普通高等教育“十二五”数学基础课程规划教材

概率论与数理统计教程

主编 刘磊 阚兴莉

南京大学出版社

普通高等教育“十二五”数学基础课程规划教材

概率论与数理统计教程

主　编　刘　磊　阚兴莉
副主编　杨贵诚　饶　峰　曾玉华
参　编　徐　鹏　张　甜　解　进
　　　　杨黄旭　阮曙芬

南京大学出版社

内容简介

本书是基于概率论与数理统计课程多年教学内容以及教学方法改革和创新成果编写而成的，主要适用于三本院校各专业的学生学习. 在编写该教材过程中，注重学生的思想方法和应用能力的培养；减少计算技巧和逻辑推理能力的要求，尽量采用深入浅出的讲解方法，易于学生理解、掌握教材内容，最大限度地降低学习难度.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程 / 刘磊，阚兴莉主编. — 南京 ：南京大学出版社，2014.8

普通高等教育"十二五"数学基础课程规划教材

ISBN 978-7-305-13449-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… ②阚… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 133149 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 普通高等教育"十二五"数学基础课程规划教材
书　　名 概率论与数理统计教程
主　　编 刘　磊　阚兴莉
责任编辑 惠　雪　吴　华　　编辑热线 025-83596997

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 9 字数 208 千
版　　次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 1～3 600
ISBN 978-7-305-13449-4
定　　价 25.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前　言

概率论与数理统计是高等院校理工类和经管类专业十分重要的一门基础课程. 随着社会经济和人文哲学数学化进程的日益加速，概率论与数理统计学科与其他学科相结合，形成了诸多边缘性学科，如数学经济学、金融统计学等. 概率论与数理统计已经成为人们从事经济生产、科学管理和社会研究活动的一个基本工具.

本书是根据当前科学技术发展形势的需要，并结合多年概率论与数理统计课程教学内容和教学方法改革与创新的成果积累编写而成. 该教材具有如下特点：注重理论与实际相结合，许多例题和习题本身就是实际应用；对纯理论性的知识尽量采取学生易于理解、接受的方式进行深入浅出的讲解，从而最大限度地降低学生学习的难度.

本书是由刘磊、阚兴莉老师担任主编，杨贵诚、饶峰、曾玉华老师担任副主编. 参加编写的人员还有徐鹏、张甜、解进、杨黄旭、阮曙芬等老师，最后由刘磊、阚兴莉老师进行统稿和定稿.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请专家、同行及读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2014 年 4 月

目　录

第一章　概率论的基本概念

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科，它与其他学科有着紧密的联系，并在社会经济各个领域被广泛应用. 本章重点介绍概率论中的基本概念，如随机事件、样本空间、概率等，它们是学习概率论与数理统计的基础.

第一节　随机事件与样本空间

一、随机现象及其统计规律性

在自然界和社会生活中，存在着两类不同的现象：必然现象和随机现象. 这两类现象从其结果能否准确预知的角度来区分的. 必然现象是在一定条件下必然发生(或必然不发生)，并能准确预知其结果的现象. 例如，在标准大气压下，水在 100℃沸腾；在地面上竖直上抛的石子一定下落等. 而随机现象是指在相同条件下重复进行时事先无法预知其结果的现象. 例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，可能出现标明硬币价值的"数字面"(记为"正面")朝上，也可能另一面(记为"反面")朝上，而每次在抛掷这枚硬币之前，都无法预知会出现"正面朝上"还是"反面朝上"的结果；记录一天内来某医院就诊的人数，可能是任意非负整数，但事先无法预知其确切数字；某人买彩票，可能中奖，也可能不中奖，但买之前无法预知是否中奖等.

随机现象的结果虽然无法预测，但并不是完全无规律可循. 例如，多次重复抛掷一枚硬币得到"正面朝上"的结果大致有一半，一天内到某医院就诊的人数按照一定规律分布，等等. 可见，虽然随机现象在个别试验或观察中会出现不确定的结果，但在大量重复试验或观察中，其结果具有某种规律性，这种规律性称为随机现象的统计规律性. 概率论的研究对象是随机现象的统计规律性.

二、随机试验与样本空间

为了研究随机现象的统计规律性，需要对客观事物进行观察或试验. 下面是一些观察或试验的例子.

E_1：抛掷一枚骰子，观察出现的点数；

E_2：抛掷一枚骰子两次，观察出现的点数；

E_3：抛掷一枚骰子两次，观察出现的点数之和；

E_4：记录某火车站售票处一天内售出的车票数；

E_5：在一批日光灯管中任意抽取一只，测试它的寿命.

仔细分析，可以发现上述观察或试验具有以下共同的特点：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地，将具有以上 3 个特点的观察或试验称为随机试验，记为 E，本书后面提到的试验都是指随机试验. 将随机试验所有可能结果构成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即随机试验 E 的每个可能结果，称为样本点，记为 e.

例如，上面的 5 个随机试验 $E_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的样本空间分别为：

$S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_2=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$；

$S_3=\{2,3,\cdots,12\}$；

$S_4=\{1,2,\cdots,n\}$，这里的 n 是指售票处一天内准备出售的车票数；

$S_5=\{t|t\geqslant 0\}$.

需要注意的是，样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如，在随机试验 E_2 和 E_3 中同是将一枚骰子抛掷两次，但由于试验的目的不一样，其对应样本空间 S_2 和 S_3 也不一样.

三、随机事件

在实际进行随机试验时，人们常常关心满足某些条件的那些样本点构成的集合. 例如，在观测日光灯管的寿命的随机试验 E_5 中，自然希望灯管寿命越长越好，比如寿命是否大于 1 000 小时，即是否有 $t\geqslant 1\ 000$，满足这一条件的样本点构成样本空间 S_5 的一个子集 $A=\{t|t\geqslant 1\ 000\}$，称 A 为随机试验 E_5 的一个事件.

一般地，将随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称事件. 常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，则称这一事件发生.

特别地，由一个样本点构成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有 6 个基本事件：$\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$；试验 E_3 有 11 个基本事件：$\{2\},\cdots,\{12\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集. 在每次试验中是必然发生的，称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是 S 的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件. 必然事件与不可能事件虽无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样是为了数学运算上的方便.

例如，在 E_1 中“出现的点数是奇数”的事件 $A_1=\{1,3,5\}$；在 E_2 中“第一次出现的点数是 1”的事件 $A_2=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6)\}$；在 E_5 中“灯泡的寿命小于 1 000 小时”的事件 $A_3=\{t|0\leqslant t<1\ 000\}$.

四、事件的关系与运算

在同一样本空间中，往往存在许多随机事件. 数学上一个基本的思想方法是通过对较简单事件的分析来了解较复杂的事件. 因此，需要研究随机试验的各个事件之间的关系和运算.

由于样本空间、随机事件都是集合，因此，随机事件之间的关系和运算同集合之间的关系和运算是一致的. 下面根据“事件发生”的含义，给出这些关系和运算在概率论中的提法. 设随机试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(一) 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$. 它表明事件 A 的样本点都属于事件 B. 如图 1－1(a)所示.

(二) 事件的相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$，它表明事件 A 的样本点与事件 B 的样本点完全相同.

(三) 事件的和(并)

将表示“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的和(并)，记为 $A\cup B$. 它是由属于 A 或 B 的样本点构成的集合. 如图 1－1(b)所示.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和(并).

(四) 事件的积(交)

将表示“事件 A 与事件 B 同时发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的积(交)，记为 $A\cap B$ 或 AB. 它是由既属于 A，又属于 B 的样本点构成的集合. 如图 1－1(c)所示.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积(交).

(五) 事件的差

将表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 它是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合. 如图 1－1(d)所示.

(六) 互不相容(或互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥)，它表明事件 A 与事件 B 没有相同的样本点. 如图 1－1(e)所示.

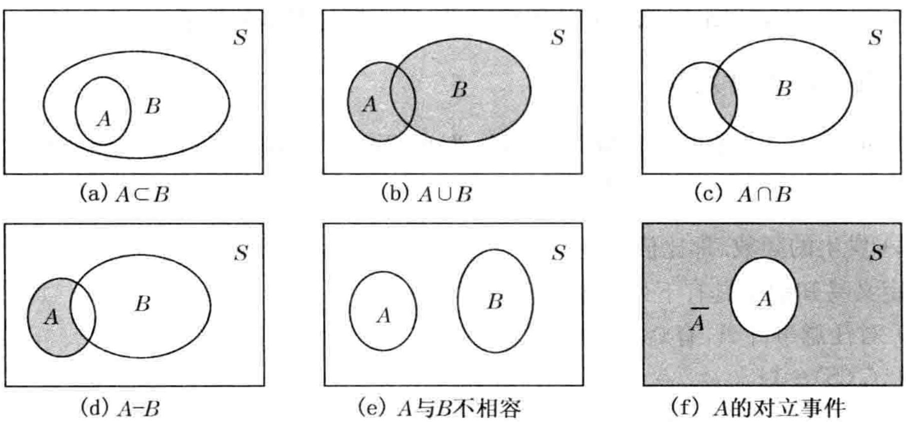

图 1－1　事件关系与运算韦氏图

(七) 对立事件(或逆事件)

若 $A\cup B=S, AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或互为逆事件). 它表明对每次试验而言,事件 A、B 必有一个发生,且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=S-A$. 如图 1-1(f)所示.

事件运算经常用到下述运算定律. 设 A,B,C 为事件,有

交换律:$A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; $(A\cap B)C=A\cap(B\cap C)$.

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$; $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

对偶律(德摩根公式):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1 设有甲、乙、丙三人参加某项测试,记 A 为事件"甲参加该项测试合格",B 为事件"乙参加该项测试合格",C 为事件"丙参加该项测试合格". 试用 A,B,C 的运算关系表示以下各事件:

(1) 三人中只有甲合格;

(2) 三人中仅有一人合格;

(3) 三人中至少有一人合格;

(4) 三人都合格.

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(3) $A\cup B\cup C$ 或者 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(4) ABC.

第二节 概率的定义和性质

对于一个事件(除必然事件和不可能事件之外),它在一次试验中可能发生,也可能不发生. 人们常常关注某些事件发生的可能性究竟有多大,希望找到一个合适的数来度量事件在一次试验中发生的可能性大小. 本节先由频率引出度量事件发生的可能性大小的概率的统计定义,然后再给出概率的公理化定义,最后探讨概率的性质.

一、概率的统计定义

统计定义是以大量重复试验为前提的,为此,首先引入频率及其稳定性的概念.

定义 1 在相同条件下,重复做 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 发生的频率,并记为 $f_n(A)$. 即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义易知频率具有下列基本性质:

(1) 对任意事件 A,有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容的事件,则 $f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$.

例 2 考察"抛硬币试验",将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次,各做 6 遍. 得到数据如表 1-1 所示(其中 n_A 表示"硬币正面朝上"(设为事件 A)发生的频数,$f_n(A)$表示 A 发生的频率).

表 1-1 抛硬币试验数据表

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492

由表 1-1 中数据可以看出,虽然对于同样的试验次数 n,$f_n(A)$不尽相同,但当试验次数较大时,频率 $f_n(A)$在 0.5 附近摆动,且随着 n 的增加,它逐步稳定在 0.5 这个数值上.

大量试验证实,当试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$呈现出稳定性,逐渐稳定于某个常数. 这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性. 如果让试验重复大量次数,得到频率 $f_n(A)$的稳定值,以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的.

定义 2(概率的统计定义) 在相同条件下进行大量重复试验,如果随着试验次数 n 的增加,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$逐渐稳定于某一常数 p,则称常数 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)=p$.

由统计定义求得的概率称为统计概率. 例如,在例 1 抛硬币试验中,事件 A("硬币正面朝上")的统计概率即为频率的稳定值 0.5.

二、概率的公理化定义

鉴于得到统计概率需要进行大量的试验,同时,为理论研究的需要,从频率的稳定性和频率的性质得到启发,可以给出如下度量事件发生可能性大小的概率的公理化定义.

定义 3(概率的公理化定义) 设 S 是随机试验 E 中一个样本空间,对于 E 上的每一事件 A 规定一个实数 $P(A)$,如果 $P(A)$同时满足下列 3 个公理条件:

(1) 非负性 $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性 $P(S)=1$;

(3) 可列可加性 对任意可列个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$,有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$. 则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

由大数定律(第五章内容)可知,当试验次数 $n\to\infty$时,频率 $f_n(A)$在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 因此,有理由将概率 $P(A)$用来度量事件 A 在一次实验中发生的可能性大小.

三、概率的性质

由概率定义的 3 个公理条件,可以推导出概率的一些重要性质.

性质 1　不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

证明　因为 $S=S\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，由概率公理化定义的条件(2)和(3)有

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

因此，$P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性)　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容的，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证明　因为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$

而 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$ 是可列个两两不相容事件，由可列可加性和性质 1，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3　对任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　因为 $A\cup\overline{A}=S$ 且 $A\overline{A}=\varnothing$，由性质 2 有 $1=P(S)=P(A)+P(\overline{A})$，即 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 4　对任意事件 A,B，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 特别地，若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

证明　由于 $A=(A-B)\cup AB$，而 $(A-B)\cap AB=\varnothing$，故由性质 2，知 $P(A)=P(A-B)+P(AB)$，即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，若 $A\supset B$，则 $AB=B$，所以 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

推论 1　若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

推论 2　对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 5　对任意事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明　由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，而 A 与 $B-AB$ 不相容，故由性质 2 和性质 4 知，$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 性质 5 得证.

性质 5 称为概率加法公式，它可以推广到有限多个事件的情形，例如，对于 3 个事件 A,B,C，有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，概率加法公式为：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 3　设 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，分别根据下列条件求 $P(A\overline{B})$：

(1) $A\supset B$；(2) A 与 B 互不相容；(3) $P(AB)=\dfrac{1}{8}$.

解　由事件的关系与运算知，$A\overline{B}=A-B$，结合性质 4 可得，$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(1) 当 $A\supset B$ 时，有 $P(AB)=P(B)$，因此 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$；

(2) 若 A 与 B 互不相容,则 $P(AB)=0$,因此 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$;

(3) 若 $P(AB)=\frac{1}{8}$,因此 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

例 4　某企业与甲、乙两公司签订某商品的长期供货合同.从以往情况看,甲公司按时供货的概率为 0.9,乙公司按时供货的概率为 0.75,这两公司都按时供货的概率为 0.7,求至少有一家公司按时供货的概率.

解　以 A、B 分别表示事件"甲公司按时供货","乙公司按时供货".由题意可知,$P(A)=0.9$,$P(B)=0.75$,$P(AB)=0.70$,则至少有一家公司按时供货的概率为:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.9+0.75-0.7\\&=0.95.\end{aligned}$$

第三节　古典概型与几何概型

"概型"是指某种概率模型.本节讨论两种常见的概率模型:古典概型和几何概型.

一、古典概型

定义 4　如果一个随机试验有下列两个特点:

(1) 有限性.试验的样本空间的元素只有有限个,即样本点的数目有限;

(2) 等可能性.试验中每个基本事件发生的可能性相同,那么称这个随机试验为古典型随机试验,其概率模型称为古典概型.

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象.它的一些概念具有直观、容易理解的特点,并有着广泛的应用.下面讨论古典概型的计算公式.

设样本空间 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两不相容的,于是

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P(\{(e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}),\end{aligned}$$

所以,$P(\{e_i\})=\frac{1}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$.

设事件 A 包含 k 个样本点数,$A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}(1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n)$,则有

$$P(A)=P(\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\})=P(\{e_{i_1}\})+P(\{e_{i_2}\})+\cdots+P(\{e_{i_k}\})=\frac{k}{n}.$$

即

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的样本点数 }k}{\text{样本空间 }S\text{ 包含的样本点数 }n},\tag{1-1}$$

式(1-1)即为古典概型中事件 A 的计算公式.

例 5　抛掷一枚骰子两次,求出现的点数之和为 7 的概率.

解 以 A 表示事件"出现的点数之和为 7". 考虑第一节中随机试验 E_2 的样本空间 $S_2=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots(6,6)\}$,样本空间包含的样本点数 $n=36$;而 $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,事件 A 包含的样本点数 $k=6$.

样本空间 S_2 包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同,故由式(1-1)得所求概率为:$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

若本题考虑第一节中随机试验 E_3 的样本空间 $S_3=\{2,3,\cdots,12\}$,则由于各个基本事件的可能性不相同,就不能利用式(1-1)来计算所求概率. 因而对本题来说,考虑样本空间 S_2 才能顺利计算有关事件的概率.

当样本空间的元素较多时,一般不再将 S 中的元素一一列出,而只需分别求出样本空间 S 中和事件 A 中包含的样本点数,再由式(1-1)计算事件 A 的概率.

例 6 某种产品共 30 件,内含正品 23 件,次品 7 件,从中任取 5 件. 试求被取的 5 件中恰有 2 件是次品的概率.

解 以 A 表示事件"被取的 5 件中恰有 2 件是次品". 从 30 件产品中任取 5 件(这里是指不放回抽样),所有可能取法有 $\binom{30}{5}$ 种,每一种取法为一个基本事件,显然样本空间中仅包含有限个元素,$n=\binom{30}{5}$,由对称性知每个基本事件发生的可能性相同,因而可以用式(1-1)来计算事件的概率.

又因从 7 件次品中取 2 件,所有可能取法有 $\binom{7}{2}$ 种,从 23 件正品中取 3 件的所有可能取法有 $\binom{23}{3}$ 种,由乘法原理知,事件 A 包含的样本点数 $k=\binom{7}{2}\binom{23}{3}$. 所以所求概率

$$P(A)=\binom{7}{2}\binom{23}{3}\Big/\binom{30}{5}=0.261\ 0.$$

本例的一般情形为:某种产品共 N 件,内含次品 M 件,"从中任取的 n 件产品中恰有 $m(m\leqslant M)$ 件次品(记为事件 A)"的概率为

$$P(A)=\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}\Big/\binom{N}{n}, \tag{1-2}$$

从例 6 推广得到的式(1-2),称为超几何分布的概率公式.

例 7 设袋中有 3 只白球,2 只红球,现按以下两种取法从袋中取 2 只球:(1) 有放回抽样;(2) 无放回抽样. 求"取到的两只球都是白球"的概率.

解 以 A 表示事件"取到的两只球都是白球". 从 5 只球中任取 2 只,每一种取法是一基本事件. 易知,这是古典概型问题.

(1) 在有放回抽样情形下,从 5 只球中任取 2 只的所有可能取法有 $5^2=25$ 种,"取到的两只球都是白球"的取法有 $3^2=9$ 种,因此 $P(A)=\frac{9}{25}$.

(2) 在无放回抽样情形下，从 5 只球中任取 2 只的所有可能取法有 $\binom{5}{2}=10$ 种，“取到的两只球都是白球”的取法有 $\binom{3}{2}=3$ 种，所以 $P(A)=\frac{3}{10}$.

例 8　求 n 个人中，至少有 2 个人生日相同的概率为多少？(假设一年有 365 天，$n\leqslant 365$).

解　每个人的生日在一年 365 天的任一天是等可能的，易知，这是古典概型问题.

以 A 表示事件“至少有 2 个人生日相同”，则 $\overline{A}$ 表示事件“这些人生日各不相同”. 一年有 365 天，每个人生日都有 365 种可能，n 个人的生日共有365^n 种可能情况，每一种可能情况为一基本事件. n 个人生日各不相同共有 $365\times364\times\cdots\times(365-n+1)$种可能情况，则 $P(\overline{A})=\frac{365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$.

从而 n 个人中，至少有两个人生日相同的概率：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}.$$

经过计算，关于 $P(A)$随 n 而变化较为精确的数值见表 1 - 2 结果表明，人数越多，至少 2 人生日相同的概率就增长越快. 当 $n\geqslant 23$ 时，其概率就大于 0.5；当 $n=55$ 时，这个概率为 0.990；当 $n=100$ 时，“至少 2 个人生日相同”几乎变为必然的事实.

表 1 - 2　关于生日问题的数据表

n	p	n	p
10	0.117	50	0.970
20	0.411	55	0.990
23	0.507	60	0.994
30	0.706	100	0.999 999 9
40	0.891		

二、几何概型

古典概型是关于有限等可能结果的随机试验的概率模型. 而在实际问题中，若某实验的样本空间有无限个样本点，同时又具有某种等可能性的情形，就不能按古典概型计算概率. 将古典概型推广到有无限多的样本点而又具有某种等可能性的情形，这类问题可借助几何的方法来解决. 下面考虑样本空间为一线段、平面区域或空间立体等的等可能随机试验的概率模型.

定义 5　如果一个随机试验有下列两个特点：(1) 实验的样本空间 S 是 m 维空间中的一有界区域，例如直线上的某条线段、平面上的某个平面区域或空间中的某个空间几何体等；(2) 随机实验相当于向区域内任意地取点，且取到的每一点都是等可能的. 那么称这个随机试验为几何型随机试验，其概率模型称为几何概型.

设事件 A 表示“在区域 S 中随机地取一点，而该点落在 S 中的某个子区域 A 中”(为

方便计，这里仍以 S、A 分别表示样本空间 S 和事件 A 对应的区域)，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

式中，$L(S)$ 和 $L(A)$ 分别表示区域 S 和 A 的测度(一维测度是指线段的长度、二维测度是指平面区域的面积，三维测度是指空间几何体的体积).

例 9 某市一市郊线路公共汽车站每隔 12 分钟来一辆公共汽车，假定车来后每人都能乘上车. 求每位乘客到该停车站后等车时间不超过 4 分钟(事件 A)的概率.

解 乘客可以在 2 辆公共汽车之间的任何时刻到达车站，因此，每位乘客到达车站的时刻可以看成均匀出现在长为 12 分钟的时间区间上的一个随机点，不妨设 $S=[0,12]$，其长度 $L(S)=12-0=12$，则"每位乘客到该停车站后等车时间不超过 4 分钟"的时间区间可以表示为 $A=[8,12]$，其长度 $L(A)=12-8=4$，所以，所求概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

例 10 (会面问题)2 人相约上午 9 点到 10 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时离去. 试求这 2 人能会面的概率. 假定他们在 9 点到 10 点内任一时刻到达会面地点是等可能的.

解 以上午 9 点为坐标原点建立如图 1－2 所示坐标系. x，y 分别表示 2 人到达会面地点的时刻，由题意知 $0\leqslant x\leqslant 60$，$0\leqslant y\leqslant 60$. 所以该实验的样本空间为平面区域 $S=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}$，其面积 $L(S)=60\times 60=3\ 600$.

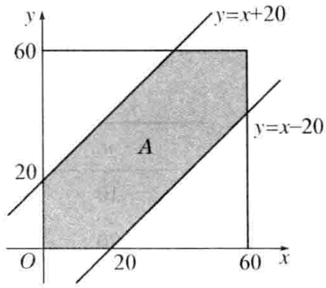

图 1－2 会面问题示意图

以 A 表示事件"2 人能会面"，则事件 A 对应于子区域 $A=\{(x,y)\,|\,|x-y|\leqslant 20,(x,y)\in S\}$，其面积 $L(A)=60\times 60-\frac{1}{2}\times 40\times 40\times 2=2\ 000$. 所以，2 人能会面的概率为：

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{2\ 000}{3\ 600}=\frac{5}{9}.$$

第四节 条件概率与概率公式

一、条件概率

前面讨论只涉及一个事件 A 的概率 $P(A)$ 的计算，而在实际问题中常常需要考虑另一事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率. 首先来看一个例子.

引例 1 抛掷一枚骰子，观察出现的点数. 设事件 A 为"出现的点数为 3"的事件，事件 B 为"出现的点数为奇数"的事件，试求：

(1) 事件 A 发生的概率；

(2) 在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率.

解 由题意知,样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,事件 $A=\{3\}$,事件 $B=\{1,3,5\}$. 显然,这是古典概型问题.

(1) 事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{1}{6}$.

(2) 已知事件 B 已发生,即知试验所有可能结果所成的集合就是 B. B 中共有 3 个元素,其中只有 $3\in A$. 于是,在 B 发生的条件下事件 A 发生的概率(记为 $P(A|B)$)为 $P(A|B)=\frac{1}{3}$.

从引例可以看出,$P(A)\neq P(A|B)$. 这是很容易理解的,因为在求 $P(A|B)$时是限制在 B 已经发生的条件下考虑 A 发生的概率的.

另外,易知,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(AB)=\frac{1}{6}$,$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$,故有 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

对于一般古典概型问题,若仍以 $P(A|B)$记事件 B 已经发生的条件下事件 A 发生的概率,则上述结论仍然成立. 事实上,设试验的样本空间 S 包含的样本点数为 n,B 所包含的基本事件数为 $m(m>0)$,AB 所包含的基本事件个数为 k,即有

$$P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在几何概型中,也有类似结果. 一般地,可以将这个式子作为条件概率的定义.

定义 6 设 A,B 是两个事件,$P(A)>0$,称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-3}$$

为在事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率.

不难验证,条件概率 $P(A|B)$满足概率公理化定义中的 3 个公理条件:

(1) 非负性 $P(A|B)\geqslant 0$;

(2) 规范性 $P(S|B)=1$;

(3) 可列可加性对任意可列个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B).$$

由于条件概率符合上述 3 个条件,因此概率的所有性质对条件概率均适用. 例如

(1) $P(\varnothing|B)=0$;

(2) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$;

(3) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

例 11 将一枚质地均匀的硬币抛掷两次,其样本空间中所有样本点的出现是等可能的. 已知第一次抛出正面,求两次都抛出正面的概率.

解 样本空间 $S=\{(H,T),(H,H),(T,T),(T,H)\}$($H$ 表示出现正面,T 表示出现反面).