新理念

21世纪高等学校新理念教材建设工程

线性代数和概率统计思维训练与解题方法

石月岩　徐洪香
刘秀娟　徐美进
编著

东北大学出版社
Northeastern University Press

21 世纪高等学校新理念教材建设工程

线性代数和概率统计思维训练与解题方法

石月岩　徐洪香
刘秀娟　徐美进　编著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数和概率统计思维训练与解题方法 / 石月岩等编著. —沈阳：东北大学出版社，2014.6

（21 世纪高等学校新理念教材建设工程）

ISBN 978-7-5517-0611-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①石…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 ②概率论—高等学校—教学参考资料 ③数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O151.2 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 129195 号

内 容 提 要

本书根据“线性代数”“概率统计”课程中的教学重点和学生学习中的难点问题，归纳成专题，对其解决的方法、思路和解题步骤进行归纳总结，并精选了部分典型例题进行分析，使读者对解决此类问题的方法和技巧得到训练，以达到融会贯通之效.

本书读者对象为高等院校工科、经济类等专业的大学生和教师，也可作为报考硕士研究生考生的参考用书.

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）

E-mail：neuph@ neupress. com

http：//www. neupress. com

印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：185mm × 260mm

印　　张：11

字　　数：268 千字

出版时间：2014 年 6 月第 1 版

印刷时间：2014 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑：刘乃义

责任校对：叶　子

封面设计：刘江旸

责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0611-7　　　　定　价：21.00 元

前　言

“线性代数”“概率统计”是高等工科院校普遍开设的两门重要基础理论课，也是工学、经济学专业硕士研究生入学考试中的必考课程. 这两门课程具有学时少、内容多、理论性强、难度大、解题技巧灵活等特点，也是衡量学生数学水平的重要标志. 学好这两门课程，能使学生的逻辑思维和推理能力得到训练，分析和解决问题的能力得到提高，解题技巧和计算水平得到加强，并掌握处理离散量和随机量的基本方法，为后续课程的学习奠定扎实的数学基础.

作为长期从事线性代数、概率统计课程教学的教师，在教学过程中，我们一直在思考和探索如何面对浩如烟海的各种习题、各种抽象的定义等问题，能给学生一种数学思维训练方法、一种启迪、一种解题思路，使他们能做到主动学习，并能掌握住所学基本概念、基本原理和解题方法的内涵与精髓，从而在各类考试中得心应手、应对自如.

为了实现这个目标，我们在多年教学研究和总结的基础上，把教学重点和学生在学习中所遇到的难点问题归纳成一些专题，对其解决的方法思路和解题步骤进行归纳总结，并深刻解析所涉及的概念和理论，借以澄清学生的模糊认识，排除思维障碍，加深对基本概念、定理的理解及解题方法的正确把握，达到培养数学思维，提高分析问题、解决问题和计算能力的目的. 为此我们编写了本书，希望能起到抛砖引玉的作用.

本书共分两个部分：线性代数部分，概率统计部分. 每部分内容以课程中的主要问题与难点问题作为专题进行讨论，每个专题分两个部分.

(1) 解题方法：对本专题所涉及的基本概念、基本理论、主要解题方法和步骤加以归纳和总结，使读者能对本部分专题的解决有个系统的了解和掌握.

(2) 典型题解析：本部分精选了线性代数、概率统计中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解析，使读者掌握解决此类问题的方法和技巧，以达到举一反三、融会贯通的目的.

本书在编写过程中，辽宁工业大学佟绍成教授、李树有教授、王贺元教授提出了许多好的建议，并做了大量的工作；同时，辽宁工业大学理学院的领导和工程数学教研室的同仁也给予了大力支持与帮助. 谨在此一并表示衷心的感谢. 另外，还要感谢辽宁工业大学教材出版基金对本书的资助.

限于编者水平，加之编写时间仓促，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 11 月

目　录

第一部分 线性代数

1 行列式与方阵行列式的计算方法

1.1 解题方法

行列式是线性代数中的重要工具，在求解线性方程组、求逆矩阵、判别向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判别二次型的正定性等方面都有重要应用. 计算行列式，最重要的就是仔细观察其结构特点，再选择适当的方法来计算，就是要做到“一看二想三做”. 通常采用的方法有：

（1）对于二阶与三阶行列式,可以用对角线法则；

（2）对于特殊的行列式,可利用行列式的定义去求；

（3）利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式去计算；

（4）利用行列式按行（列）展开法则计算行列式（即降阶）；

（5）利用数学归纳法计算 n 阶行列式；

（6）利用范德蒙行列式的结论计算特殊的行列式.

对于方阵的行列式的计算，常常需要利用到矩阵的运算性质以及方阵行列式的性质与相关结论，如：$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$，$|\lambda A| = \lambda^n |A|$，$|AB| = |A||B|$，$|A^{-1}| = |A|^{-1}$，$|A^*| = |A|^{n-1}$等.

1.2 典型题解析

【例 1-1】 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________.

分析 本题是求第四行各元素余子式之和，而不是求第四行各元素的代数余子式之和，这是有差别的. 一种方法是直接计算，分别算出四个余子式，再求和；另一种方法是将其转化为代数余子式，并逆向应用行列式展开定理将其归结为一个四阶行列式，再采用“先化简，后降阶”的方法进行计算. 本题显然利用后一种方法比较简单.

先将 D 的第四行元素换成 $-1,1,-1,1$，得 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，则新行列式的第四行元素的余子式和原行列式第四行元素的余子式是相同的. 于是

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\times\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=7\times4\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-28\times1=-28.$$

解 应填 -28.

【例 1-2】 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $8A_{41}+27A_{42}+64A_{43}+125A_{44}=$ ________.

分析 本题是逆向应用行列式按行展开定理及范德蒙行列式的结论计算的题型.

$$8A_{41}+27A_{42}+64A_{43}+125A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

$$=(5-2)\times(5-3)\times(5-4)\times(4-2)\times(4-3)\times(3-2)=3\times2\times1\times2\times1\times1=12.$$

解 应填 12.

【例 1-3】 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为________.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

分析 本题应首先将行列式计算出来，由此便可得知方程 $f(x)=0$ 的次数，进而可确定根的个数. 利用行列式的性质，把行列式的第一列的 -1 倍依次加到第二、第三、第四列上,得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=-x(-5x+5)=5x(x-1).$$

显然，$f(x)=0$ 的根的个数为2，故应选(B).

解 应选(B).

注 本题利用了结论 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{m\times m}||\boldsymbol{B}_{n\times n}|$.

【例 1-4】 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于________.

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

分析 本题可直接按第一行展开.

$$\text{原式}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

另法：若从解题技巧来分析，为了迅速找出答案，可令 $b_4=0$，则

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}a_4 = a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3).$$

对比四个答案在 $b_4=0$ 的情形，只有(D)成立，所以应选(D).

解 应选(D).

【例 1-5】 计算行列式：$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=$________.

分析 本题是计算含字母型行列式的题型. 一般的计算方法就是先化简再降阶，或化为特殊型行列式. 由于本题中各行的四个元素的和均为 x，故可将后三列加到第一列上，再化为上三角行列式.

解
$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4.$$

【例 1-6】 五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=$ ________.

分析 根据本题行列式的特殊结构，按第一行展开，得如下递推关系式：

$$\begin{aligned}D_5&=(1-a)D_4+aD_3=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+aD_3\\&=[(1-a)^2+a]D_3+a(1-a)D_2\\&=(1-a+a^2)[(1-a)D_2+a(1-a)]+a(1-a)D_2\\&=(1-a+a^2)[(1-a)(1-a+a^2)+a(1-a)]+a(1-a)(1-a+a^2)\\&=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.\end{aligned}$$

解 应填 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

【例 1-7】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$.

分析 本题是一个非常有用的行列式，计算的方法是：利用各行的元素之和相同，提取公因式，然后将其化为三角行列式.

解 将后 $n-1$ 列加到第一列上，并提取公因子，再将第一行的(-1)倍加到后 $n-1$ 行上去，得

$$D_n=\begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & \cdots & a\\ x+(n-1)a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x+(n-1)a & a & \cdots & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a\\ 1 & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a\\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a\end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

【例 1-8】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a & & 1\\ & \ddots & \\ 1 & & a\end{vmatrix}$，其中，对角线上的元素都是 a，未写出的元素都是 0.

分析 本题的计算方法比较多. 由于将行列式去掉一行一列后就得到了特殊的行列式，故可考虑按第一行或第一列展开；考虑到行列式的第 n 列加到第 1 列后可将其化为三角行列式，故也可利用性质将其化为特殊的行列式；再有就是将行列式的第 2 行与第 n 行互换，然后将第 2 列与第 n 列互换，则行列式变为特殊的行列式，故也可利用性质将行列式变形.

解 方法一：按第 1 行展开，得

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^{n-2}(a^2-1).$$

方法二：将第 n 列加到第 1 列，再将第 n 行减去第 1 行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a+1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1+a & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & & & & 1 \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & \\ & & & & a-1 \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1).$$

方法三：将第 2 行与第 n 行互换，再将第 2 列与第 n 列互换，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & a \\ & & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ 0 & a & & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= a^{n-2}(a^2-1).$$

【例 1-9】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\boldsymbol{A}| = 1$，则 $|\boldsymbol{B}| =$ ________.

分析 由题设可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示，将此表示式转换为矩阵等式，再由矩阵行列式的性质即可求出 $|\boldsymbol{B}|$. 因为

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

所以

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times (3-1) \times (3-2) \times (2-1) = 2.$$

解 应填 2.

注 线性代数中，要注意三种语言，即方程（组）语言、矩阵语言和几何（向量）语言的相互转换，这对于求解线性代数问题至关重要. 本题为向量语言转换为矩阵语言.

另外，本题也可利用行列式的性质进行恒等变形来计算.

【例 1-10】 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = -1$，$|\boldsymbol{B}| = 2$，则 $|2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^2| =$

________.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，考查方阵的行列式的性质.

$$|2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^2| = 2^3|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}|^2 = 2^3\cdot|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|^2\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|^2$$
$$= 2^3\cdot|\boldsymbol{A}|^2\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|^2} = 2^3\times(-1)^2\times\frac{1}{2^2} = 2.$$

解 应填 2.

【**例 1-11**】设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，需要利用结论 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 及 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}$.

$$|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}| = 2^n|\boldsymbol{A}^*|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}| = 2^n\cdot|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|} = 2^n\times2^{n-1}\times\frac{1}{-3} = -\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

解 应填 $-\frac{2^{2n-1}}{3}$.

【**例 1-12**】设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i, j=1, 2, 3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，由于题设中与代数余子式有关，故联想到伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$. 由条件 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i, j=1, 2, 3)$，得 $a_{ij}=-A_{ij}(i, j=1, 2, 3)$. 于是有

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=(-A_{ij})=-(A_{ij})=-(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}},$$

其中，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 所以

$$|\boldsymbol{A}|=|-(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}|=(-1)^3|(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2 \text{或} |\boldsymbol{A}|\cdot[1+|\boldsymbol{A}|]=0.$$

从而

$$|\boldsymbol{A}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A}|=-1.$$

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则由 $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-a_{i1}^2-a_{i2}^2-a_{i3}^2=0$ 得

$$a_{i1}=a_{i2}=a_{i3}=0 \quad (i=1, 2, 3),$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，这与 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 的条件相矛盾. 故只有 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

解 应填 -1.

注 把行列式、代数余子式及行列式的具体元素联系起来的公式只有行列式按行（列）展开定理，提请读者注意.

【**例 1-13**】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

分析 利用 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 化简所给等式即可. 在所给等式两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{ABA}^*\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{BA}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{EA},$$

即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{AB}=2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

由于 $|\boldsymbol{A}|=3$，所以上式可以写成

$$(3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}.$$

于是

$$|3A-6E|\cdot|B|=|A|,$$

从而

$$|B|=\frac{|A|}{|3A-6E|}=\frac{3}{27|A-2E|}=\frac{1}{9}.$$

故本题应填 $\frac{1}{9}$.

解 应填 $\frac{1}{9}$.

【例 1-14】 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

分析 本题属于计算方阵的行列式的题型，由于题中给出的是一个矩阵的表达式，故应首先考虑化简矩阵，再取行列式，可使计算变得简单.

解 因为 $|A|=\frac{1}{2}\neq 0$，故 A 可逆，于是，由

$$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1} \text{及} (2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1},$$

得

$$(2A)^{-1}-5A^*=\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}=-2A^{-1},$$

两端取行列式得

$$|(2A)^{-1}-5A^*|=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A^{-1}|=(-2)^3|A|^{-1}=-16.$$

【例 1-15】 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，求 $|A^3-5A^2+7A|$.

分析 本题条件中涉及到方阵的特征值，故很容易想到特征值与方阵行列式之间的关系：$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. 因此，只要知道矩阵 A^3-5A^2+7A 的特征值，便可求出其行列式的值.

解 若 λ 为 A 的特征值，则 $\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$ 为 A^3-5A^2+7A 的特征值. 于是，由 A 的特征值为 1，2，3，可得 A^3-5A^2+7A 的特征值为 3，2，3. 再由特征值的性质，可知

$$|A^3-5A^2+7A|=3\times 2\times 3=18.$$

2　伴随矩阵的性质及应用

2.1　解题方法

伴随矩阵 A^* 的概念、性质及其应用是线性代数当中的一个重点内容，必须熟练掌握.

伴随矩阵 A^* 由 $|A|$ 中元素的代数余子式构成，基本关系式为 $AA^*=A^*A=|A|E$. 求逆、转置、伴随三个运算能交换次序.

A^* 的相关结论有：

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$;

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$;

(3) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$;

(4) $(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$;

(5) 若 $|A|\neq 0$，则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\dfrac{1}{|A|}A$，$A^*=|A|A^{-1}$.

2.2　典型题解析

【例 2-1】 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：(1) 若 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$；(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

分析　本题是证明含有 A^* 的命题. 解决此类问题的一般想法都是从基本关系式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 出发来考虑问题.

证明 (1) 若 $|A|=0$，则 $AA^*=|A|E=O$. 假若 $|A^*|\neq 0$，则 A^* 可逆，于是 $A=O(A^*)^{-1}=O$，此时 $A^*=O$，故 $|A^*|=0$. 这与 $|A^*|\neq 0$ 矛盾. 所以 $|A^*|=0$.

(2) 由 $AA^*=|A|E$，得 $|A||A^*|=|A|^n$；若 $|A|\neq 0$，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$. 若 $|A|=0$，由 (1) 知 $|A^*|=0$，此时 $|A^*|=|A|^{n-1}$ 也成立. 故有 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

【例 2-2】 设 A 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵，A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0$，± 1. 则必有 $(kA)^*=$ ________.

(A) kA^*　　(B) $k^{n-1}A^*$　　(C) k^nA^*　　(D) $k^{-1}A^*$

分析　本题可采用加强条件的技巧，若 A 可逆，则由 $AA^*=A^*A=|A|E$，知 $A^*=|A|A^{-1}$，于是 $(kA)^*=|kA|\cdot(kA)^{-1}=k^n\cdot|A|\cdot\dfrac{1}{k}A^{-1}=k^{n-1}\cdot|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*$. 所以应选(B).

解　应选(B).

注　题设 $k\neq 0$，± 1，$n\geqslant 3$，主要是为了使四个选项只有一个是正确的. 当然，若 A 不可逆，也能得到相应的结论，只是稍微复杂一些，此时要用到 A^* 的定义. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其元素 a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}，则矩阵 $kA=(ka_{ij})_{n\times n}$，若其元素的代数余子式记作 $\Delta_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则由行列式的性质有 $\Delta_{ij}=k^{n-1}A_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 从而 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

【例 2-3】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n\geqslant 2$)，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则________.

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

分析　本题涉及伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，首先联想到公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^* = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}| \cdot (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$
$$= |\boldsymbol{A}|^n \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

解　应选(C).

【例 2-4】 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^* =$________.

(A) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

分析　若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^* = |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{C}^* = |\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}.$$

可见应选(D).

当 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆时，利用定义可证(D)仍成立.

解　应选(D).

注　作为选择题，可在 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆的假设下进行推理，通过排除法即可找到正确的选项.

【例 2-5】 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11}，a_{12}，a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为________.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

分析　因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$，由此可知 $a_{ij} = A_{ij}$ ($\forall\, i, j = 1, 2, 3$). 于是

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a_{11}^2 > 0.$$

又由于 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，两边取行列式并利用 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$，得 $|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|$，从而 $|\boldsymbol{A}| = 1$. 因此，$3a_{11}^2 = 1$，故 $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 应选(A).

解　应选(A).

3 矩阵可逆的判定与逆矩阵的求法

3.1 解题方法

可逆矩阵是线性代数当中一个非常重要的概念，掌握判断矩阵可逆及求逆矩阵的方法，是学好线性代数的关键所在.

Ⅰ. 判断矩阵可逆的常用方法

（1）定义法：若有方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

（2）行列式法：若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

（3）求秩法：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

（4）利用相关性法：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

（5）方程组法：若方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，或 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

Ⅱ. 求逆矩阵的常用方法

（1）利用定义求逆矩阵：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

（2）利用伴随矩阵求逆矩阵：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

（3）利用分块对角矩阵求逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

其中，$\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$均可逆.

（4）利用初等行变换求逆矩阵：$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1})$.

3.2 典型题解析

【例 3-1】 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}(a<0)$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$________.

分析 这里，$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$为 n 阶矩阵，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2a^2$为数，直接通过 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 进行计算并注意利用乘法的结合律即可. 由题设，有