"十二五"国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材

程希骏／编著

证券投资Portfolio理论

Portfolio Theory for Securities Investment

中国科学技术大学出版社

"十二五"国家重点图书出版规划项目
中国科学技术大学精品教材

程希骏／编著

Portfolio Theory for Securities Investment

证券投资Portfolio理论

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

Portfolio 理论是现代证券投资理论中最主要的理论，它的中心思想就是在给定约束的前提下，如何获取一个最优的投资组合。本书主要包括两大部分：第一部分为经典的 Portfolio 理论，主要是为本科生而编写的，包括证券的收益、投资风险的衡量、组合投资模型、资本资产定价模型和含消费投资组合的最优控制等内容；第二部分为随机 Portfolio 理论，这是近几年发展起来的，主要是为研究生而编写的，包括随机 Portfolio 总论、市场的散度与行为、函数构造 Portfolio 和随机 Portfolio 权数的有序过程等内容。

本书可作为高等学校管理科学、应用数学等专业的教材，也可供相关领域研究人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

证券投资 Portfolio 理论/程希骏编著. 一合肥：中国科学技术大学出版社，2014.8

(中国科学技术大学精品教材)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-03465-7

Ⅰ. 证…　Ⅱ. 程…　Ⅲ. 证券投资—投资理论　Ⅳ. F830.53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 110621 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

安徽省瑞隆印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本：710 mm×960 mm　1/16　印张：12.5　插页：2　字数：240 千

2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

定价：25.00 元

编审委员会

总　序

2008年，为庆祝中国科学技术大学建校五十周年，反映建校以来的办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下，共组织选题281种，经过多轮、严格的评审，最后确定50种入选精品教材系列。

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版，共出书50种，在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响，并整体进入国家新闻出版总署的"十一五"国家重点图书出版规划。为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设，结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材，学校决定，将精品教材出版作为常规工作，以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版，并设立专项基金给予支持。国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入"十二五"国家重点图书出版规划。

1958年学校成立之时，教员大部分来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统。同时，根据"全院办校，所系结合"的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中。虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才。

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一。当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养

了一届又一届优秀学生。入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使"科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合"的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校。在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材。进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术。

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献。

侯建国

中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

前言

Portfolio 理论是产生于20世纪50年代的一门专门研究证券投资数量分析的理论。自那时起，经过Sharpe、Ross和Merton等人的不懈努力，该理论得到了长足的发展。20世纪80年代以来，它进入了中国科学工作者的视野，同时也被一些高等学校的相关学科列为本科生和研究生的必修科目，中国科学技术大学也在管理科学、应用数学等专业设立了这门课。作者作为Portfolio理论的主讲教师，在以前的讲义基础上撰写了这本书。

虽然这是一本为本科生撰写的教材，但是从学生的发展考虑，也从该理论的完整性和前瞻性角度考虑，本书在给出现行的Portfolio理论的叙述之后，又增加了含消费的Portfolio最优控制问题和随机Portfolio理论简介两章。尽管这些内容尚处于发展阶段，且对于本科生来说明显偏深，但这些内容对于学生理解Portfolio理论的整个脉络和开拓他们的视野是有好处的。正是基于这样的原因，撰写时注意到有利于学生自学的这一要求，同时对一些较深的数学内容读者可阅读有关的参考文献。

本书的内容包括：前四章主要是讨论经典的Portfolio理论，第一章讨论组合收益率的计算，第二章从投资决策的理论沿革过程来讨论期望值准则、期望效用准则和M-V准则，第三章从优化的角度来讨论几个Portfolio模型，第四章在第三章的基础上研究CAPM模型及相关的理论；第五章则从连续性架构上讨论含消费的Portfolio最优控制问题；第六章主要是介绍随机Portfolio理论。后两章均是独立成章的，这两章的内容在本书中难度最大，可供读者选读。另外，为了紧跟Portfolio理论的发展态势，书中还将我们最近的一些有关的研究论文加以整理，合并成附录部分。

这里需要指出的是，本书的经典Portfolio部分与作者之前撰写的书（如安徽教育出版社出版的《现代投资理论》和安徽科技出版社出版的《金融

投资数理分析》)在内容上有着依存的关系。本书的后两章则几乎是新内容。

在长期的教学和科研中,一直得到中国科学技术大学统计与金融系的缪柏其教授、胡太忠教授和张曙光教授的指导和帮助,中国科学技术大学管理学院副院长华中生教授和中国科学技术大学出版社对本书的出版给予了很大的帮助,另外,我的学生符永健和朱业春等为本书的校对等做了许多工作,在此一并表示感谢。

程希骏

2013 年初冬于中国科学技术大学

目　次

第一章　证券的收益

一般来说,我们均是以证券价格在某一时段的变化率来衡量该证券在对应时期的收益的。例如:设在 t 期(中),已知证券 j 的期初价格为 $p_{j,t-1}$,期末价格未知,设为 $P_{j,t}$,假定该期没有股息,那么不难得到该证券在 t 时刻的收益为

$$R_{j,t} = \frac{P_{j,t} - p_{j,t-1}}{p_{j,t-1}}$$

由于 $P_{j,t}$ 价格未知,故它可以看作是一个随机变量,因而用大写。而 $p_{j,t-1}$ 已知,可以说是一个随机变量的取值,故它用小写。这样上式所决定的 $R_{j,t}$ 也是一个随机变量。本章所谓的证券的收益即是指对这样的随机变量 R 的描述。

第一节　基本的收益描述

让我们继续上面的讨论。设我们现在面对的是一个未知的统计总体 R_t,在离散的时间点 $t=1,2,\cdots$ 下,对应的 $R_1,R_2,\cdots$ 均是随机变量。为了处理问题的方便,我们假定 t 在不是非常大的情况下,序列 $\{R_t \mid t=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的,分布均相同于 R。

为了刻画一个随机变量的规律,人们均要根据它的概率分布计算其各种矩。这里最重要的两个是:一阶原点矩——数学期望和二阶中心距——方差。考虑到实用性,假定 R 是服从某种分布的离散型随机变量,$R=r_i$ 发生的概率是 h_i,于是

R 的期望值——期望收益率和方差分别为

$$\mu = ER = \sum_i r_i h_i$$

$$\sigma^2(R) = \sum_i h_i (r_i - \mu)^2$$

但是,由于 R 是未来的收益率,受各种因素的影响,这个随机变量的真实分布一般是不知道的,故我们必须要对其期望收益率和方差进行估计。根据前面的假定,要进行这种估计,首先要有这样一个假设,即未来各年的收益率的分布 $F(r)$是一样的。$\{R_t \mid t=1,2,\cdots\}$是一个独立同分布序列,均同于随机变量 R。于是如果有一收益率的时间序列 $R_1, R_2, \cdots, R_N$ 的一个实现为$r_1, r_2, \cdots, r_N$(N 为所观察的视点数),那么该收益率的样本均值为

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t$$

我们就可以用样本均值 $\bar{r}$ 来估计 ER 了。

例 1.1 表 1.1 是一种普通股票收益率的时间序列。

表 1.1 一种普通股票收益率的时间序列

T	1	2	3	4	5	6
r_1	6%	2%	4%	-1%	12%	7%

根据前述道理,我们可以计算出这种股票收益率的抽样均值为

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t = 5\%$$

以此估计出该股票的期望收益率为 5%。

但这里的 5%只是对该股票的期望值的估计,并不是真实的收益率的期望值。如果真实的收益率的期望值不是 5%,比如说是 10%,那么抽样均值和真实的期望值就有一个差距,我们通常称这个差距为抽样差距。本例中用 5%来作为对真实的期望值的估计,显然会存在一定的误差。从统计的观点来看,要使这种估计准确些,就必须要增加观察点的数目,亦即增加样本容量。N 越大,$\bar{r}$ 越接近 ER。

可是事情往往具有两面性。虽然从原理上讲,N 越大估计越准确,但是我们在做这种估计时,先做了一个个体收益率分布均一样的假设。这个假设从短时间来看还可以近似认为是成立的,但时间越长,亦即 N 越大,我们就越没有理由认为各

年收益率分布均一样了。这是一个矛盾。一般在处理这个问题时，我们总是尽可能选择其收益率分布不会发生很大变化的一段足够长的时间来进行抽样估计。

和期望收益率一样，对于其方差，我们一般也不知道。人们通常使用抽样方差

$$\hat{\sigma}^2(R) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \overline{r})^2 \tag{1.1}$$

来估计收益率的真实方差。注意这里的式(1.1)，我们不能用

$$\hat{\sigma}^2(R) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-1}(r_i - \overline{r})^2 \tag{1.2}$$

来估计 $\sigma^2(R)$，因为式(1.1)考虑了自由度损失，是无偏估计，而式(1.2)是有偏估计。

回到例 1.1，该股票收益率方差的无偏估计为

$$\hat{\sigma}^2(R) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \overline{r})^2 = 0.002$$

在实际工作中，按式(1.1)来计算抽样方差一般比较繁琐，所以我们可将式(1.1)表示成另一种形式：

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2(R) &= \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \overline{r})^2 \\ &= \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t^2 - 2r_t\overline{r} + \overline{r}^2) \\ &= \frac{N}{N-1}(\overline{r^2} - \overline{r}^2)\end{aligned}$$

其中：

$$\overline{r^2} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t^2$$

以上介绍了单一普通股收益率的期望值和方差的估计方法，但是这些方法并不能描述普通股收益率之间的相互关系。事实上这些相互关系是存在的。如 A 公司和 B 公司的产品是相互替代的，那么若 A 公司的股票被看好(收益率增大)，则 B 公司股票的收益率一定会下降；如 A 公司和 B 公司的产品是相互补充的，那么它们的股票收益率一定会同升同降。因此，我们还要研究它们的协方差和相关系数的样本估计。

我们假定 R 均为离散型随机变量，如果 R_A 和 R_B 的联合分布为

$$P\{R_A = r_{Ai}, R_B = r_{Bi}\} = h_i$$

那么 A 股票和 B 股票收益率之间的协方差就是

$$\sigma_{AB} = \sum_i h_i(r_{Ai} - ER_A)(r_{Bi} - ER_B) \tag{1.3}$$

需要说明的是，有时为了运算清楚，R_A 和 R_B 之间的协方差用符号 $\text{Cov}(R_A, R_B)$ 来表示，实际上在前面这两个符号已经交互使用了。由式(1.3)，我们不难发现，如果两种股票的收益率之间的协方差为正数，则说明当一种股票的收益率大于它的期望值时，另一种股票的收益率很可能也大于其期望值，反之亦然。但如果它们之间的协方差为负数，则当一种股票收益率大于它的期望值时，另一股票的收益率小于它的期望值。

在实际中，我们并不知道 R_A 和 R_B 的联合分布，所以只能采取抽样的方法来对 σ_{AB} 进行估计，即对一个 R_A, R_B 的二维时序样本 $\{r_{At}, r_{Bt} \mid t = 1, 2, \cdots, N\}$ 进行估计。由此我们可得到 σ_{AB} 的估计为

$$\hat{\sigma}_{AB} = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}[(r_{At} - \overline{r_A})(r_{Bt} - \overline{r_B})]$$

仿上，我们可同样将此式简化为

$$\hat{\sigma}_{AB} = \frac{N}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(\overline{r_A \cdot r_B} - \overline{r_A \times r_B}) \tag{1.4}$$

其中：

$$\overline{r_A \cdot r_B} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_{At} r_{Bt}$$

例 1.2 表 1.2 表示两种股票在 5 个月内的收益情况，试求它们之间的协方差。

表 1.2 两种股票在 5 个月内的收益情况

t	1	2	3	4	5
r_{At}	4%	−2%	8%	−4%	4%
r_{Bt}	2%	3%	6%	−4%	8%

根据式(1.4)，我们不难得到

$$\hat{\sigma}_{AB} = \frac{N}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(\overline{r_A \cdot r_B} - \overline{r_A \times r_B}) = 0.0017$$

我们知道协方差在一定程度上描述了投资收益率之间的相互影响。但理论上说，这种描述是有缺陷的，其主要原因在于它们会受各自单位的影响。譬如说，有甲和乙两组股票，甲组内包含 A 和 B 两种股票，乙组内包含 C 和 D 两种股票，对每组收益率都观察 5 点，如图 1.1 所示。直观地看，乙组内股票 C 和 D 的收益率

相互影响很大，因为当 R_C 增大时，R_D 也增大；R_C 减小时，R_D 也减小(5 个点均在第一象限内)，甚至是同幅度地增减。而甲组内的两种股票除了 3 个点在第一象限内且 R_A 和 R_B 同增减外，还有 1 个点在第二象限内，1 个点在第四象限内，这两个点显然表明 R_A 和 R_B 的变动方向恰好相反，即 R_A 的增减相应地有 R_B 的减增。但计算结果却有 $\sigma_{AB} > \sigma_{CD}$，究其原因，不难看出：$R_A$，$R_B$ 的单位比 R_C，R_D 的大，前者为 5%，后者仅为 1%。

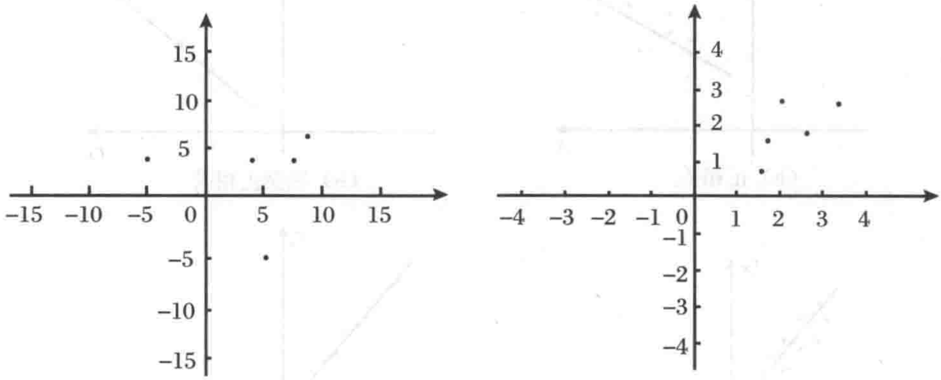


图 1.1

为了弥补协方差的这种缺陷，我们可以利用相关系数 ρ 更好地刻画两个(甚至更多)投资收益率之间的相互关系。其主要思想是用两个收益率的协方差除以它们各自标准差的乘积，这样既可使得结果是个无量纲数，从而摆脱了计算单位的影响；又可使得协方差从原来的取值区间$(-\infty, +\infty)$变为现在的相关系数的取值区间$[-1, +1]$，即

$$\rho_{AB} = \frac{\hat{\sigma}_{AB}}{\hat{\sigma}(R_A)\hat{\sigma}(R_B)}$$

这就使得 ρ 成为统一的尺度，通过 ρ 的大小来反映两个投资收益率之间的相互关系。

仍如上例，我们求得

$$\rho_{AB} = \frac{\hat{\sigma}_{AB}}{\hat{\sigma}(R_A)\hat{\sigma}(R_B)} = 0.758$$

在统计上，根据 ρ 的取值大小，我们可以把两个投资收益率之间的相互关系分为五大类：

① 正相关：$0 < \rho < 1$；

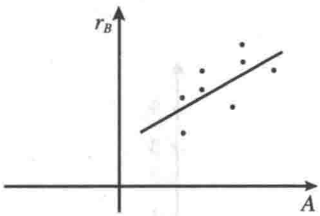
② 完全正相关：$\rho=1$；

③ 零相关：$\rho=0$；

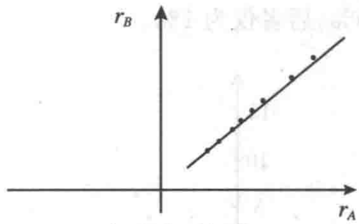
④ 负相关：$-1<\rho<0$；

⑤ 完全负相关：$\rho=-1$。

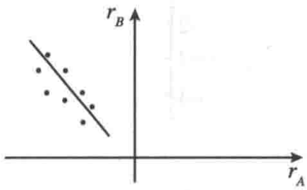
这五种相关关系可用图1.2来表示。



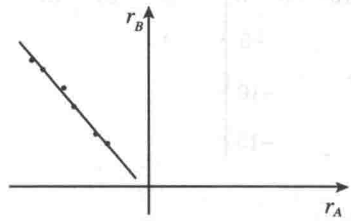
（a）正相关



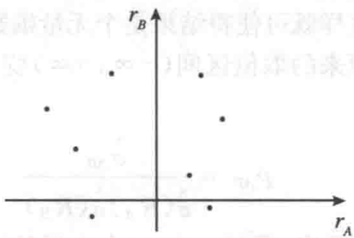
（b）完全正相关



（c）负相关



（d）完全负相关



（e）零相关

图1.2

图1.2中的直线是根据最小二乘法原理建立起来的回归线（又称拟合线）。正相关的回归线斜率为正，负相关的回归线斜率为负，完全正相关和完全负相关的点均在回归线上。如果 R_A 和 R_B 是零相关，则说明它们是线性无关。这点特别需要注意，零相关并不一定彼此不相关，它们可能是非线性相关。

在统计应用中，人们常常用相关系数的平方来表示可决系数（The Coefficient of Determination)。可决系数是一个百分数，它表示一个量的变化与另一个量有关或能由另一个量解释的百分比，反之亦然。如上例中可决系数 $d=\rho^2=0.758^2=57.5\%$，说明 R_A 变化的 57.5% 可由 R_B 的变化来解释，当然 R_B 的变化可由 R_A 来解释的百分比也为 57.5%。通过对两种股票收益率的历史数据的分析，求出其相关系数和可决系数，则如果知道 R_A 将在下期变动，我们就可以基本推断出 R_B 的变动情况。

到目前为止，我们仅仅研究了一阶（原点）矩（期望）和二阶（中心）距（方差），R 的三阶中心矩和四阶中心矩分别为

$$\mu_3(R) = E(R - ER)^3$$

$$\mu_4(R) = E(R - ER)^4$$

如果定义偏度系数 $C_S = \dfrac{\mu_3(R)}{\sigma^3}$，峰度系数 $C_E = \dfrac{\mu_4(R)}{\sigma^4}$，则我们就可以把任一随机变量 R 的分布密度函数 $f(x)$ 近似地表示为

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}\{1 - \frac{C_S}{6}[3(\frac{r-\mu}{\sigma}) - (\frac{r-\mu}{\sigma})^3] + \frac{C_E-3}{24}[3 - 6(\frac{r-\mu}{\sigma})^2 + (\frac{r-\mu}{\sigma})^4]\}$$

从统计学的观点来看，若要准确地刻画 R，必须要知道 R 的分布。但实际上，我们并不需要这样做。通常只是用 R 的前几阶矩来描述 R 的盈利性和风险性就足够了，因为根据样本资料来准确推导 R 的真实分布是很难的。

第二节　证券组合收益率的估计

第一节讨论了单个证券收益率的计算，但是在实际中，从风险的角度来说，投资者往往不仅仅向一种股票投资，而是通常向几种股票同时投资。这就如同西谚所说：不能把所有鸡蛋放在一个篮子中，而是把它们放在几个篮子中。事实上对于机构投资者来说，它们对任何一支股票的持仓量均受到证券法律的限制。

下面假定投资者面对 n 种可供投资的股票，它们的收益率分别用随机变量 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 表示。如果我们用列随机向量 $\boldsymbol{R}$（后文中若不加特殊说明，向量均指列向量）来表示它们，则记