和现代高新技术发展需要;教学新形式、新技术、新方法研究运用不够;专业教材配套的实践教材严重不足;各门课程所使用的教材自成体系,缺乏沟通与衔接;教材内容与职业资格证书制度缺乏衔接等。

武汉理工大学出版社在测绘地理信息职业教育教学指导委员会的指导和支持下,对全国三十多所开办测绘类专业的高职院校和多个测绘类企事业单位进行了调研,组织了近二十所开办测绘类专业的高职院校的骨干教师对高职测绘类专业的教材体系进行了深入、系统的研究,编写出了这一套既符合现代测绘专业发展方向,又适应高职教育能力目标培养的专业教材,以满足高职应用型高级技术人才的培养需求。

这套测绘类教材既是我社“十二五”重点规划教材,也测绘地理信息职业教育教学指导委员会“十二五”推荐教材,希望本套教材的出版能对该类专业的发展作出一点贡献。

武汉理工大学出版社

2012.2

前 言

为了深化高职高专测量专业教学改革,探索培养应用能力的教学理念,突出工程问题的特点,加快测量专业人才培养,编写了本教材。

本书从章节内容划分上突破了传统的以平差理论来划分的方式,全书主要包括理论和应用两部分:理论部分主要包括测量误差理论和测量平差理论;应用部分主要包括工程项目平差和平差项目计算。

第1章是测量误差理论。主要内容有:偶然误差的特性;衡量精度的指标;方差-协方差传播律及其在测量中的应用;权及常用定权的方法;协因数传播律;用真误差计算中误差的应用。

第2章是测量平差方法。主要内容有:测量平差概述;条件平差的原理及其平差步骤;间接平差的原理及其平差步骤;条件平差的精度评定;间接平差的精度评定。

第3章是针对常用的测量平差工程项目。讲述了水准测量条件平差;三角网条件平差;导线测量条件平差;水准网间接平差;三角网间接平差;边角网间接平差;GPS 基线向量网平差方法。

第4章是误差椭圆知识以及在工程实践中的应用。

第5章是在测量平差方法学习以后,如何简洁、快速地使用计算机解决测量工程实践中存在的工程问题,介绍了 Excel 平差解决方案和 MATLAB 平差解决方案。上述方案不用编程,学习时更能把重点放在解决工程问题上而不需要分心去考虑繁琐的程序设计。

本书第1章由辽宁交通高等专科学校张慧慧编写;第2章由辽宁科技学院李泽编写;第3章由杨凌职业技术学院李飞编写;第4章、第5章由辽宁科技学院李泽、李飞编写;甘肃林业职业技术学院邹娟茹和安徽工业经济职业技术学院王新鹏先期也参与了编写。李泽任主编,负责统一修改、定稿。辽宁工程技术大学赵国忱教授、卜丽静博士审读了全书,提出了一些宝贵意见,在此一并表示感谢!

由于编者能力有限,书中难免有错误和不当之处,恳切希望使用本教材的教师和广大读者能提出宝贵意见。

编 者

2012 年 8 月

目 录

第1章 测量误差理论	(1)
1.1 观测与误差	(1)
1.1.1 测量观测值和误差	(1)
1.1.2 测量误差的来源	(2)
1.1.3 测量误差的分类	(2)
1.1.4 测量误差的处理	(3)
1.2 偶然误差规律和精度指标	(5)
1.2.1 偶然误差的分布特性	(5)
1.2.2 精度指标	(7)
1.3 协方差传播律	(10)
1.3.1 协方差与协方差阵	(10)
1.3.2 线性函数协方差传播律	(12)
1.3.3 非线性函数协方差传播律	(14)
1.3.4 协方差传播律在水准测量中的应用	(15)
1.3.5 协方差传播律在交会测量中的应用	(15)
1.4 权与定权	(16)
1.4.1 权	(16)
1.4.2 定权	(18)
1.5 协因数与协因数传播律	(19)
1.5.1 协因数与协因数阵	(20)
1.5.2 协因数传播律	(21)
1.6 由真误差计算观测值的中误差	(23)
1.6.1 由三角形闭合差计算测角中误差	(23)
1.6.2 由往返测观测值计算中误差	(23)
第2章 测量平差方法	(26)
2.1 测量平差概述	(26)
2.1.1 必要观测	(26)
2.1.2 多余观测	(28)
2.1.3 测量平差任务	(28)
2.2 条件平差原理	(28)
2.2.1 条件平差函数模型	(28)
2.2.2 条件平差函数模型解算	(29)

2.3 间接平差原理	(31)
2.3.1 间接平差函数模型	(31)
2.3.2 间接平差函数模型解算	(32)
2.4 条件平差精度评定	(32)
2.4.1 $V^T PV$ 的计算	(32)
2.4.2 单位权方差的估值公式	(33)
2.4.3 协因数阵	(33)
2.4.4 平差值函数的协因数	(34)
2.5 间接平差精度评定	(36)
2.5.1 $V^T PV$ 的计算	(36)
2.5.2 单位权方差	(37)
2.5.3 协因数阵	(37)
2.5.4 参数函数的中误差	(38)
第3章 测量平差应用	(41)
3.1 水准测量条件平差	(41)
3.1.1 附和水准测量平差	(41)
3.1.2 闭合水准测量平差	(43)
3.2 三角网条件平差	(44)
3.2.1 图形条件(内角和条件)	(44)
3.2.2 水平条件(圆周条件)	(45)
3.2.3 极条件(边长条件)	(46)
3.3 导线测量条件平差	(48)
3.3.1 附和导线按条件平差	(48)
3.3.2 闭合导线的条件方程	(50)
3.4 水准网间接平差	(51)
3.5 三角网间接平差	(53)
3.5.1 测角网误差方程	(53)
3.5.2 测角网间接平差实例	(56)
3.6 边角网间接平差	(58)
3.6.1 测边网、边角网误差方程	(58)
3.6.2 测边网、边角网间接平差实例	(60)
3.7 GPS 基线向量网平差	(62)
3.7.1 GPS 基线解算概述	(62)
3.7.2 三维无约束平差	(63)
第4章 误差椭圆	(69)
4.1 概论	(69)
4.1.1 点位真误差	(69)

4.1.2 点位方差	(70)
4.2 点位误差	(72)
4.2.1 点位误差的计算	(72)
4.2.2 任意方向 φ 上的位差	(75)
4.2.3 位差的极大值 E 和极小值 F	(76)
4.2.4 以位差的极大值 E 和极小值 F 表示任意方向上的位差	(79)
4.3 误差曲线	(80)
4.3.1 误差曲线的概念	(80)
4.3.2 误差曲线的特点	(80)
4.3.3 误差曲线的用途	(81)
4.4 误差椭圆	(81)
4.4.1 误差椭圆的概念	(81)
4.4.2 误差椭圆代替误差曲线的可行性	(82)
4.4.3 误差椭圆的绘制	(83)
4.5 相对误差椭圆	(84)
4.5.1 利用点位误差椭圆评定精度存在的问题	(84)
4.5.2 相对点位误差椭圆	(86)
第5章 测量平差计算方法介绍	(90)
5.1 工程控制网平差计算概述	(90)
5.1.1 高程控制网严密平差及精度评定	(90)
5.1.2 平面控制网(导线网)严密平差及精度评定	(90)
5.2 Excel 平差方案	(91)
5.2.1 平差的数学模型	(91)
5.2.2 计算方法	(92)
5.2.3 注意事项	(93)
5.2.4 计算实例	(93)
5.3 MATLAB 平差方案	(97)
5.3.1 MATLAB 基础知识介绍	(97)
5.3.2 MATLAB 间接平差计算实例	(101)
习题参考答案	(104)
参考文献	(111)

第 1 章 测量误差理论

内 容 提 要

本章主要介绍偶然误差的特性、衡量精度的几种常用指标、方差-协方差传播律及其在测量中的应用、权及常用定权的方法、协因数传播律、用真误差计算中误差的应用等内容。重点理解与掌握中误差、相对中误差、极限误差的定义；线性函数与非线性函数的协方差传播律及其应用；方差阵、协因数阵、权阵三者的关系；由真误差计算中误差的应用。

1.1 观测与误差

1.1.1 测量观测值和误差

观测值是误差理论的研究对象，它是指通过观测得到的测量信息。

所谓测量观测值，是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的地球与其他实体的有关空间分布信息的数据。测量观测值可以是直接测量的结果，也可以是经过某种变换的结果。

根据测量方式，测量观测值可分为直接观测值和间接观测值。

直接观测值是指直接从仪器或量具上读出的待测量的数值。例如，钢尺量距的读数，用经纬仪或全站仪测某方位的度盘读数，水准测量中每一站的前、后视读数，都是直接观测值。然而，在测量工作中，有些未知量往往不能直接测得，而需要由其他的直接观测值按一定的函数关系计算出来，这样的测量值称为间接观测值。这类例子很多，如水准测量中，高差 $h = a - b$ 就是关于直接观测值 a 、 b 的函数，这里的函数 h 就是间接观测值。

一个量是否是直接观测值不是绝对的。随着科学技术的发展，测量仪器的改进，很多原来只能间接测量的量，现在都可以直接测量了。但在测量工作中，大多数测量值还都是间接测量值，即关于直接观测值的函数。

任何一个被观测的量，客观上总是存在着代表其真正大小的数值，简称真值。在测量工作中，由于测量仪器、外界条件、测量人员等诸多因素的影响，对某个量的测量值不可能是无限精确的，即测量中的误差是不可避免的。我们对某个量（如某一个角度、某一段距离或某两点间的高差等）进行多次观测，把每次测量所得的观测值与该量的真值之间的差值，称为测量误差（也称观测误差），即：

$$\text{测量误差}(\Delta) = \text{真值}(\tilde{L}) - \text{观测值}(L)$$

测量误差存在于一切测量之中，贯穿于测量过程的始终。随着科学技术水平的不断提高，测量误差可以被控制得越来越小，但永远不会降低到零。

在实际测量工作中，既然观测值一定存在误差，那么导致观测值的函数也必然存在误差。

观测值的误差通过一定的规律传递给函数,这个规律称为误差传播律,我们将在本章 1.3 节中具体阐述。

1.1.2 测量误差的来源

测量误差产生的原因主要有以下三个方面。

1. 仪器设备

测量工作是利用测量仪器进行的。常用测量仪器设备有钢尺、水准仪、经纬仪、全站仪、GPS 等,每一种测量仪器都具有一定的精确度,同时仪器本身在设计、制造、安装、校正等方面也存在一定的误差,因此,会使测量结果受到一定影响。例如钢尺的实际长度和名义长度总存在差异,由此所测的长度总存在尺长误差。又如水准仪的视准轴不平行于水准管轴,也会使观测的高差产生角误差。再如经纬仪度盘的偏心差。同样,全站仪、GPS 等仪器的观测结果也会存在误差。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力存在一定的局限性,所以,对仪器的对中、整平、瞄准、读数等操作都会产生误差。例如,在厘米分划的水准尺上,由观测者估读毫米数,则毫米级估读误差是完全有可能产生的。另外,观测者的技术熟练程度、工作态度也会给观测成果带来不同程度的影响。

3. 外界环境

观测时所处的外界环境中的温度、风力、大气折光、湿度、气压等时刻在变化,外界条件发生变化,观测成果将随之变化,同样也会使测量结果产生误差。例如,温度变化使钢尺产生伸缩,大气折光使望远镜的瞄准产生偏差等。

上述三个方面是引起观测误差的主要因素,因此把这三方面因素综合起来称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。观测条件的优劣直接影响观测成果的质量,反之观测成果的质量也反映观测条件的好坏。但是,不管观测条件如何,观测的结果都会受到上述因素的影响而产生这样或那样的误差,因此测量中的误差是不可避免的。当然,在客观条件允许的限度内,我们应尽可能确保观测成果具有较高的质量。

我们把在同一观测条件下的观测称为等精度观测;反之,称为不等精度观测。而相应的观测值称为等精度观测值和不等精度观测值。

1.1.3 测量误差的分类

测量误差按其观测成果的影响程度,可分为粗差、系统误差、偶然误差三种。

1. 粗差

粗差就是测量中出现的错误,如读错、记错、照错等,主要是由工作中的粗心大意引起的。一般粗差值很大,不仅大大影响测量成果的可靠性,甚至可能造成返工,给工作带来难以估量的损失,因此必须采取适当的方法和措施,杜绝粗差的产生。

2. 系统误差

在相同的观测条件下,对某个量进行一系列的观测,若观测误差的符号及大小保持不变,或按一定的规律变化,这种误差就称为系统误差。系统误差往往随着观测次数的增加而逐渐积累,且对测量成果质量影响也特别显著。在实际工作中,应该采用各种测量方法来消除或减

弱系统误差对观测成果的影响,达到实际上可以忽略不计的程度。

系统误差的产生主要有以下几个方面:

(1) 仪器误差

仪器误差是由于仪器制造或校正不完善而造成的。例如,角度测量时经纬仪的视准轴不垂直于横轴而产生的视准轴误差,水准尺刻画不精确所引起的读数误差。

(2) 环境误差

环境误差是指外界环境(光线、温度、湿度、电磁场等)对测量仪器的影响等所产生的误差。例如测角时因大气折光而产生的角度误差。

(3) 理论误差(方法误差)

理论误差是由于测量所依据的理论本身的近似性,或测量条件不能达到理论所规定的要求,或者是测量方法本身不完善所带来的误差。例如钢尺量距时外界温度与仪器检定时温度不一致所引起的距离误差。

(4) 人为误差

人为误差是由于观测者个人感官和运动器官的反应或习惯不同而产生的误差。例如由于观测者照准目标时,总是习惯于偏向中央某一侧而使观测结果带有系统误差。

需要注意的是,由于系统误差总是使测量结果偏向一边,或者偏大,或者偏小,因此,多次测量求平均值并不能消除系统误差。

3. 偶然误差

在相同的观测条件下做一系列观测,若误差的大小及符号都表现出偶然性,即从单个误差来看,该误差的大小及符号没有规律,但从大量误差的总体来看,具有一定的统计规律,这类误差称为偶然误差或随机误差。

例如,经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差。例如照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力风向的变化、目标的影子、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此,测角误差实际上是由许许多多微小误差项构成的,而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化,其数值的大小和符号的正负具有随机性,这样,由它们所构成的误差,就其个体而言,无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的。因此,把这种性质的误差称为偶然误差。又如:水准测量时水准尺读数估读不准确产生的误差;钢尺丈量距离时尺长不准确产生的误差;观测者照准目标时,时而偏向左侧时而偏向右侧产生的误差,均属于偶然误差。

1.1.4 测量误差的处理

1. 粗差的处理办法

粗差是一种大量级的观测误差,在测量成果中,是不允许粗差存在的。在观测数据中应设法避免出现粗差。

处理粗差的办法主要有以下两种:

(1) 采用 3σ 准则,统计理论表明,测量值的偏差超过 3σ 的概率已小于 1% 。因此,可以认为偏差超过 3σ 的测量值是其他因素或过失造成的,为异常数据,应当剔除。

(2) 进行必要的重复观测和多余观测,通过必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗

差。国家测绘机构制定的各类测量规范和细则,也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此,一旦发现粗差,该观测值必须舍弃或重测。尽管观测过程十分小心,粗差有时也在所难免。因此,如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差,或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差成果的影响,仍是测绘界十分关注的课题之一。

2. 系统误差的处理办法

消除和减少系统误差的方法一般有以下三种:

(1)检校仪器,把系统误差降低到最小。例如每次水准测量前都要进行*i*角检验,对*i*角误差超限的,应校正后才能用于观测。

(2)在观测方法和观测程序上采用必要的措施,限制或削弱系统误差的影响。消除系统误差的主要方法如下:

①如测水平角时采用盘左、盘右观测并在每个测回起始方向上改变度盘的配置等;方向观测法测角时,为了检查水平度盘在观测过程中是否发生变动,应计算归零误差。

②水准测量中,保证前后视距尽量相等,以削弱*i*角影响。在水准观测过程中,水准仪和水准标尺的自重对地面施加了一定荷载,随安置时间的延长会产生连续的沉降。因此在观测过程中,须采用后—前—前—后的观测顺序减弱其影响;对于整条水准线路来说,应进行往返观测,并取往测高差与返测高差的中数作为一条线路最后的观测高差。这样做可以使得在观测过程中由仪器与标尺下沉所引起的观测高差大部分得到消除。另外,外业观测一测段设站时一定要设为偶数站以消除标尺零点差。

(3)找出产生系统误差的原因和规律,对观测值进行系统误差的改正。如在钢尺量距中,某钢尺的注记长度为30 m,经鉴定后,它的实际长度为30.016 m,即每量一整尺,就比实际长度量小0.016 m,也就是每量一整尺段就有+0.016 m的系统误差。这种误差的数值和符号是固定的,误差的大小与距离成正比,若丈量了五个整尺段,则长度误差为 $5 \times (+0.016 \text{ m}) = +0.080 \text{ m}$ 。若用此钢尺丈量的结果为167.213 m,则实际长度为:

$$167.213 \text{ m} + \frac{167.213}{30} \times 0.016 \text{ m} = 167.213 \text{ m} + 0.089 \text{ m} = 167.302 \text{ m}$$

因此,钢尺量距时,要计算尺长改正数以便对丈量结果进行改正,从而消除系统误差。

3. 偶然误差的处理办法

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差,在实际工作中,为了提高观测成果的质量,防止错误的发生,通常要使观测值的个数多于未知量的个数,也就是要进行多余观测。例如,一个平面三角形,只需要观测其中的两个内角,即可决定它的形状,但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在,通过多余观测必然会发现观测结果之间不一致,或因不符合应有关系而产生不符值。因此,必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理,消除不符值,得到观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量,因此,可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果,这就是测量平差的一个主要任务。测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的精度。

概括来说,测量平差的任务就是:

(1)对一系列带有观测误差的观测值,运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值,求出未知量的最可靠值。

(2)评定测量成果的精度。当在观测值中剔除了粗差,排除了系统误差的影响,或者与偶

然误差相比系统误差处于次要地位,占主导地位偶然误差就成了我们研究的主要对象。如何处理这些随机变量的偶然误差,是测量平差这一学科所要研究的主要内容。

1.2 偶然误差规律和精度指标

1.2.1 偶然误差的分布特性

上一节中,我们知道偶然误差是一种随机变量,表面上没有规律性,但就总体来说仍具有一定的统计规律。即在相同观测条件下,大量偶然误差分布表现出一定的统计规律性,因此我们可以应用概率统计的方法来研究偶然误差的规律性。

为了便于理解,我们先引入一个直观的例子。大家都熟悉“抛硬币”的游戏。如果我们抛的次数较少,正、反面出现的频率是难以预计的,可能是正面,也可能是反面。但是如果连续抛无数多次,正、反面出现的频率就会趋近相等,表现出统计规律性。

为了研究偶然误差的统计规律性,我们可以用下列方法来表示:

1. 真误差

设进行了 n 次观测,各观测值为 $L_1, L_2, \dots, L_n$, 观测量的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$ 。由于各观测值都带有一定的误差,所以,每一个观测量的真值 $\tilde{L}_i$ 与观测值 L_i 之间必存在一个差数,设为

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \quad (1-1)$$

称 Δ_i 为真误差(在此仅包含偶然误差),有时简称为误差。若记

$$\begin{aligned} L_{n,1} &= (L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n)^T \\ \tilde{L}_{n,1} &= (\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \cdots \quad \tilde{L}_n)^T \\ \Delta_{n,1} &= (\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \cdots \quad \Delta_n)^T \end{aligned}$$

则有:

$$\Delta = \tilde{L} - L \quad (1-2)$$

从概率论与数理统计的观点知道,当只含偶然误差时,可以用被观测值的数学期望表示该观测值的真值,即

$$\begin{aligned} E(L) &= (E(L_1) \quad E(L_2) \quad \cdots \quad E(L_n))^T \\ &= (\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \cdots \quad \tilde{L}_n)^T \\ &= \tilde{L} \end{aligned}$$

则有:

$$\Delta = E(L) - L \quad (1-3)$$

在此我们用观测量的真值与观测值之差定义真误差(观测值作减数),有些教材和文献上用观测值与观测量的真值之差定义真误差(观测值作被减数)。这两种定义方式仅仅是使真误差符号相反,对于后续各种计算公式的推导没有影响。

2. 误差分布表

在某测区,在相同的条件下,独立地观测了 358 个三角形的全部内角,由于观测值带有偶然误差,故三个内角观测值之和不等于其真值 180° 。各个三角形内角和的真误差:

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \dots, 358)$$

式中, $(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。

现取误差区间的间隔 $d\Delta$ 为 $0.20''$,将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列,统计误差出现在各区间内的个数 v_i ,以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n ($n = 358$),其结果列于表 1-1 中。

表 1-1 某测区三角形内角和的误差分布

误差 的区间	Δ 为负值			Δ 为正值			备注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0~0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$d\Delta = 0.20''$ (区间 左端值的误差算入 该区间内)
0.20~0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40~0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60~0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80~1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00~1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20~1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40~1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
合计	181	0.505		177	0.495		

从表 1-1 中可以看出,偶然误差具有以下性质:

- ①在一定的观测条件下,偶然误差的绝对值不会超过一定的限值,也称有界性。
- ②绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多,也称单峰性。
- ③绝对值相等的正、负误差出现的机会基本相等,也称对称性。
- ④偶然误差的算术平均值随着观测次数的无限增加而趋于零,也称补偿性。

3. 直方图法

上述例子误差的分布情况,除了采用表 1-1 的形式表达外,还可用直方图来表达。例如,以横坐标表示误差的大小,纵坐标表示各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值,即 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$,根据表 1-1 的数据绘制出图 1-1。此时图 1-1 中每一个误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率,如图 1-1 所示中画斜线的长方条面积就代表误差出现在 $0 \sim 0.2''$ 区间内的频率为 0.126,这种图称为直方图,它形象地表示了误差的分布情况。

4. 误差概率分布曲线——正态分布曲线

当在同一观测条件下,随着观测个数的无限增多,即 $n \rightarrow \infty$ 时,误差出现在各区间的频率也就趋于一个确定的数值,这就是误差出现在各区间的概率。就是说在一定的观测条件下,对应着一种确定的误差分布,若 $n \rightarrow \infty, d\Delta \rightarrow 0$,图 1-1 中各长方条顶边所形成的折线将变成图 1-2 所示的一条光滑曲线。该曲线就是误差的概率分布曲线,也称误差分布曲线。

由此可见,偶然误差的频率分布随着 n 的逐渐增大,都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布,而将正态分布称为它们的理论分布,这样 Δ 的概率密度式为

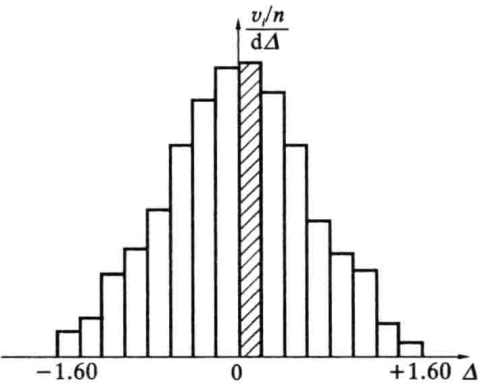


图 1-1 直方图

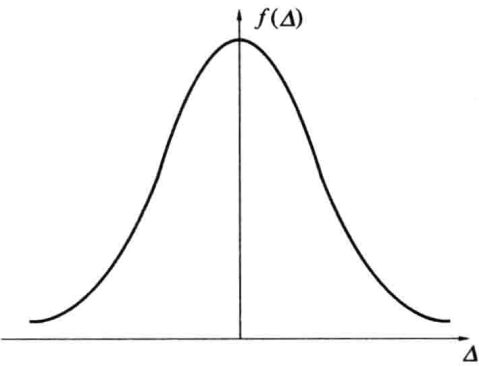


图 1-2 误差的概率分布曲线

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

式中, σ 为标准差,测量上称为中误差。

而误差出现在某一区间内的概率 $P(\Delta)$ 为

$$P(\Delta) = f(\Delta)d\Delta$$

5. 偶然误差的分布特性

通过以上讨论,可以进一步用概率术语概括出偶然误差的几个特性:

- (1) 在一定的观测条件下,误差的绝对值有一定的限值,或者讲,超出一定限值的误差其出现的概率为零。
- (2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。
- (3) 绝对值相等的正负误差出现的概率相同。
- (4) 偶然误差的数学期望为零,即

$$E(\Delta) = 0$$

换句话说讲,偶然误差的理论平均值为零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \tag{1-4}$$

式中, $[\Delta]$ 表示 $\sum_{i=1}^n \Delta_i$,偶然误差的第四个特性是由前三个特性导出的。因为在大量的偶然误差中正、负误差有互相抵消的性能,当观测次数无限增加时,真误差的算术平均值必然趋向于零。

对于一系列的观测而言,不论其观测条件是好是差,也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测,只要这些观测是在相同的条件下独立进行的,则所产生的一组偶然误差必然都具有上述的四个特性。掌握了偶然误差的特性,就能根据带有偶然误差的观测值求出未知量的最可靠值,并衡量其精度。同时,也可应用误差理论来选择最合理的测量工作方案和观测方法。

1.2.2 精度指标

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。为了正确理解精度的含义,我们先分