



普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

上册

第二版

张香云 王家军◎主编

 中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

上册

第二版

张香云 王家军 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 上册 / 张香云, 王家军主编. —2 版. —
北京: 中国农业出版社, 2013. 8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等
农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17990-5

I. ①高… II. ①张… ②王… III. ①高等数学-高
等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 146032 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

2013 年 8 月第 2 版

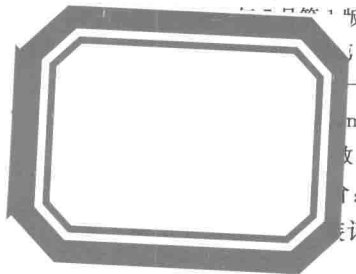
2 版北京第 1 次印刷

mm 1/16 印张: 18.75

数: 328 千字

价: 32.00 元

装订错误, 请向出版社发行部调换)



内容简介

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材。由于我国农林院校现已大多成为多科性大学，本教材在坚持体现农林特色的基础上，以适应普通经管类本科专业教学为主，兼顾工科类本科专业教学的基本要求而编写。可满足普通高校 96~160 学时等不同层次的教学需要，为组织分类(或分层次)教学提供方便。

本教材分为上、下两册。上册内容包括：函数与极限、连续性、导数与微分、微分中值定理及导数应用、不定积分、定积分和微分方程等。

为适应中学课改实际和开展科学素质教育的需要，书末以附录形式给出了常用的中学数学公式、极坐标与复数简介、微积分简史等材料。为帮助学生学习和使用，分类积分表及本册各章节练习题的答案或提示(思考或证明题除外)也放在附录之中。

与本册教材相配套，我们编写有《高等数学学习指导与习题解析》(上册)。

第二版编写人员名单

主 编 张香云 王家军
副主编 宋红凤 张居丽
参 编 叶彩儿 丁素芬 李小亮
刘 静 贺志民 黄 敏

第一版编写人员名单

主 编 王家军 张香云 邬良春 徐光辉

副主编 张香云 邬良春 徐光辉

编 委 胡 琴 宋红凤 张居丽

参 审 胡志贤 黄 敏



第二版前言

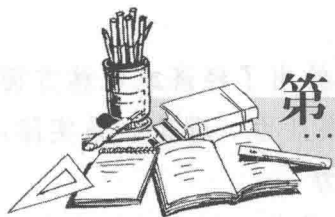
□□□□□□□

本教材是由王家军主编的全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》修订而成。在使用四年并广泛征求意见的基础上，主要做了如下改动：

1. 更加贴近中学数学课改实际，进一步增加了与中学数学相衔接的过渡内容(比如函数部分和附录材料)。
 2. 适当降低了有关章节的习题难度，并增加了基础练习题的分量。
 3. 对原版中的错漏进行了订正，重写了某些叙述文字。
- 书中错误或不足之处在所难免，敬请读者或同行批评指正。

编 者

2013 年 5 月于杭州



第一版前言

□□□□□□□□

随着高等教育大众化的深入发展，特别是高校相继实行大类招生并组织教学的形势下，提高高等数学的教学质量和大学生的科学素养，已经成为人们关注的焦点。作为全国高等农林院校“十一五”规划教材，本教材以教育部高教司《经济数学基础》及《工科类本科数学基础课程的数学基本要求》为指导，为方便工、管兼用或实行分类（分层次）教学而编写。

在内容安排方面，我们力图体现如下特点：

1. 充分关注中学实施新课程标准的课改实际，注重与中学数学知识相衔接。考虑到中学文科学生的学习情况，书中增加了极限部分的内容和例题；将高等数学经常用到而中学强调不足的相关知识列在附录之中，为学生提供学习上的参考与帮助。

2. 方便组织教学，内容系统简练，叙述循序渐进，例题典范全面。基本概念尽量由实例引入，定理公式则注重由果索因。既降低难度，又使学生能够领略数学发现与发展的过程，有利于培养创新能力。

3. 突出学习指导，便于学生自学。行文尽量通俗易懂，公式使用交代了注意事项。作为对重要内容的诠释、强调、引申和方法指导，分别安排了说明、注意、附注和评注；对前后关联性较强的内容，如函数极限与数列极限、多元微积分和一元微积分的相关知识，则按照“对照理解，突出区别”的原则加强了联系与沟通。这既是培养学生认知能力、促进理解和掌握的需要，也是我们多年建设精品课程、坚持“改进教学方法与进行学习指导相结合”教改实践的

成果体现.

4. 强调微积分理论与方法的应用(特别给出了经济或农林方面的例子), 展现微积分理论的历史真实与现实活力. 理论联系实际, 满足专业需要, 开阔学生视野, 培养应用能力.

5. 每节内容之后, 都安排有分类习题: 思考题侧重对概念和定理的理解; 练习题满足对基本概念和解题方法的训练; 提高题(以虚线划分)和总练习题则为学有余力者(或进行总复习)提供进一步的练习题材.

此外, 为体现数学文化教育的思想, 附录中还安排了微积分简史, 以期培养学生学习数学、热爱数学的兴趣, 提高其科学素养.

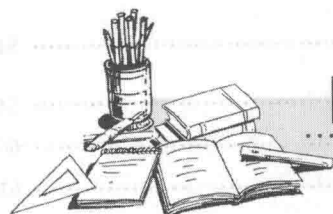
必须指出, 根据所在学校的课程教学大纲去选择材料和组织教学, 是任课老师的义务和权利. 本书在内容编排方面所做的安排, 仅供参考.

本教材由浙江农林大学与南京林业大学联合编写. 在使用多年的讲稿基础上, 结合参编者的教学经验和教改成果修订而成. 编写中受到了中国农业出版社、两所学校相关部门领导、教研室同仁的大力支持, 在此表示衷心感谢! 对所参照的众多同类书籍的作者, 谨表示诚挚的敬意!

尽管我们做出了较大努力, 但限于水平, 错误或不足之处在所难免, 敬请读者或同行批评指正.

编者

2009年5月



目 录

□□□□□□

第二版前言

第一版前言

第一章 函数与极限 1

第1节 函数 1

习题 1-1 7

第2节 初等函数 8

习题 1-2 12

第3节 数列极限 13

习题 1-3 20

第4节 函数极限 21

习题 1-4 29

第5节 两个重要极限公式 31

习题 1-5 33

第6节 无穷小与无穷大 34

习题 1-6 39

总练习一 40

第二章 函数连续性 43

第1节 函数连续的概念 43

习题 2-1 46

第2节 连续函数的性质 47

习题 2-2 49

第3节 闭区间上连续函数的性质 49

习题 2-3 51

总练习二 51

第三章 导数与微分	54
第1节 导数概念	54
习题 3-1	60
第2节 函数的求导法则	61
习题 3-2	69
第3节 高阶导数	71
习题 3-3	74
第4节 隐函数及参数方程求导法	75
习题 3-4	80
第5节 函数的微分	81
习题 3-5	88
总练习三	90
第四章 微分中值定理及导数应用	94
第1节 微分中值定理	94
习题 4-1	99
第2节 洛必达法则	101
习题 4-2	107
第3节 泰勒公式	108
习题 4-3	112
第4节 函数的单调性与凹凸性	113
习题 4-4	118
第5节 函数的极值与最值	119
习题 4-5	125
第6节 函数简捷作图法	126
习题 4-6	128
* 第7节 曲率	129
习题 4-7	133
总练习四	134
第五章 不定积分	138
第1节 不定积分的概念与性质	138
习题 5-1	143

第2节 换元积分法	144
习题5-2	152
第3节 分部积分法	154
习题5-3	158
第4节 有理函数和有理化积分法	158
习题5-4	165
*第5节 积分表的使用	165
习题5-5	166
总练习五	167
第六章 定积分及其应用	170
第1节 定积分的概念和性质	170
习题6-1	178
第2节 微积分基本公式	178
习题6-2	182
第3节 定积分的换元积分与分部积分法	183
习题6-3	188
第4节 定积分应用	189
习题6-4	199
第5节 反常积分	201
习题6-5	205
总练习六	205
第七章 微分方程	208
第1节 微分方程基本概念	208
习题7-1	211
第2节 可分离变量的微分方程	211
习题7-2	214
第3节 齐次微分方程	214
习题7-3	217
第4节 一阶线性微分方程	217
习题7-4	221
第5节 可降阶的三种高阶微分方程	221
习题7-5	225

第 6 节 二阶常系数齐次线性方程	225
习题 7-6	230
第 7 节 二阶常系数非齐次线性方程	231
习题 7-7	236
总练习七	237
附录 I 微积分简史	240
附录 II 常用中学数学公式	245
附录 III 极坐标简介	248
附录 IV 复数简介	250
附录 V 分类积分表	251
附录 VI 练习题答案与提示	261
主要参考文献	284

第一章 函数与极限

高等数学的主要研究对象是函数. 本章作为全书的知识基础, 将在中学数学的基础上复习或深化函数的概念、给出函数极限及其性质的讨论.

第 1 节 函 数

本节是对中学函数概念的复习和深化.

一、集合与区间

1. 集合及其符号表示

集合是数学的一个原始概念, 即指具有某种相同属性的对象的全体. 在这里, 对象称为集合的元素. 本教材以大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合, 以小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素. 如“ a 是集合 A 的元素”, 记为 $a \in A$ (读作 a 属于 A); 而将“ a 不是集合 A 的元素”记为 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A).

集合的元素可以是具体的, 也可以是抽象的. 如 $A = \{\text{某学院 09 级新生}\}$, 实数集合 $B = \{x | x^2 > 1\}$ 等.

本教材用到的集合主要是实数集. 如果没有特别声明, 以后提到的数都是实数; 全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

符号“ $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq, \not\subset$ ”分别表示集合之间的大小与从属关系, 如

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

按照元素的多少, 集合可简单地分为空集 $\emptyset$ (不含任何元素)、有限集 (仅含有限个元素) 和无限集 (含有无穷多个元素) 3 类.

2. 区间

数集最常用的表示方式是区间. 包括以下 4 种有限区间 (图 1-1):

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$; 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;

半开区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 或 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.

和 5 种无限区间:

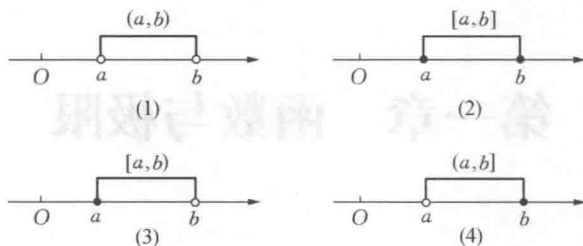


图 1-1

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}, [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.$$

注意 这里的 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 而“ $-\infty$ ”或“ $+\infty$ ”仅仅是表示无限的一种记号, 而不是确定的结果(或数), 因此不能进行(像实数那样的)运算.

3. 邻域

一种特定的开区间形式——邻域是以后常用的.

设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$, 数集 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\},$$

其中, 点 x_0 叫作邻域 $U(x_0, \delta)$ 的中心, δ 叫作该邻域的半径.

在实际使用(如后面讨论函数极限的讨论)中, 往往需要去掉中心点 x_0 的邻域形式, 即所谓点 x_0 的去心 δ 邻域(图 1-2), 记为

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

考虑到上述 δ 取值大小的任意性, 点 x_0 的邻域或去心邻域也常简记为 $U(x_0)$ 或 $\dot{U}(x_0)$.

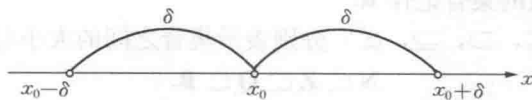


图 1-2

二、函数概念

自然现象或事物间的变化往往表现为数与量的形式, 如温度、长度、面积等. 由此产生了函数的概念.

定义 1 设 x, y 是两个变量, $D \subset \mathbf{R}$ 是非空数集. 如果存在确定的对应法

则 f , 使对任意的 $x \in D$, 都有唯一确定的值 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的一个函数. 记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 D 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量; 对每个给定的 $x_0 \in D, y_0 = f(x_0) \in \mathbf{R}$ 称为 x_0 的函数值; 全体函数值的集合

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

需要指出, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示由自变量 x 确定因变量 y 的对应法则(亦称函数关系), 其核心是由 x 到 y 的单值性; 而后者表示自变量 x 所对应的具体函数值. 但为了叙述方便, 通常仍沿用记号 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 来表示函数.

注意 函数定义实质上强调了两个要素: 确定的定义域和明确的单值性对应法则. 这也是确定函数或进行函数比较的关键.

如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 则称这两个函数相同. 例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2 x + \cos^2 x$ 是相同的函数, 而 $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$ 不相同.

下面是几个重要的函数例子:

例 1 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$ (图 1-3).

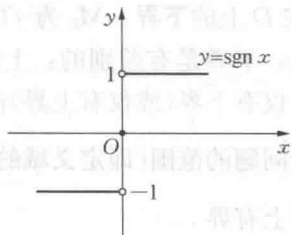


图 1-3

例 2 取整函数 $y = [x]$. 即对任意实数 x , 不超过 x 的最大整数简称为 x 的取整函数(图 1-4). 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = \mathbf{Z}$ (整数集).

例 3 绝对值函数 $y = |x|$. 即

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

称为绝对值函数(图 1-5). 其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = [0, +\infty)$.

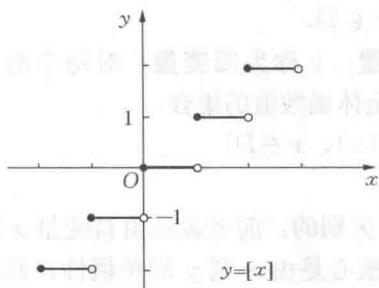


图 1-4

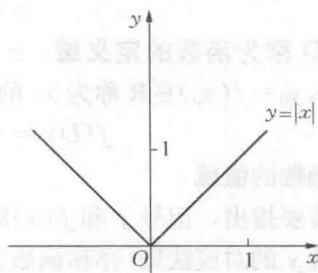


图 1-5

三、函数的几种特性

函数的下面几种性质是十分重要的.

1. 有界性

作为对函数值域的整体性描述, 有

定义 2 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$. 如果存在正数 M , 使对任意的 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是在 D 上的有界函数(简称有界); 如果这样的 M 不存在, 就称 $f(x)$ 是在 D 上的无界函数(简称无界).

如 $y = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界. 事实上: 任给 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $|\sin x| \leq 1$ (即 $M=1$).

注意 有界函数的等价定义是: 如果存在常数 M_1 和 M_2 , 对于所有的 $x \in D$, 都有 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

这里, 称 M_1 为 $f(x)$ 在 D 上的下界, M_2 为 $f(x)$ 在 D 上的上界.

必须指出, 有界与有上、下界是有差别的: 上界或下界仅是对 $f(x)$ 取值变化的单向限制. 特别是, 仅有下界(或仅有上界)的函数是无界函数.

函数界的概念与所讨论问题的范围(即定义域的大小)有关, 例如 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2]$ 上无界, 但在 $[1, 2]$ 上有界.

2. 单调性

定义 3 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$. 如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加; 反之, 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

说明 这里实际上定义的是严格单调性, 简称单调性. 以后不再专门说明, 并将单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 而且应该注意, 单调性