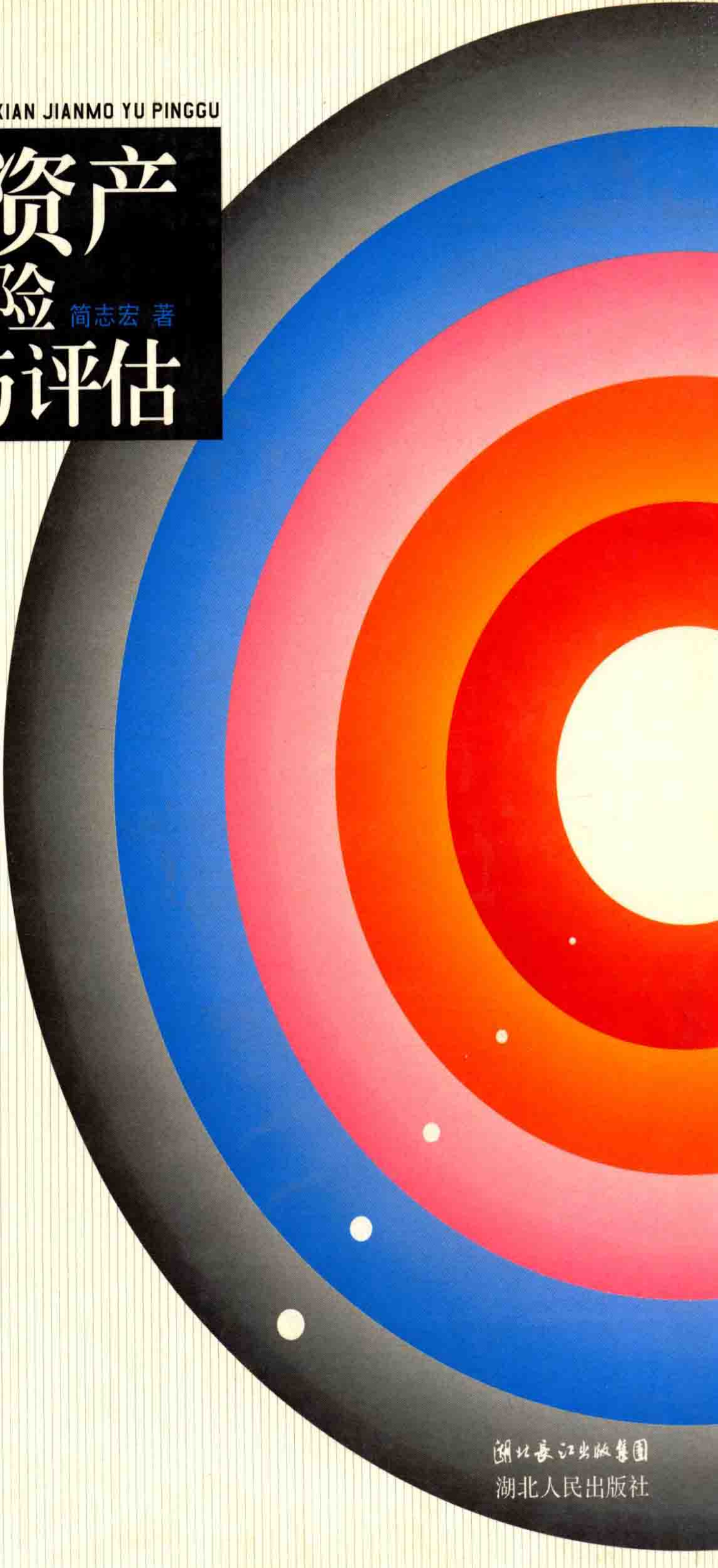
JINRONG ZICHAN WEIYUE FENGXIAN JIANMO YU PINGGU

金融资产违约风险建模与评估

简志宏 著



湖北长江出版集团
湖北人民出版社

NRONG ZICHAN WEIYUE FENGXIAN JIANMO YU PINGGU

金融资产违约风险建模与评估

简志宏 著

国家自然科学基金资助项目
“非完全信息下违约风险建模与评估”
（NO.70301003）研究成果

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

鄂新登字 01 号
图书在版编目(CIP)数据

金融资产违约风险建模与评估/简志宏著.
武汉:湖北人民出版社,2006.8
ISBN 7－216－04784－2

Ⅰ.金…
Ⅱ.简…
Ⅲ.金融公司—资产管理—风险分析
Ⅳ.F830.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 096512 号

金融资产违约风险建模与评估　　简志宏 著

出版发行:	湖北长江出版集团 湖北人民出版社	地址:武汉市雄楚大街 268 号 邮编:430070

印刷:华中师范大学印刷厂	经销:湖北省新华书店
开本:787 毫米×1092 毫米 1/16	印张:16
字数:286 千字	插页:2
版次:2006 年 8 月第 1 版	印次:2006 年 8 月第 1 次印刷
书号:ISBN 7－216－04784－2/F·851	定价:35.00 元

本社网址:http://www.hbpp.com.cn

目 录

绪 论

0.1 引论

随着现代社会经济的日趋金融证券化，金融资产占社会总资产的比重不断提高。由于金融资产的虚拟性，金融资产价格除受实质经济态势的基础性影响，投资者或消费者对金融资产收益的预期及投资者之间的博弈行为对金融资产价格也产生投机性影响，从而进一步加剧了金融资产价格的波动性；同时，金融机构为实现资产转换（Asset Transforming）、风险聚合和分担(Risk Pooling and Sharing)及信息处理(Information Processing)等多种经济功能，经济主体(Agent)变现金融资产的流动性需求的不确定性也大大增加。但更主要的是，伴随经济证券化和金融自由化，金融证券的交易行为已超越时间和空间的限制将其触角向社会经济的每个角落延伸，因而交易主体受各种因素的影响不能兑现交易承诺的可能性也随之增大，金融经济的信用关系日趋复杂。对金融机构而言，金融风险包括资产组合价格异常波动产生的市场风险（Market Risk）、金融机构不能应付非可料变现需求的流动性风险（Liquidity Risk）及代理人无力兑现交易承诺的违约风险（Default Risk）等。金融风险管理是保险公司、商业银行、投资银行等金融机构主要的基础性管理活动。由于金融衍生工具的不断创新，金融风险管理的能力和水平成了金融机构在有效地监控风险的基础上提高收益能力和赢利水平的决定性因素，因为金融衍生工具及定价技术的发展已为金融资产收益和风险的不同组合和搭配提供了可能性。在金融风险管理中，对于市场风险（如利率风险）可通过建立风险对冲头寸来回避，对流动性风险可通过建立最优的流动性储备水平来防范；对违约风险，如商业银行信贷业务、金融互换业务和公司债券投资的违约风险，由于引发违约的事件、违约时资产的市场价值及其相互关系的复杂性，使得管理和控制违约风险较为困难，一般只能通过和信用衍生金融工具的组合来分散或对风险的合理定价以补偿所承担的违约风险。

1999 年底，美国《金融服务现代化法案》的正式生效，标志着主宰美国金融业半个多世纪的格拉斯—斯蒂格尔法案（Glass-Steagall Act）的废止，银行、证券和保险的分业管理逐步向混业经营过渡，商业银行将从传统的主要从事存贷款业务的狭义银行（Narrow Bank）向可从事存贷款、证券承销与自营等多种

业务的广义银行（Universal Bank）过渡。金融自由化和放松管制（Liberalization and Deregulation）在某种意义上极大地提高了金融运行的效率，但同时潜伏巨大的风险和危机。中国加入 WTO 后，金融业放松管制、实现自由化与国际接轨将不可避免。面对国际金融公司和跨国商业银行的强大竞争压力，中国的金融业除了从业人员素质有待提高和金融业的物质技术基础相对落后外，金融风险的管理能力和水平也是制约我国金融业竞争力提高的主要因素之一；随着金融国际业务的大量增加，利率风险和违约风险在金融风险中所占权重的提高，对于利率风险的度量、违约风险的估计和具有违约风险债务的合理定价已成了金融机构在从事金融创新业务中必须解决的理论和实务问题。因此，系统地研究利率风险和违约风险建模的理论和方法，以运用于各种违约性金融资产和信用衍生金融工具的定价和违约风险的管理和控制，无疑具有重要的理论意义和现实意义。

0.2 本书基本框架和主要工作

由于在金融资产定价和违约风险建模中都涉及到对随机的不确定性问题，本书第一章首先归纳总结了金融分析中常用的随机方法，包括鞅、布朗运动、点过程、随机积分及概率测度变换、带跳扩散过程等，这些数学方法和分析工具在现代金融的理论研究中有较为广泛的运用。第 2 章给出利率期限结构模型相关的基本概念，在讨论利率即期模型和远期模型的基础上给出了远期利率模型具有马尔可夫性的一个条件和广义随机久期的利率风险度量方法，还讨论了在随机利率情形下资产定价的远期鞅方法。第 3 章评述了目前文献中违约风险建模的一般方法，分别对违约风险的结构化建模方法、风险债务评估的博弈模型、简约化建模方法、违约机制的混合模型及资产组合违约相关性建模的Copula方法进行了分析和讨论。进一步，本书在以下方面开展研究并得出了相应的理论分析结果。

0.2.1 对具有目标杠杆比率的公司违约风险的研究

第 4 章在跳扩散过程下发展了具有目标杠杆比率的违约风险模型，研究了目标杠杆比率和公司价值过程的跳跃强度对公司违约的影响，定义公司违约边界为公司历史价值对数的加权平均，假设公司可以连续地调整其债务水平以适应公司价值的变化，因而存在公司财务决策时的目标杠杆比率；同时,在公司价值动态过程中引入跳跃的一般化模型解决了标准结构化模型和约化模型在长期信用利差预测时不一致的问题，在短期信用利差预测时得到了与经验实证研究

相一致的信用利差非零的结果。数值模拟表明信用利差对目标杠杆比率和跳过程的强度具有高度敏感性，在一般化模型中信用利差趋势曲线极不规则。

0.2.2 对内生性违约与风险债务的研究

如果公司出现财务危机时股东可通过资本注入弥补经营损失和清偿债务，股东可推迟关闭公司和债务违约，从而公司的破产和债务违约由股东权益最大化内生决定。由于公司破产和债务违约的不可逆性和不确定性，可以把公司关闭和破产理解为股东持有的期权，第 5 章运用实物期权（Real Option）估价方法评估公司股票和债务的价值，在考虑公司所得税的情形下分析了纯股票融资公司关闭和杠杆公司破产和违约的决策及破产后债权人选择破产清算或破产营运的决策，得到了公司破产和债务违约的临界值，发现杠杆公司的破产决策与公司所得税无关，以及对于较高债务水平的杠杆公司比纯股票融资公司提早关闭或破产。

0.2.3 对策略性违约与债务重组的研究

第 6 章在考虑了公司所得税的情形下研究公司的策略性违约和债务重组问题，分析表明对于标准的债务合同，股东权益最大化的违约时间通常与公司价值最大化的违约时间不一致；如果不允许债务重组或债务妥协，破产清算一般将导致公司价值损失。公司所得税虽使得公司的价值与资本结构有关，但对股东的破产决策没有影响；同时存在公司债务水平的临界值，在这一债务水平上可以忽略股东的道德风险（Moral Hazard）问题，股东权益价值最大化与公司价值最大化的破产决策是一致的；对于高于此临界值的杠杆公司在破产清算前存在股东策略性违约的临界值，当公司产出价格达到策略性违约的阈值时，股东（债务人）对债务偿还随公司的产出价格的下降而减少；对于低于此临界值的杠杆公司在破产清算前没有债务重组，但若债权人承诺在破产清算时公司剩余资产价值分配偏离绝对优先权原则，则能诱使股东有效地关闭公司；因此较高杠杆或较低杠杆公司的债务妥协具有重要的经济意义，它可以避免杠杆公司无效地提早或延迟破产清算。

0.2.4 对具有多重违约风险债务的研究

第 7 章在远期利率期限结构的模型框架下，在期限结构模型中引入系统性的跳跃风险，假设若经济中其他公司违约则导致承诺的债务支付减小以及公司

违约事件服从独立同分布的泊松过程，研究了公司违约相互影响时可违约债券的定价，得到了多重可违约债券的定价公式。一般地，风险中性的违约强度不等于经验的或实际的违约强度，本章证明了给定可违约债券，如果存在违约风险分散化的证券投资组合完全复制可违约债券的支付，则多重违约强度在等价鞅测度变换下具有不变性。这一结果的理论意义在于，如果违约风险是可以分散的，则实际的违约强度等于风险中性违约强度且违约的风险价格为零，因而可直接运用经验或实际估计到的违约强度和违约损失率去评估可违约债券和对其他信用衍生资产定价。

0.2.5 对信息非完全时的信用利差期限结构和风险债券定价的研究

第 8 章运用结构化建模方法推导了信息不完全时信用利差的期限结构公式，并分析了信息成本对信用利差期限结构的影响，发现了当债权人的信息成本增加时会导致信用利差的增加，而当股东的信息成本增加时会导致信用利差的减小。在结构化模型的框架下，运用远期鞅方法推导了随机利率时不完全信息的风险债券的定价公式，分析了公式里的五个重要指标因素对风险债券价格的影响。

0.2.6 对信披露时间不确定下风险债务的研究

第 9 章研究当公司信息披露时间不确定、而信息披露时投资者能完全真实地了解公司价值的情形下风险债务的评估问题，假设关于公司真实价值的信息流服从泊松过程，得到了公司债务安全条款的阈值和公司债务价值评估的表达式。分析表明，当信息流到达率增大时，债务安全条款的阈值降低的同时导致债务价值的损失，但若公司价值增大，债务价值的损失将逐渐减小。在股东和债权人的讨价还价的博弈中股东将会通过调整信息披露的到达率，使得双方的最优违约破产阈值达到一致。本文采用连续时间的风险中性评估方法，得到了股东与债权人的均衡信息披露和最优债务安全条款，发现当信息流到达率低于均衡解时，债权人将选择高于股东的违约破产阈值，但随着信息流到达率的逐渐增大，这种差距是逐渐减小的，反之则呈现相反的变化趋势。

0.2.7 对非完全信息下具有关联违约风险的债券定价研究

第 10 章在信息非完全的情形下研究了简约化模型中具有关联违约风险的债券定价问题，假设关于初级公司是否违约的信息披露服从泊松过程，得到了五

种参数情况下次级公司零息票债券价格公式。分析表明，当信息流的到达率趋于零时，初级公司是否违约对次级公司没有影响；当信息流的到达率趋于无穷时，定价公式类似于完全信息情形；同时讨论了不同情形下信息披露和关联违约对公司债券定价的影响。最后通过具体的计算实例，进一步揭示了信息流的到达率对次级公司债券价格的影响。

0.2.8 财务信息不完全时公司违约风险及其敏感性分析

第 11 章采用与 Giesecke-Lisa(2004)类似的方法，假设外部投资者关于公司真实债务水平的信息不完全，即外部投资者不能准确地知道公司的真实债务水平但具有关于公司真实债务水平服从分布的信息，分别讨论了外部投资者关于真实债务水平完全不知情和关于真实债务水平部分知情时违约风险的评估问题，推导了违约概率公式；通过数值方法分析了违约风险对相关参数的敏感性，数值分析表明违约风险随着公司资产价值过程的波动率与债务的到期时间的增加而增大，而真实债务水平的不确定程度(方差)对违约风险的影响与资产价值过程的波动率和债务的到期时间有关。

0.2.9 对噪音信息下违约风险的研究

第 12 章研究噪音信息对违约风险评估的影响，假设公司的真实价值与其观察值分别服从一定的随机过程、公司价值的观察值服从的随机过程包含干扰真实值观察的噪音，而投资者对违约风险的评估是基于通过观察值对真实值的最优估计，分别给出了经典的完全信息情形和具有噪音的非完全信息情形的违约概率评估公式，通过数值计算分析比较了两种情形违约风险评估的差异，发现噪音信息使得公司债务的违约风险被低估。

第1章　违约风险建模的随机方法基础

1.1 概率模型

1.1.1 离散时间概率模型

定义 1.1　令 Ω 表示非空的基本事件集合，F 是一个域（field），如果

1）$\varnothing, \Omega \in \mathsf{F}$,

2）$A \in \mathsf{F}, B \in \mathsf{F}$，则 $A \bigcup B \in \mathsf{F}, A \bigcap B \in \mathsf{F}, A \backslash B \in \mathsf{F}$.

例如，对于 $t=1,2,\cdots,T$，考虑股票价格 S_t，则 Ω 是这些时点上所有可能的股票价格的集合，即 $\Omega=\{\omega: \omega=(S_1,S_2,\cdots,S_T)\}$. 假设股票价格的变动有两种可能，上升（$u$）或下降（$d$），令 F_t 表示投资者在 t 时可得的信息集，它是由在 t 时的股票价格信息及之前关于股票价格的信息构成。在 $t=1$ 时，投资者知道关于 S_0 和 S_1 的信息，此时得到的信息集 $\mathsf{F}_1 \subset \Omega$，通过观察，投资者知道关于 S_1 的真实状态。对于 $T=3$ 的三期模型，

$$\Omega=\{(u,u,u),(u,u,d),(u,d,u),(u,d,d),(d,u,u),(d,d,u),(d,u,d),(d,d,d)\}$$

在 $t=0$ 时我们不知道关于 S_1、S_2 和 S_3 的信息，此时可得的信息集 $\mathsf{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$；在 $t=1$ 时若股票价格上升（u），令

$$A_u=\{(u,S_2,S_3),S_2=u\text{或}d,S_3=u\text{或}d\}=\{(u,u,u),(u,u,d),(u,d,u),(u,d,d)\}$$

因此，$t=1$ 时可得的信息集 $\mathsf{F}_1=\{\varnothing,\Omega,A,\bar{A}\}$，显然 $\mathsf{F}_0 \subset \mathsf{F}_1$.类似地，令

$$A_{uu}=\{(u,u,u),(u,u,d)\}=\{\text{在前二期股票价格上升}\}$$

$$A_{ud}=\{(u,d,u),(u,d;d)\}=\{\text{股票价格第一期上升、第二期下降}\}$$

$$A_{du}=\{(d,u,u),(d,u,d)\}=\{\text{股票价格第一期下降、第二期上升}\}$$

$$A_{dd}=\{(d,d,u),(d,d,d)\}=\{\text{股票价格第一期下降、第二期下降}\}$$

在 $t=2$ 时可得的信息集为：

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_2=\{&\varnothing,\Omega,A_{uu},A_{ud},A_{du},A_{dd},A_u,\bar{A}_u,\\&A_{uu}\cup A_{du},A_{uu}\cup A_{ud},A_{uu}\cup A_{dd},\\&A_{ud}\cup A_{du},A_{ud}\cup A_{dd},\bar{A}_{uu},\bar{A}_{ud},\bar{A}_{du},\bar{A}_{dd}\}\end{aligned}$$

即 F_2 包含了关于第一期和第二期股票价格上升或下降的信息。在 $t=3$ 时 $\mathrm{F}_3=\mathrm{F}=\Omega$ 的所有子集的集合，它包含了股票价格三期变动的所有信息。

定义 1.2 $\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k\}$ 是 Ω 的一个分划，如果对于所有的 i 和 j，$\Omega_i \cap \Omega_j=\varnothing, \bigcup_i \Omega_i=\Omega$.

一个分划生成的域是所有的 Ω_j 及它们的有限并和补的集合，域的集合 $\mathrm{F}=\{\mathrm{F}_0,\mathrm{F}_1,\cdots,\mathrm{F}_t,\cdots,\mathrm{F}_T\}$ 满足 $\mathrm{F}_t \subseteq \mathrm{F}_{t+1}$ 成为流或信息流，它可直观地理解为随着时间的演进观察者可得的信息越来越多。若 Ω 是一个有限样本空间，则定义在 Ω 的函数 X 对于 $\forall \omega \in \Omega$ 取一个值 $x_i, i=1,\cdots,k$；若所有的集 $\{\omega: X(\omega)=x_i\}, i=1,2,\cdots,k$ 是 F 的员，则 Ω 上的函数 X 是可测空间 (Ω,F) 上的 F-可测随机变量，或者说如果知道了由 F 描述的信息则知道 X 的取值。

定义 1.3 随机过程 $\{X_t, t=1,2,\cdots,T\}$ 是一个随机变量族，对于任意的 t，X_t 是 $\{\Omega,\mathrm{F}_T\}$ 上的随机变量。

定义 1.4 若对所有的 t，X_t 是 F_t 可测的，则称随机过程是 F-适应的。

令 (Ω,F) 是可测空间，X 是取值为 $x_i, i=1,2,\cdots,k$ 的随机变量，则集 $A_i=\{\omega. X(\omega)=x_i\} \subseteq \Omega, i=1,\cdots,k$ 构成 Ω 的一个分划，而由这些分划生成的域称为随机变量 X 生成的域，包含所有集 A_i 的最小域记为 F_X 或 $\sigma(X)$，它是通过观察 X 后得到的信息集。

给定 (Ω,F) 和随机过程 $\{X_t, t=0,1,2,\cdots,T\}$，令 $\mathrm{F}_t=\sigma(\{X_s, 0 \le s \le t\})$ 为随机变量 $X_s, s=0,\cdots,t$ 生成的域，显然 $\mathrm{F}_t \subseteq F_{t+1}$，这些域构成一个流，成为过程 $\{X_t\}$ 的自然流。

定义 1.5 给定流 $\mathrm{F}=\{\mathrm{F}_0,\mathrm{F}_1,\cdots,\mathrm{F}_t,\cdots,\mathrm{F}_T\}$，随机过程 X_t 称为可料的，如果对于任意的 t，X_t 是 F_{t-1} 可测的。

定义 1.6 令 $(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$ 是有限的概率空间，$\{\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_k\}$ 是 Ω 的一个分划，生成的域为 H，若 $\mathrm{P}(\Omega_i)>0$，给定事件 Ω_i 发生事件 A 的条件概率为：

$$\mathrm{P}(A|\Omega_i)=\frac{\mathrm{P}(A \cap \Omega_i)}{\mathrm{P}(\Omega_i)}.$$

设分划中所有集 Ω_i 有正的概率，即 $\mathrm{P}(\Omega_i)>0, i=1,\cdots,k$，则给定域 H 的条件概率是取值为 $\mathrm{P}(A|\Omega_i)$ 的随机变量。

令 I_D 为集 D 的示性函数，即

$$\mathrm{I}_D(\omega)=\begin{cases}1, 若\,\omega\in D\\0, 若\,\omega\notin D\end{cases},$$

则 $\mathrm{P}(A|\mathrm{H})(\omega)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{P}(A|\Omega_i)\mathrm{I}_{\Omega_i}(\omega)$. 若 X 是取值为 $x_i,i=1,2,\cdots,k$ 的随机变量，则集 $\Omega_i=\{\omega: X(\omega)=x_i\}\subseteq\Omega,i=1,\cdots,k$ 构成 Ω 的一个分划，设 F_X 是随机变量 X 生成的域，记 $\mathrm{P}(A|\mathrm{F}_Y)=\mathrm{P}(A|Y)$.

定义 1.7 令 X 是取值为 x_i, $i=1,2,\cdots,k$ 的随机变量，$A_i=\{\omega: X(\omega)=x_i\}\subseteq\Omega$，$i=1,\cdots,k$ H 是 Ω 的分划 $\{D_1,D_2,\cdots,D_p\}$ 生成的域，则给定 H 时 X 的条件期望定义为 $\mathrm{E}[X|\mathrm{H}]=\sum_{i=1}^{k}x_i\mathrm{P}(A_i|\mathrm{H})$.

1.1.2 连续时间概率模型

定义 1.8 σ- 域 F 是 Ω 子集的集合满足：

1）$\varnothing,\Omega\in\mathrm{F}$;

2）若 $A\in\mathrm{F}$，则 $\bar{A}\in\mathrm{F}$；

3）若 $A_1\in\mathrm{F},A_2\in\mathrm{F},\cdots,A_n\in\mathrm{F},\cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathrm{F}$.

定义 1.9 可测空间 (Ω,F) 上的概率测度是定义在 F 上的集函数，使得

1) $\mathrm{P}(\Omega)=1$;

2)若 $A\in\mathrm{F}$，则 $\mathrm{P}(A)\geq 0$;

3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathrm{F}$ 是互斥的，即 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_n).$$

随机变量 X 是 $(\Omega,\mathrm{F})\to(\mathbb{R},\mathrm{B})$ 的可测函数，其中 B 是 Borel σ- 域，即若 $\{\omega:-\infty<X(\omega)\leq b\}\triangleq X^{-1}\{(-\infty,b]\}\in\mathrm{F}$，则 $X(\omega)$ 是随机变量。令 F_X 是随机变量的概率分布，若 X 是可积的即 $|X|\in L^1(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$，则 X 的期望定义为 $\mathrm{E}[X]=\int_\Omega X\mathrm{dP}=\int_\mathbb{R}x\mathrm{d}F_X$.

下面给出几种不同的收敛概念。

1) 依分布收敛：对于所有 F_X 连续的点，若 $F_n(x)\to F(x)$，则称 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X.

可以证明，$\{X_n\}$ 依分布收敛于 X，当且仅当 $\{X_n\}$ 的特征函数（或矩母函数）收敛于 X 的特征函数（或矩母函数）；依分布收敛意味着对于任意有界函数 g，$\mathrm{E}[g(X_n)] \to \mathrm{E}[g(X)]$.

2) 依概率收敛：若对于所有 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{P}(\omega{:}|X_n(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon)\to 0$，则称序列 $\{X_n{:}\ n=1,2,\ldots\}$ 依概率收敛于 X.

3) 均方收敛：若 $\mathrm{E}[X_n^2]<\infty, n=1,2,\cdots, \mathrm{E}[X^2]<\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[|X_n-X|^2]=0$，称 $\{X_n\}$ 均方收敛于 X.

由于 $\mathrm{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)=\mathrm{P}(|X_n-X|^2\geq\varepsilon^2)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}[|X_n-X|^2]$，显然均方收敛意味着依概率收敛。

4) 概率 1 收敛：若对于任意零概集外的 ω，当 $n\to\infty$ 时，$X_n(\omega)\to X(\omega)$ 即 $\mathrm{P}(\{\omega{:}\ \lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\})=1$，则称序列 $\{X_n{:}\ n=1,2,\ldots\}$ 以概率 1（w.p.1）收敛于 X.

下面给出连续时间概率下条件期望的定义。

定义 1.10 设 η 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上可积的随机变量即 $\mathrm{E}[|\eta|]<\infty$，对于任意 $\mathcal{F}$ 的子 σ-域 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{F}$，$\eta$ 关于 $\mathcal{H}$ 的条件期望记为 $\mathrm{E}[\eta|\mathcal{H}]$ 满足：

1) $\mathrm{E}[\eta|\mathcal{H}]$ 是 $\mathcal{H}$ 可测的；

2) 对于任意的 $A\in\mathcal{H}$，$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\eta|\mathcal{H}]\mathrm{I}_A]=\mathrm{E}[\eta\mathrm{I}_A]$.

当 $\mathcal{H}=\sigma(Y)$ 时，$\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ 记为 $\mathrm{E}[X|Y]$.

条件期望具有如下性质：

1) 若 $\mathcal{H}=\{\varnothing,\Omega\}$，则 $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]=\mathrm{E}[X]$；

2) 若 Y 是 $\mathcal{H}$ 可测的，则 $\mathrm{E}[XY|\mathcal{H}]=Y\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$；

3) 若 $\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}_2$，则 $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}_1]|\mathcal{H}_2]=\mathrm{E}[X|\mathcal{H}_1]$；显然，

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]]=\mathrm{E}[X];$$

4）若 $\sigma(X)$ 和 $\mathcal{H}$ 是独立的，则 $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]=\mathrm{E}[X]$；

5）若 $\sigma(X)$ 和 $\mathcal{H}$ 是独立的，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{F}$ 是独立的，$\mathcal{F}\vee\mathcal{H}=\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{H})$ 表示包含 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{F}$ 的最小 σ-域，则 $\mathrm{E}[X|\mathcal{F}\vee\mathcal{H}]=\mathrm{E}[X|\mathcal{F}]$；

6）(Fatou 引理）若 $X_n\geq 0$, a.s., 则 $\mathrm{E}[\liminf\limits_{n\to\infty}X_n|\mathcal{H}]\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[X_n|\mathcal{H}]$；

7）(单调收敛性）若 $0\leq X_n$, a.s., 对于所有 n，$X_n\leq X_{n+1}$，且 $\mathrm{E}[X]<\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}[X_n|\mathcal{H}]=\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$.