高中数学多解百题

吴业枢　编

福建省南安县科学技术委员会出版
广东省阳江县科学技术协会翻印

高中数学多解百题

吴 业 枢　编

福建省南安县科学技术委员会出版

广东省阳江县科学技术协会翻印

编者的话

在华主席、党中央的“抓纲治国”战略决策指引下，在全国科学大会向全国人民发出了攀登世界科学高峰，向四个现代化进军的号召和教育革命大干快上的大好形势鼓舞下，激励着全国广大青少年发奋努力学习政治、学文化，树立爱科学、讲科学、用科学的风尚。在这种形势下，作为教育工作者，深感为大家提供必要的复习参考资料，是义不容辞的责任，因此，我在短短的时间汇编这本《高中数学多解百题》献给青少年们参考，以表示对广大青年同志们热情支持的心情。

通过解一题多解，能起到如下的教育和培养的作用：

1、能更广泛地复习、应用基础知识和基本技能

解数学题的目的，就是要训练使学者达到深刻的理解和牢固地掌握基础知识和基本技能，并能灵活运用，通过一题找多种解法，由于涉及的知识面广，应用的技能、技巧更多，这自然地将会更好地更多地达到这些目的，更能使学者自觉地检验出掌握知识的深度和广度，明确自己不足的地方，进而更加督促自己刻苦攻关，勤奋学习，不断上进。

2、能更有效地发展逻辑思维和提高分析能力

要用多种方法解一个题，则必须从各个不同的角度，深思熟虑地把所要求解或求证的目的与已知条件联系起来，找出其互相间的制约关系，从而明确什么途径不行，什么途径可行，其根据是什么，因此就调动了积极思维，集中全力回忆一切所学的知识，并以辩证的观点去进行逻辑分析，从而使自己的逻辑思维能力和全面分析能力得到进一步的发展和提高。

3、能更好地使所学的知识综合应用，融会贯通

往往解一个数学题会联系到所学的一切与之有关的知识，如要求解一个二次函数的极值有关题目，就会想到，求抛物线顶点坐标$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ab-b^2}{4a}\right)$或将函数变（配方法）为特定的形式$y=(x-k)^2+m$，利用判别式求极值和利用定理求极值的定理：①若二个正变量之和一定时，则当二者相等时，乘积为最大；②二个正变量乘积一定时，则当二者相等时，其和为最小等。同时在运算中又要运用到那些运算法则、公式等等，这样在解题的过程中，就很自然地将数学各科的知识扭在一起了，如要用多种解法解一个题，则联系的知识那就更多，因而使所学的知识就更能综合应用，融会贯通。

4、能培养积极钻研精神，找出最合理最简捷的解题途径

实践证明，通过解一题多解能增进学者的学习兴趣，自觉地进行钻研，从而热爱这一科的学习，逐步形成刻苦钻研的学习习惯和劳动态度，同时，在解题的过程中，由于不断地丰富了解题的经验，也就能逐步摸索出和积累到解题的规律，和如何去寻找合理的方法，以及会受到深刻的教育，只有掌握的知识愈多，知识理解的愈透，才能相应地使自己的解题的方法更多更灵活。

总之，这对于学好科学，攀登世界科学高峰，实现祖国四个现代化，是有着一定的重要意义。

编解这一百个题，由于时间匆促，编者自己知识水平有限，难免有缺漏或未用上最好方法，而解得较繁杂，甚至有错误，恳请读者批评指正。

编　者

一九七八年八月于南安一中

高中数学多解百题

常用基本公式

1.乘法公式

（1） $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

（2） $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$,

（3） $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,

（4） $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$,

（5） $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$,

（6） $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$。

2.指 数

（1） $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,

（2） $a^m\div a^n=a^{m-n}$,

（3） $(a^m)^n=a^{mn}$

（4） $(ab)^n=a^n b^n$,

（5） $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(b\neq 0)$,

（6） $a^0=1(a\neq 0)$,

（7） $a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq 0)$,

（8） $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant 0)$。

3.不等式

设$a>b$，则

（1） $ac>bc(c>0)$，$ac<bc(c<0)$,

（2） $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}(c>0)$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}(c<0)$,

（3） $a^n>b^n(n>0,,a>0,b>0)$,

（4） $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n为正整数，$a>b>0$）， （5） $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ （$a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$），

（6） $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ （$a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，$c \geqslant 0$），

可推广 n 个正数。

4.二次方程 $ax^2+bx+c=0$

（1） 根 $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

（2） 根和系数关系 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$，

（3）判别式

$$b^2-4ac\begin{cases} >0，\text{两实根不等}，\\ =0，\text{两实根相等}，\\ <0，\text{两虚根共轭}。\end{cases}$$

5.对 数

（1） $\lg ab=\lg a+\lg b$，

（2） $\lg a^n=n\lg a$，

（3） $\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b$，

（4） $\lg\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\lg a$，

（5） $\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$（换底公式）。

6.级 数

等差级数

（1）通项 $a_n=a_1+(n-1)d$，

（2）等差中项 $b=\frac{a+c}{2}$，

（3）前n项和 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$。

等比级数

（1）通项 $a_n=a_1q^{n-1}$，

（2）等比中项 $b=\pm\sqrt{ac}$，

(3)前n项和 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}(q\neq 1)$。

7.三角公式

(1)同角三角函数间的关系

$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$,

$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2x+\cos^2x=1$。

(2)和差角公式

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$,

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$,

$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$。

(3)半倍角公式

$\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$,

$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$, $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,

$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$。

(4)和差化积

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$。

(5)任意三角形中角和边的关系

正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

8.解析几何

(1)两点$A(x_1,y_1)$及$B(x_2,y_2)$之间的距离d

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

(2)斜率$K_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha$

(3)定比分点公式 $M(x, y)$是线段AB的分点，则

$$\text{(i)}\ \frac{AM}{MB}=\lambda,\quad \begin{cases}\lambda>0\ \text{内分}\\ \lambda<0\ \text{外分},\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ M\text{为中点}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)\\ y=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)。\end{cases}$$

(4)两直线的交角$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}$(两直线平行，

$K_1=K_2$，两直线垂直，$K_1K_2=-1$)。

(5)直线方程的各种形式

(i)点斜式$y-y_1=K(x-x_1)$,

(ii)斜截式$y=Kx+b$,

(iii)两点式$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,

(iv)截距式$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

(6)点$M(x_1, y_1)$到直线$Ax+By+C=0$的距离

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}。$$

(7)直角坐标与极坐标的关系式

$x=\rho\cos\phi$，$y=\rho\sin\phi$,

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， $\phi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$。

1. 化简 $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$

解法 1. 原式 $=\dfrac{\left(a^{-\frac{2}{4}}+b^{-\frac{2}{4}}\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)}{a^{-\frac{2}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}-$

$$-\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)}{a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)\left[\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)-a^{-\frac{1}{2}}\right]}{a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{7}{4}}\right)a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{b}。$$

解法 2. 原式 $=\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-\frac{2}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}-\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$

$$=\frac{\left(a^{-1}-b^{-1}\right)-a^{-\frac{2}{4}}\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)}{a^{-\frac{2}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)\left[\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)-a^{-\frac{1}{2}}\right]}{a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{b}。$$

解法 3. 原式$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)}{a^{-\frac{2}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)}-\frac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$

$$=\frac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}\left\{\frac{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{2}{4}}}-1\right\}$$

$$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}}{b}=\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{b}$$

化简 2. $\frac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$

解法 1. 原式$=\frac{\left[3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}=\frac{3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}。$$

解法 2.原式$=\dfrac{\left[3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}-1)^2}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3}{(\sqrt{3}-1)^2}$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2}{\left[\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(4+2\sqrt{3})}{4}=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}。$$

3.化简$\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$

解法 1.$\dfrac{(1-i)^3}{1+i}=\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(-2i)^2}{2}=-2$。

解法 2.$\dfrac{(1-i)^3}{1+i}=\dfrac{1-3i+3i^2-i^3}{1+i}=\dfrac{1-3i-3+i}{1+i}$

$$=\frac{-2(1+i)}{1+i}=-2。$$

解法 3.$\dfrac{(1-i)^3}{1+i}=\dfrac{(1-i)^4}{2}=\dfrac{1-4i+6i^2-4i^3-i^4}{2}$

$$=\frac{1-4i+6+4i+1}{2}=-2。$$

解法4.$\dfrac{(1-i)^3}{1+i}=\dfrac{(1-i)^3(1+i)}{(1+i)^2}$

$$=\frac{(1+i)(1-i)(1-2i+i^2)}{1+2i+i^2}$$

$$=\frac{2(-2-i)}{2i}=-2。$$

解法5. $\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{(1-i)^2(1-i)}{1+i}=\frac{-2i(1-i)}{1+i}$

$$=\frac{-2i\times 2}{2i}=-2。$$

解法6. $\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{2\sqrt{2}(\cos315°+i\sin315°)^3}{\sqrt{2}\cos45°+i\sin45°}$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left[\cos(315°\times3)+i\sin(315°\times3)\right]}{\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)}$$

$$=2(\cos180°+i\sin180°)=-2$$

4. 解方程$x^4+1=0$，并且证明平面内表示这个方程的根的四个点是一个正方形的顶点。

解法1. 原方程即$x^4=-1$也就是

$$x^4=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$$

$$\therefore x=\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi$$

令$k=0$、1、2、3就得到原方程的四个根。

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

显然$|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=1$，故平面内表示这四个根

的点，M_1、M_2、M_3、M_4都在单位圆上。

如图1.$\angle M_1OM_2$等于x_2的幅角减去x_1的幅角，故$\angle M_1OM_2=\frac{\pi}{2}$，同理$\angle M_2OM_3=\angle M_3OM_4=\frac{\pi}{2}$，又显然有$\angle M_4OM_1=\frac{\pi}{2}$ $\therefore M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_1$

$\therefore M_1M_2M_3M_4$是个正方形。

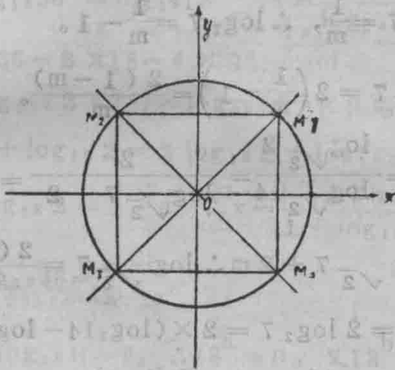

图1

解法2.$x^4+1=(x^4+2x+1)-2x^2$

$=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$

$=(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2-\sqrt{2}x+1)$。

原方程即：$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0$，

它的根是：$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$，

$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$，$x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$。

如图线段M_2M_1与M_3M_4显然都平行于ox轴，线段M_4M_1

与M_3M_2都平行于oy轴。

又$M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_1=\sqrt{\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2}}=\sqrt{2}$

所以$M_1M_2M_3M_4$是一个正方形。

5.若$\log_{14}2=m$ 求$\log_{\sqrt{2}}7$的值

解法1.$\because \log_{14}2=m$，$\therefore \log_2 14=\dfrac{1}{m}$，

$$1+\log_2 7=\frac{1}{m},\ \therefore \log_2 7=\frac{1}{m}-1。$$

$$\therefore \log_{\sqrt{2}}7=2\left(\frac{1}{m}-1\right)=\frac{2(1-m)}{m}。$$

解法2.$\log_{14}2=\dfrac{\log_{\sqrt{2}}2}{\log_{\sqrt{2}}14}=\dfrac{2}{\log_{\sqrt{2}}7+2}=m$

$$\therefore 2=m\log_{\sqrt{2}}7+2m.\therefore \log_{\sqrt{2}}7=\frac{2(1-m)}{m}。$$

解法3.$\log_{\sqrt{2}}7=2\log_2 7=2\times(\log_2 14-\log_2 2)$

$$=2\left(\frac{1}{m}-1\right)=\frac{2(1-m)}{m}。$$

6.已知$\log_{18}9=a$ $[a\neq 2]$，$18^b=5$ 求$\log_{36}45$

解法1.$\because \log_{18}9=a$ $(a\neq 2)$ $18^b=5$，

$\therefore \log_{18}5=b$，即$\log_{18}9+\log_{18}5=a+b$，

即$\log_{18}45=a+b$。

$\dfrac{\log_{36}45}{\log_{36}18}=a+b$，$\dfrac{\log_{18}36}{\log_{18}18}\cdot\log_{36}45=a+b$

$\log_{18}18\times 2\cdot\log_{36}45=a+b$，

$\left(\log_{18}18+\log_{18}\dfrac{18}{9}\right)\log_{36}45=a+b$

$(\log_{18}18+\log_{18}18-\log_{18}9)\log_{36}45=a+b$。

$(2-a)\log_{36}45=a+b \quad \therefore \log_{36}45=\dfrac{a+b}{2-a}\ (a\neq 2)$。

解法2 $\because \log_{18}9=a \quad \therefore 18^{a}=9$，又 $18^{b}=5$，

$\therefore 45=9\times 5=18^{a}\cdot 18^{b}=18^{a+b}$

设 $\log_{36}45=x$ 则 $36^{x}=45=18^{a+b}$。

$\therefore \log_{18}36^{x}=\log_{18}18^{a+b}$，$x=\dfrac{a+b}{\log_{18}36}=\dfrac{a+b}{1+\log_{18}2}$，

但 $36=2\times 18=4\times 9$，

$\therefore \log_{18}(2\times 18)=\log_{18}(2^{2}\times 9)$。

即 $1+\log_{18}2=2\log_{18}2+\log_{18}9=2\log_{18}2+a$，

$\therefore \log_{18}2=1-a$，$\therefore x=\dfrac{a+b}{1+\log_{18}2}=\dfrac{a+b}{2-a}$，

$\therefore \log_{36}45=\dfrac{a+b}{2-a}$。

解法3 $\because \log_{18}9=a$，$\therefore 18^{a}=9$，又 $18^{b}=5$，

$\therefore 45=18^{a+b}$。

设 $\log_{36}45=x$，则 $36^{x}=45=18^{a+b}$，

$$36^{x}=\left(\frac{18}{3}\cdot\frac{18}{3}\right)^{x}=18^{a+b}$$

$$18^{2x}=9^{x}\cdot 18^{a+b}$$

$$18^{2x}=18^{ax}\cdot 18^{a+b} \quad (\because 18^{a}=9)$$

$$18^{2x}=18^{ax+a+b}$$

$$\therefore 2x=ax+a+b$$

$$x=\frac{a+b}{2-a}$$

$$\therefore \log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}$$

解法4. $\because \log_{18}9=a\quad(a\neq 2)\quad 18^b=5$

$\therefore \log_{18}5=b$

$$\therefore \log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}\frac{18^2}{9}}\ (\because a\neq 2)$$

$$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{2\log_{18}18-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}。$$

解法5. $\because \log_{18}9=a,\ 18^b=5,$

$\therefore \log_{18}5=b$。

$$\therefore \log_{36}45=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}18+\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log_{18}\frac{18}{9}}=\frac{a+b}{1+\log_{18}18-\log_{18}9}$$

$$=\frac{a+b}{1+1-a}=\frac{a+b}{2-a}。$$

解法6. $\because \log_{18}9=a,\ 18^b=5,$

$\therefore \lg 9=a\lg 18\quad \lg 5=b\lg 18$

$$\therefore \log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{\lg 9+\lg 5}{\lg 4+\lg 9}$$

$$=\frac{a\lg 18+b\lg 18}{2\lg 18+\lg 9}=\frac{(a+b)\log 18}{2\lg 18-\lg 9}$$

$$=\frac{(a+b)\lg 18}{2\lg 18-a\lg 18}=\frac{a+b}{2-a}。$$

解法7. $\because \log_{18}9=a$

$$\therefore \frac{\log_9 9}{\log_9 18}=a,\ \log_9 18=\frac{1}{a},\ \log_9 9\times 2=\frac{1}{a}。$$

$$\log_9 2=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a},$$

又∵$18^b=5$，

∴$\log_9 5=b\log_9 18=b\frac{1}{a}=\frac{b}{a}$。

$$\therefore \log_{36}45=\frac{\log_9 45}{\log_9 36}=\frac{\log_9 9+\log_9 5}{\log_9 9+\log_9 4}$$

$$=\frac{1+\log_9 5}{1+2\log_9 2}=\frac{1+\frac{b}{a}}{1+2\times\frac{1-a}{a}}=\frac{a+b}{2-a}$$

解法8. ∵$18^b=5$　∴$\log_5 5=b\log_5 18$

$\log_5 18=\frac{1}{b}$　又$\log_{18}9=a$

$$\therefore \frac{\log_5 9}{\log_5 18}=a$$

则$\log_5 9=a\log_5 18=\frac{a}{b}$

$$\therefore \log_{36}45=\frac{\log_5 9\times 5}{\log_5 9\times 4}=\frac{\log_5+9\log_5 5}{\log_5+9\log_5 2}$$

$$=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}+2\log_5\frac{18}{9}}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}+2(\log_5 18-\log_5 9)}$$

$$=\frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a}{b}+2\left(\frac{1}{b}-\frac{a}{b}\right)}=\frac{a+b}{2-a}。$$

解法9. ∵$\log_{18}9=a$ ∴$\frac{\lg 9}{\lg 18}=a$,