新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

周建新 主编

高中数学 6

不等式

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 6

不等式

主　编　　周建新
参　编　　胡宝忠

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程.高中数学 6 不等式/周建新主编.—上海:华东师范大学出版社,2004.3
ISBN 978-7-5617-3767-5

Ⅰ.新... Ⅱ.周... Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021885 号

新专题教程
高中数学 6・不等式

主　　编　周建新
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　徐　金
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960　16 开
印　　张　11.5
字　　数　220 千字
版　　次　2009 年 4 月第四版
印　　次　2009 年 8 月第三次
书　　号　ISBN 978-7-5617-3767-5/G・2074
定　　价　14.00 元

出 版 人　朱杰人

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科，共计50个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威　编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性。

材料典型　丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练。总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果。

版本通用　丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

编排科学　丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

CONTENTS
目 录

高中数学6·不等式

第一篇 知识篇

第二篇 应用篇

◇第一篇　知识篇

专题 1

不等式的性质

【知识梳理】

1. 对任意 $a, b \in \mathbf{R}$,有

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;\ a-b=0 \Leftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

2. 不等式性质:

对称性:$a>b \Leftrightarrow b<a$.

传递性:$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$.

加法单调性:$a>b,\ c \in \mathbf{R} \Rightarrow a+c>b+c$.

乘法单调性:$a>b,\ c>0 \Rightarrow ac>bc$.

$a>b,\ c<0 \Rightarrow ac<bc$.

相加法则:$a>b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

乘法法则:$a>b>0,\ c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

乘方法则:$a>b>0,\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a^n>b^n$.

开方法则:$a>b>0,\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

倒数法则:$a>b,\ ab>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

3. 两数大小比较的基本方法为求差与求商.

思考:

(1) 同向不等式相加,异向不等式相减能否统一起来?

(2) 若 $0>a>b,\ 0>c>d$,则 ac 与 bd 大小如何?

【分类举例】

1. 性质的变形

例 1　有四个命题:(1) 若 $0>a>b$,则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;(2) 若 $a<b<0$,则 $a^2>b^2$;(3) 若 $\dfrac{1}{a}>1$,则 $1>a$;(4) 若 $1<a<2$ 且 $0<b<3$,则 $-2<a-b<2$. 上述命题中真命题有哪些?

解析　运用不等式性质时要注意条件,如倒数法则要求两

思考：

$a<b<0$ 如何推出 $a^2>b^2$，试用几种方法推出.

说明：

x 的取值必须使不等式有意义.

点击：

若直接由 $1\leqslant a-b\leqslant 2$ 与 $13\leqslant 2a-\frac{b}{2}\leqslant 20$ 求得 $7\leqslant a\leqslant 14$，$6\leqslant b\leqslant 12$，然后得 $17\leqslant 3a-\frac{1}{3}b\leqslant 40$，由于 $a=7$ 与 $b=6$ 不能同时成立，$a=14$ 和 $b=12$ 也不能同时成立，因而所得范围 $[17, 40]$ 是不正确的.

数同号；两边同乘一个数，不等号方向是否改变要视此数的正负而定；同向不等式可以相加，异向不等式可以相减.

由不等式性质可得命题(1)、(2)、(4)正确.

例 2 下面不等式中，与 $x<3$ 同解的是(　　).

(A) $x+\frac{1}{x^2-2x+1}<3+\frac{1}{x^2-2x+1}$

(B) $x+\sqrt{x-4}<3+\sqrt{x-4}$

(C) $x(x+4)^2<3(x+4)^2$

(D) $x(x-4)^2<3(x-4)^2$

解析 D正确.

例 3 设命题甲为 $\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3;\end{cases}$

命题乙为 $\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3.\end{cases}$ 那么(　　).

(A) 甲是乙的充分非必要条件

(B) 甲是乙的必要非充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

解析 因为乙命题为 $\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3,\end{cases}$ 两同向不等式相加，得 $2<x+y<4$，两同向不等式相乘，得 $0<xy<3$，显然乙 $\Rightarrow$ 甲.

而甲命题为 $\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3,\end{cases}$ 很容易找出反例，如 $x=2$，$y=1$，满足甲，却不能满足乙. 故应选(B).

例 4 已知 $1\leqslant a-b\leqslant 2$，$13\leqslant 2a-\frac{b}{2}\leqslant 20$，求 $3a-\frac{b}{3}$ 的取值范围.

解析 令 $f_1=a-b$，$f_2=2a-\frac{b}{2}$，从此解出 a 与 b，代入 $3a-\frac{b}{3}$，得出用 f_1、f_2 表示 $3a-\frac{b}{3}$ 的式子，从而求出其范围.

令 $f_1=a-b$，$f_2=2a-\frac{b}{2}$，得

$$a=-\frac{1}{3}f_1+\frac{2}{3}f_2,\ b=\frac{2}{3}f_2-\frac{4}{3}f_1,$$

所以 $3a-\dfrac{b}{3}=\dfrac{16}{9}f_2-\dfrac{5}{9}f_1.$

因为 $1\leqslant f_1\leqslant 2,\ 13\leqslant f_2\leqslant 20,$

所以 $-\dfrac{10}{9}\leqslant -\dfrac{5}{9}f_1\leqslant -\dfrac{5}{9},\ \dfrac{208}{9}\leqslant\dfrac{16}{9}f_2\leqslant\dfrac{320}{9}.$

同向不等式相加,得

$$22\leqslant\frac{16}{9}f_2-\frac{5}{9}f_1\leqslant 35.$$

所以 $3a-\dfrac{b}{3}$ 的范围是$[22,\ 35]$.

2. $a-b>0\Leftrightarrow a>b$ 的应用

例 5 比较 x^2+3 与 $3x$ 的大小,其中 $x\in\mathbf{R}$.

解析 $(x^2+3)-3x=x^2-3x+3=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$$\geqslant\frac{3}{4}>0.$$

所以 $x^2+3>3x.$

作差比较的关键是判别差的正负.

拓展:

判别 x^2-3x+3 的正负也可以用 $\Delta<0$ 来判别.

例 6 设 $a>0,\ b>0,\ n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\neq 1$,试比较 a^n+b^n 与 $a^{n-1}b+ab^{n-1}$ 的大小.

解析 $(a^n+b^n)-(a^{n-1}b+ab^{n-1})$

$=a^{n-1}(a-b)+b^{n-1}(b-a)$

$=(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b).$

1° $a=b$ 时,$a^n+b^n=a^{n-1}b+ab^{n-1}$;

2° $a\neq b$ 时,由乘方性质知 $a^{n-1}-b^{n-1}$ 与 $a-b$ 同号,

所以 $(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)>0,$

$a^n+b^n>a^{n-1}b+ab^{n-1}.$

综上当 $a=b$ 时,$a^n+b^n=a^{n-1}b+ab^{n-1}$;当 $a\neq b$ 时,$a^n+b^n>a^{n-1}b+ab^{n-1}$.

$\dfrac{a}{b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$

例 7 若 $a,\ b\in\mathbf{R}^+$,比较 $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

解析 解法一:因为 $a,\ b\in\mathbf{R}^+$,所以

点击：

作差比较往往需将差进行因式分解，进而判别各因式符号，从而判定大小.

拓展：

在较多情形下要先进行等价变形比较，再得出原来数的大小.

$$\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}$$

$$=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant 0.$$

所以 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

解法二：为了比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小，因为它们都是正数，可以转化为先比较它们的平方的大小，即先比较 $\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\frac{a^2}{b}+2\sqrt{ab}+\frac{b^2}{a}$ 与$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$ 的大小，然后用求差得出$\frac{a^2}{b}+2\sqrt{ab}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b+2\sqrt{ab}$，从而得出$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

例 8 已知 $x>0$，$x\neq 1$，$m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小.

解析 本题需对 x 分类讨论，即讨论 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两种情况.

解法一： $x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$

$$=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}$$

$$=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}$$

$$=(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right).$$

当 $0<x<1$ 时,由 $m>n>0$,知

$$x^m<x^n \text{ 且 } x^{m+n}<1,$$

所以 $$1-\frac{1}{x^{m+n}}<0,$$

故 $$(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0;$$

当 $x>1$ 时,由 $m>n>0$,知

$$x^m>x^n \text{ 且 } x^{m+n}>1,$$

所以 $$1-\frac{1}{x^{m+n}}>0,$$

故 $(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0.$

综上,得 $$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0,$$

即 $$x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}.$$

解法二:$x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的形式完全一致,故可以将其看成函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的两个函数值.从而根据函数单调性求解.

设 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.当 $x\in[1,+\infty)$ 时递增,$x\in(0,1)$ 时递减.

当 $0<x<1$ 时,因为 $m>n>0$,所以 $0<x^m<x^n<1$,所以

$$x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n};$$

当 $x>1$ 时,因为 $m>n>0$,所以 $x^m>x^n>1$,所以

$$x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}.$$

综上,得 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}$.

点击:

函数单调性是解决不等式的有效手段.

思考:

若本题条件不变,试比较 $x^m-\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n-\frac{1}{x^n}$ 的大小.

例 9 已知 $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\beta<\pi$，$a=\cos\alpha+\sin\alpha$，$b=\cos\beta+\sin\beta$，比较 a 与 b 的大小.

解析 解法一：

$$a-b=(\cos\alpha-\cos\beta)+(\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\qquad (*)$$

因为 $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\beta<\pi$，

所以 $\frac{\beta-\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$，$\frac{\alpha+\beta}{2}\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

所以 $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}>0$，$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$，

所以(*)式 >0，即 $a>b$.

解法二：$a=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

$$b=\cos\beta+\sin\beta=\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right).$$

因为 $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\beta<\pi$，所以

$$\pi<\alpha+\frac{\pi}{4}<\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}.$$

因为 $y=\sin x$，$x\in\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$ 是减函数，所以 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$，即 $a>b$.

例 10 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，$M=x^2+y^2+1$，$N=x+y+xy$，比较 M 与 N 的大小.

点击：
配方是关键.

解析 解法一：

$$M-N=x^2+y^2+1-x-y-xy$$
$$=\frac{1}{2}[2x^2+2y^2-2x-2y-2xy]+1$$
$$=\frac{1}{2}[(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2-2]+1$$

思考：
等号何时成立.

$$=\frac{1}{2}[(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2]\geqslant 0.$$

所以 $M\geqslant N$.

解法二：$M-N=x^2+y^2+1-x-y-xy$

$$=x^2-(y+1)x+y^2-y+1.$$

上式可看作是关于 x 的二次三项式，

所以 $\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y+1)$

$$=-3y^2+6y-3$$

$$=-3(y-1)^2\leqslant 0.$$

所以 $M-N\geqslant 0$，即 $M\geqslant N$.

点击：

当出现两个或两个以上字母的代数式比较大小时，有时可以用根的判别式法来判别差与0的大小.

例 11 已知：$a>0$，$a\neq 1$，$x_1>0$，$x_2>0$，比较：$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)$ 与 $\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$ 的大小.

解析 解法一：$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)-\log_a\frac{x_1+x_2}{2}=\log_a\sqrt{x_1x_2}-\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$.

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，即 $\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$，

所以(1) 当 $a>1$ 时，$\log_a\sqrt{x_1x_2}-\log_a\frac{x_1+x_2}{2}\leqslant 0$，即

$$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\leqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}.$$

(2) 当 $0<a<1$ 时，$\log_a\sqrt{x_1x_2}-\log_a\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant 0$，即

$$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\geqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}.$$

综上，当 $a>1$ 时，$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\leqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$；

当 $1>a>0$ 时，$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\geqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$.

解法二：因为 $\log_a x_1$，$\log_a x_2$，$\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$ 形式一致，所以可

将它们看作是 $y=\log_a x$ 的三个函数值，然后根据 $a>1$，$1>a>0$ 时 函数 $y=\log_a x$ 的凹凸性来解决.

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是上凸函数，有$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，即$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\leqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$；

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是下凹函数，有$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，即

$$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\geqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}.$$

拓展：

函数 $y=f(x)$ 图象上凸时，有性质 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. 图象下凹时有性质 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

3. $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b(a,\ b\in\mathbf{R}^+)$的应用

例 12 比较 14^{16} 与 16^{14} 的大小.

分析 本题通过两个数的商与 1 比较确定两个数的大小.

解 由于 $\frac{14^{16}}{16^{14}}=\frac{2^{16}\cdot 7^{16}}{2^{56}}=\frac{7^{16}}{2^{40}}=\left(\frac{49}{32}\right)^8>1$，故

$$14^{16}>16^{14}.$$

注：

指数型的数进行大小比较，可以考虑用求商比较. 当底数是合数时，先将底数进行质因数分解.

例 13 已知：a，b，c 为三个正实数，比较 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}$ 与 $a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}$的大小.

解析
$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}\cdot b^{a+c}\cdot c^{a+b}}=a^{2a-b-c}b^{2b-a-c}c^{2c-a-b}$$

$$=a^{a-b}\cdot a^{a-c}\cdot b^{b-a}\cdot b^{b-c}\cdot c^{c-a}\cdot c^{c-b}$$

$$=\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}\cdot\frac{b^{b-c}}{c^{b-c}}\cdot\frac{c^{c-a}}{a^{c-a}}.\qquad(*)$$

若 $a\geqslant b$，则 $a-b\geqslant 0$，$a^{a-b}\geqslant b^{a-b}$，$\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}\geqslant 1$；

若 $a\leqslant b$，则$\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\frac{b^{b-a}}{a^{b-a}}\geqslant 1$.

故 $\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}\geqslant 1$.

同理 $\frac{b^{b-c}}{c^{b-c}}\geqslant 1$，$\frac{c^{c-a}}{a^{c-a}}\geqslant 1$，从而（$*$）式$\geqslant 1$.

求商比较是两数比较大小的重要方法.

若 $a<0$，$b<0$，则可以转化为先比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小来进行.

所以 $\dfrac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}\cdot b^{a+c}\cdot c^{a+b}}\geqslant 1$，即

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}.$$

例 14 若 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$，$x=\left|\log_a\left[1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{a-b}\right]\right|$，$y=\left|\log_a\left[1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{a-b}\right]\right|$，试比较 x、y 的大小.

解析 若用求差比较，应先去掉绝对值符号，为此应先考虑 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{a-b}$ 的大小.

若用求商比较，可以不去绝对值符号，利用换底公式即可进行.

解法一：当 $a=b>0$ 时，$1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{a-b}=0$，此时 x 无意义.

当 $a>b>0$ 时，

$$0<\frac{b}{a}<1,\ a-b>0.$$

由指数函数性质，得

$$0<\left(\frac{b}{a}\right)^{a-b}<1.$$

当 $b>a>0$ 时，

$$\frac{b}{a}>1,\ a-b<0.$$

由指数函数性质，得

$$0<\left(\frac{b}{a}\right)^{a-b}<1.$$

设 $P=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{a-b}$，当 $a\neq b$ 时，总有 $0<P<1$.

当 $a>1$ 时，

$$\begin{aligned}x-y&=|\log_a(1-P)|-|\log_a(1+P)|\\&=-\log_a(1-P)-\log_a(1+P)\\&=-\log_a(1-P^2)>0;\end{aligned}$$

当 $0<a<1$ 时，

$$x-y=|\log_a(1-P)|-|\log_a(1+P)|$$

点击：

及时采用换元可以简化代数式，便于观察.

由对数函数性质判断正负.

由对数函数性质判断正负.

点击：

运用对数换底公式.

点击：

其实质是转化为 $1+P$ 与 $\frac{1}{1-P}$ 的大小比较.

点评：

求差比较是将差与0比较，求商比较是将商与1比较. 但是 $\frac{a}{b}>1$ 不一定 $a>b$，要视 b 正负而定. 一般说，差式易分解. 配方时，可与0比大小；商式易约分化简时，可与1比较.

$$=\log_a(1-P)+\log_a(1+P)$$

$$=\log_a(1-P^2)>0.$$

故当 $a\neq b$ 时，总有 $x>y$.

解法二：由解法一知：$0<P<1$ $\left(其中 P=\left(\frac{b}{a}\right)^{a-b}\right)$.

$$\frac{x}{y}=\frac{|\log_a(1-P)|}{|\log_a(1+P)|}=\left|\frac{\log_a(1-P)}{\log_a(1+P)}\right|$$

$$=|\log_{(1+P)}(1-P)|.$$

因为 $0<P<1$，所以

$$0<1-P<1,\ 1+P>1.$$

所以 $\log_{(1+P)}(1-P)<0$.

因此 $\frac{x}{y}=-\log_{(1+P)}(1-P)$

$$=\log_{(1+P)}\frac{1}{1-P}$$

$$=\log_{(1+P)}\frac{1+P}{1-P^2}$$

$$=\log_{(1+P)}(1+P)-\log_{(1+P)}(1-P^2)$$

$$=1-\log_{(1+P)}(1-P^2).$$

由于 $1+P>1$，$0<1-P^2<1$，得

$$\log_{(1+P)}(1-P^2)<0.$$

故 $\frac{x}{y}>1$，即 $x>y$.

例 15 若 $x_1,\ x_2\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，比较 $\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)$ 与 $\tan\frac{x_1+x_2}{2}$ 的大小.

解析 解法一：

$$\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)-\tan\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$=\frac{\sin(x_1+x_2)}{2\cos x_1\cdot\cos x_2}-\frac{\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}$$

$$= \sin(x_1 + x_2)\left[\frac{1}{2\cos x_1 \cdot \cos x_2} - \frac{1}{1+\cos(x_1+x_2)}\right].$$

因为 x_1、x_2 是锐角，所以

$$\begin{aligned}&1+\cos(x_1+x_2)\\ \geqslant &\cos(x_1-x_2)+\cos(x_1+x_2)\\ = &2\cos x_1 \cdot \cos x_2 > 0.\end{aligned}$$

所以 $$\frac{1}{1+\cos(x_1+x_2)} \leqslant \frac{1}{\cos(x_1-x_2)+\cos(x_1+x_2)} = \frac{1}{2\cos x_1 \cdot \cos x_2},$$

即 $$\frac{1}{2\cos x_1 \cdot \cos x_2} - \frac{1}{1+\cos(x_1+x_2)} \geqslant 0.$$

而 $\sin(x_1+x_2) > 0$，故

$$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) \geqslant \tan\frac{x_1+x_2}{2}.$$

当且仅当 $\cos(x_1 - x_2) = 1$，即 $x_1 = x_2$ 时，等号成立.

解法二：$$\frac{\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2)}{\tan\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sin(x_1+x_2)}{2\cos x_1 \cdot \cos x_2}}{\frac{\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}}$$

$$= \frac{1+\cos(x_1+x_2)}{2\cos x_1 \cdot \cos x_2}$$

$$= \frac{1+\cos(x_1+x_2)}{\cos(x_1-x_2)+\cos(x_1+x_2)} \geqslant 1.$$

而 $\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) > 0$，$\tan\frac{x_1+x_2}{2} > 0$，

因此 $$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) \geqslant \tan\frac{x_1+x_2}{2}.$$

解法三：可据 $y = \tan x$ 的函数图象在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的凹凸性进行比较，解略.