考研数学命题人土豪金系列丛书

2016

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人历年真题精析

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐 荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童 武 教授

1 本书每章习题答案与详解 +2 篇北大、清华数学满分秘笈 +2 套原命题组成员密押试卷 +5 大考研命题人快速解题方法 +8 小时命题人数学串讲精华

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人士豪金系列丛书

2016

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人历年真题精析

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

赠

1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn 获超多增值服务

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心研究和分析，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成。

本书收录了1998—2015年考研数学一真题，并进行了详细的解析；精辟阐明解题思路，全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还提供了1987—1997年的相关典型真题作为习题，以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，进一步把握考试的特点及命题的思路，从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2016考研数学命题人历年真题精析. 数学一 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社, 2015.3

ISBN 978-7-5124-1695-6

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第030234号

2016考研数学命题人历年真题精析(数学一)
全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:27.75 字数:706千字

2015年4月第1版 2015年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1695-6 定价:44.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

编　委　会

前　　言

自1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，已有29载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家的智慧结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题，则是广大准备考研同学的期盼。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写，对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解、消化和掌握历年试题，便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性，也可从中发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

本书包括两部分内容：

一部分是1998—2015年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中，精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题，分值较高。编者分考点归纳习题，总结各类题型的解题思路和方法，并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过列举具体题目，分析常犯的错误，使考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点：

1. **内容全面**　汇集了1998年以来所有真题，以便考生对历年真题有大致的了解，并可研究真题。

2. **题型丰富**　本书按考点对历年真题分类，对每种题型都进行了归纳和总结，方便考生复习。

3. **解析详尽**　首先给出本题相应考点，再分析解题思路，给出详解，并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注,点出本题应注意之处。

基础复习阶段,考生可以利用试题精析部分,体会各知识点及题型的命题形式和特点。模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成真题部分,锻炼和提高解题速度以及准确率。如此复习,既能加深和巩固知识点,又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏,源于自信。

我们深信,考生仔细研读本书后,必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

编者　于清华园

目　　录

第三篇　1998—2014 年考研数学一试题分类解析

第一篇

2015年考研数学一试题及答案与解析

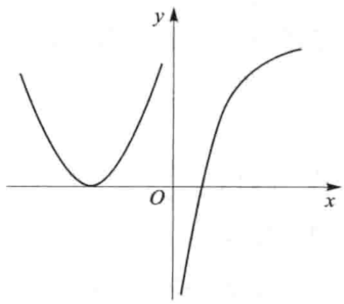
2015 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目的要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其中 2 阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3



(2) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则（　　）.

(A) $a=-3, b=2, c=-1$

(B) $a=3, b=2, c=-1$

(C) $a=-3, b=2, c=1$

(D) $a=3, b=2, c=1$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的（　　）.

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点

(D) 发散点，发散点

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（　　）.

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ d\\ d^2\end{bmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　　）.

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为（ ）.

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则（ ）.

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$ (B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)P(B)}{2}$ (D) $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)P(B)}{2}$

(8) 设随机变量 X,Y 不相关，且 $E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$（ ）.

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$________.

(10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$________.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$________.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

(17)（本题满分 10 分）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)（本题满分 10 分）

（Ⅰ）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.

（Ⅱ）设函数 $u_1(x),u_2(X),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分10分)已知曲线L的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A(0,\sqrt{2},0)$,终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$,计算曲线积分$L=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

(20)(本题满分11分)设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为$\mathbf{R}^3$的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$为$\mathbf{R}^3$的一个基;

(Ⅱ)当k为何值时,存在非0向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标相同,并求所有的$\boldsymbol{\xi}$.

(21)(本题满分11分)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求a,b的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

(22)(本题满分11分)设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$对$X$进行独立重复的观测,直到2个大于3的观测值出现时停止. 记Y为观测次数.

(Ⅰ)求Y的概率分布;

(Ⅱ)求$E(Y)$.

(23)(本题满分11分)设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中θ为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求θ的矩估计量;

(Ⅱ)求θ的最大似然估计量.

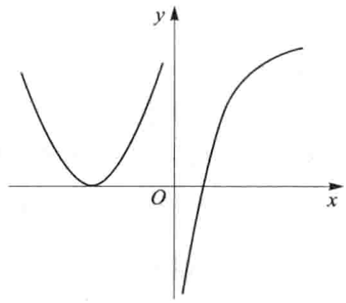
2015 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考点提示】 函数的拐点

【解题分析】 由图像可以看出，$x>0$ 时存在一点，使 2 阶导数变号，因此拐点个数为2 个. 本题选 C.



2.【答案】 A

【考点提示】 2 阶常系数非齐次线性微分方程

【解题分析】 因为$\frac{1}{2}e^{2x}$、$-\frac{1}{3}e^{x}$ 为 2 阶常系数齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，所以2，1 为特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的根，带入方程有 $a=-(1+2)=-3, b=1\times2=2$，从而原方程变为$y''-3y'+2y=ce^x$，再将特解 $y=xe^x$ 代入上式，解得 $c=-1$. 因此本题选 A.

3.【答案】 B

【考点提示】 幂级数收敛半径、收敛区间

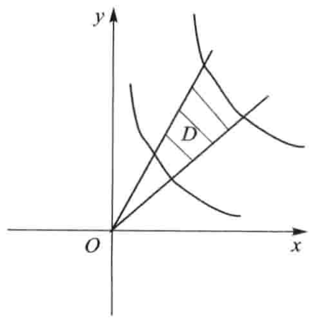
【解题分析】 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛知 $x=2$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的条件收敛点，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为 1，收敛区间为(0，2). 对幂级数逐项求导不改变收敛区间，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间还是(0，2). 因而 $x=\sqrt{3}$与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛点和发散点. 因此，本题选 B.

4.【答案】 B

【考点提示】 二重积分极坐标变换

【解题分析】 根据曲线表达式绘出图形，在极坐标系下该二重积分的积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\left|\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}\right.\right\}.$$



所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

因此本题选 B.

5.【答案】 D

【考点提示】 线性方程组求解

【解题分析】 对矩阵进行行变换,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) < 3$,所以 $a=1$ 或 $a=2$,相应地,$d=1$ 或 $d=2$. 因此本题选 D.

6.【答案】 A

【考点提示】 二次型的标准形

【解题分析】 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,因此 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

又因为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,得 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$,所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. 本题选 A.

7.【答案】 C

【考点提示】 概论的基本性质

【解析】 由于 $AB \subset A, AB \subset B$,所以 $P(AB) \leqslant P(A), P(AB) \leqslant P(B)$,从而有 $P(AB) \leqslant \sqrt{P(A) \cdot P(B)} \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$,选 C.

8.【答案】 D

【考点提示】 随机变量的数字特征

【解题分析】
$$\begin{aligned} E[X(X+Y-2)] &= E(X^2+XY-2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X) \\ &= D(X) + E^2(X) + E(X) \cdot E(Y) - 2E(X). \\ &= 3 + 2^2 + 2 \times 1 - 2 \times 2 = 5 \end{aligned}$$

因此,本题选 D.

二、填空题

9.【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【考点提示】 洛必达法则

【解题分析】 原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos x - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

10.【答案】 $\dfrac{\pi^2}{4}$

【考点提示】 定积分的计算和奇偶函数的性质

【解题分析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$

11.【答案】 $-\mathrm{d}x$

【考点提示】 隐函数求导

【解题分析】 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x-2$，于是

$$F'_x(x,y,z) = yz+1-\sin x,\quad F'_y = xz,\quad F'_z(x,y,z) = \mathrm{e}^z+xy.$$

当 $x=0,y=1$ 时，$\mathrm{e}^z=1$，即 $z=0$. 所以有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = -\frac{F'_x(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = -1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = -\frac{F'_y(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = 0.$$

因而 $\mathrm{d}z|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x$.

12.【答案】 $\frac{1}{4}$

【考点提示】 三重积分的计算

【解题分析】 由轮换对称性，有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为$\frac{1}{2}(1-z)^2$. 因此

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^1(z^3-2z^2+z)\mathrm{d}z = \frac{1}{4}.$$

13.【答案】 $2^{n+1}-2$

【考点提示】 行列式的计算

【解题分析】 将 n 阶行列式按第一行展开，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1} = 2D_{n-1}+2$$

$$= 2(2D_{n-2}+2)+2 = 2^2D_{n-2}+2^2+2 = 2^n+2^{n-1}+\cdots+2 = 2^{n+1}-2$$

14.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考点提示】 多维随机变量及其概论分布

【解题分析】 由服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，得$(X,Y)X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，又因为 X,Y 相互独立，所以有

$$P\{XY-Y<0\} = P\{(X-1)Y<0\} = P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$= P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

三、解答题

15.【考点提示】 等价无穷小

【解题分析】 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$,

因为$\lim\limits_{x\to0}3kx^2=0$,则分子$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}(1+a)=0$,$a=-1$;于是

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}.\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{x\to0}6kx=0$,所以

$$\lim_{x\to0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim_{x\to0}(1+2b\cos x)=0$$

求得 $b=-\frac{1}{2}$;把 a、b 的值代入原式,则

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{-\frac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x}{6k}+\right.\\&\qquad\left.\frac{\frac{1}{2}(1+x)\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}\right)\\&=\frac{-\frac{1}{2}}{6k}.\end{aligned}$$

解得,$k=-\frac{1}{3}$.

16.【考点提示】 一阶微分方程

【解题分析】 根据题意,曲线的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,切线与 x 轴的交点为$\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$.

故面积为
$$S=\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4.$$

$f(x)$满足的方程为$f^2(x)=8f'(x)$,此为可分离变量的微分方程,解得$f(x)=\frac{-8}{x+C}$,

将$f(0)=2$ 代入上式,得 $C=-4$,从而$f(x)=\frac{8}{4-x}$.