数学分析

第一册

周民强　编著

科学出版社

数 学 分 析

第一册

周民强　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书讲述的是高等数学的基础内容——数学分析，其核心内容是微积分学，全书共三册. 本书为第一册，共分六章，包括函数、极限论、连续函数、微分学(一)：导数与微分、微分学(二)：微分中值定理与 Taylor 公式、微分的逆运算——不定积分.

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所使用的讲义基础上修改而成，内容丰富、深入浅出. 对较难理解的定理、定义以及可深入探讨的问题，本书以加注的形式予以解说，以利于读者更好地接受新知识. 在章末附有后记，意在为读者更清楚地了解知识背景，更迅速地提高数学能力创造条件. 本书选用适量有代表性、启发性的例题，还选入足够数量的习题和思考题. 习题和思考题中，既有一般难度的题目，也有较难的题目，供读者酌情选做.

本书可作为大学本科阶段的数学、概率统计、应用数学、力学以及计算机等相关专业的教科书，也可作为广大数学工作及爱好者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 第1册/周民强编著. —北京：科学出版社，2014. 12
ISBN 978-7-03-042481-5

Ⅰ. 数… Ⅱ. 周… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 268244 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：朱光兰
责任印制：霍 兵 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年12月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2014年12月第一次印刷 印张：19
字数：383 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本教材的前身是北京大学数学科学学院教学讲义，2002 年由上海科学技术出版社出版发行. 2014 年在科学出版社的鼓励下，经修订后再版发行. 在撰稿的进程中，以下五个方面是作者着重思考并力图落实的：

(1) 加强导引性论述，适当介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法. 这或许有益于树立正确的数学观，增加学习的活泼性.

(2) 适当提高起点，扩大知识面. 书中在讲解各种理论的应用时，列举了丰富的典型例题，以利于在提高启发式教学水平的同时，让学生有一个扩展的自学园地.

(3) 为了培养学生数学思维的习惯，使学生养成“会学”数学的能力，本书在每章节后列有适当数量的思考问题. 此外，还以加注、用小字和后记的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项，这有助于引发读者的创新思维.

(4) 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一，本书一律用原文书写(在脚注中给出中文译名供参考)，并尽力介绍他们的国籍和生卒年代. 尊重那些曾为人类科学进步作出过贡献的学者，是我们后代人文明的表现之一.

(5) 对于想用本书作为正式教材的学校和教师，在教学实践中必须依据培养目标和实际情况对其内容作适当取舍，不能照本宣科，特别是对带有 * 标记的内容. 在这里，还希望广大读者和教师对本书提出批评和建议.

作　者

2014 年 2 月

致 读 者

《数学分析》的核心内容是“微积分”——微分学与积分学的统称，它是数学发展史中最伟大的成果，始创于17世纪下半叶，其代表人物是两位著名的学者：英国的I. Newton（1643～1727）和德国的G. W. Leibniz（1646～1716）.

Newton和Leibniz对微积分的杰出贡献与这一领域有关的前期工作不同，他们两人使微积分学成为一门独立的学科，而不再是古希腊几何的附庸和延续，且为许多课题提供了崭新的研究方法. 自微积分始，数学发展成为以变量数学为中心的时期. 微积分从运动、变化的观点和方法来考察各种事物和现象，这正符合客观世界处于不断运动、变化中的实际. 因此，微积分的建立给予科学、技术领域以巨大的影响，推动了生产力的发展. 特别是在天文学、力学方面的成就，在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条. 但另一方面，也由于当时的微积分学自身理论的不完善而受到责难，但这些都不能阻挡它的继续前进.

19世纪初期，由于科学技术进步的推动，促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作，终于在19世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系，为微积分的普及创造了更加有利的条件，也使它成为今天众多院校的必修课程.

因此，在三百余年后的今天，学习微积分已不能算是件“时髦”的事情了. 如果从培养21世纪的人才而言，或许只能说是一张“入门券”而已.

学习微积分课程的目的有三个：一是可应用于实际课题的计算；二是通过它提升数学思维、逻辑判断的能力；三是要为学习其他课程奠定基础.

怎样才能学好数学？首先是要对它有兴趣，爱好数学. 谈到学习方法，人们公认的是勤思考、多练习，善于总结、会提问题，以及有一个锲而不舍的精神. 至于说捷径，正如著名的数学教育家Polya（波利亚）所说的，我们不可能制定一种最有效的思维方法，思维能力的培养只有通过思维训练才能获得. 说得绝对一些，如果有一种“万能”的手段可以解决一切问题，那么这门科学不也就没有生命力了吗?!

自然，这并不等于说，学习就没有方法可循了. 对正确理解微积分的思维，掌握其逻辑推演的步骤，作者在这里提出下列六种有着对立关系的对象和判定. 建议读者在学习过程中着重加以辨清和熟悉.

(1) 设定的条件是充分的还是必要的!

(2) 量与量之间是相关的还是无关的!

(3) 某个量在运算过程中是常量还是变量!

(4) 运算过程是有限的还是无限的!

(5) 语句陈述是肯定的还是否定的!

(6) 不同语句的陈述谁在先谁在后!

* * *

学问者,学习,问难也.业精于勤,荒于嬉.

目　录

绪　论

0.1　微积分起源简介

欧洲在进入文艺复兴时期(约公元1200～1600年)后，人们的思想开始从教会的统治下得到解放. 古希腊经典著作的译出推动了众多学者对科学研究的兴趣，出现了前所未有的文化繁荣. 另外，生产技术的进步与新的生产关系的建立，促进了商品生产的发展. 市场的扩大，需求新的原料基地，且迫切要求通商. 因此，航运事业急速发展，伴随而来的是抢占殖民地的战争.

在看不见陆地的海洋中驶船，必须有测定纬度和经度的精确方法. 纬度可以通过太阳或其他恒星来确定，但经度则要求测量月球关于某些恒星的相对方向以及计算时间差. 这不但要了解月球运行的轨道，而且还要求保证船只的稳定性而不使所测方位角发生偏差. 随之而来的是必须设计出准确的计时器，从而开始了对时钟运动的研究. 战争推动着武器的进步，火炮的射程与炮弹速度的关系，抛射体的路线与高度成为人们探讨的课题. 对观测天体用的镜面光学性质的深入了解此时更有了新的用途.

综上所述，研究运动变化的规律成为那一时期最主要的课题，从而作为描述这一规律的数学方法——量与量之间的关系开始出现，它借助于不久前所创立的坐标几何法，形成了以解析式表达的完整曲线的函数观念.

在这种函数观念的基础上，上述科学实践中提出的各种课题，实际上可归纳为下述四类问题：

(1) 已知物体移动的距离(是时间的)函数，求此物体在任意时刻的速度和加速度；反之，已知物体运动的加速度(时间的函数)，求出速度和距离.

(2) 已知曲线的切线(或斜率)，或已知一曲线上任一点的切线(或斜率)，求该曲线的表达式(这与透镜的设计有关).

(3) 求已知函数的最大、最小值(如求行星离太阳的最远和最近距离、获得最大射程的发射角等).

(4) 求曲线的长度(如行星在某时间间隔内移动的距离)、曲线围成的面积.

上述四个问题虽分属两个不同的领域——力学和几何学，但进一步分析探讨说明，它们又可归纳为两类数学模型，粗略而形象地讲，就是求“无穷小量之比”，以及“求无穷多个无穷小量的和”. 因此，在早期也称这门学问为“无穷小分析”. 显见，为了解决这些课题，面临的是有限与无限的矛盾. 这也是贯穿本课程始终的主要矛

盾.而解决这一矛盾的主要思想就是在有限的运动、变化中去把握无限,也就是运用极限理论.虽然这一思想在17、18世纪并没有在逻辑上阐述清楚,但在19世纪几代数学家的辛勤耕耘下,现代微积分学大厦终于建立.

0.2 18世纪微积分在应用方面的成就举例

J. Bernoulli(伯努利,1667～1765,瑞士数学家):光的反射、折射,曲线族正交规线,最速下降线.

Clairaut(克莱罗,1713～1765,法国数学家):地球形状和月球的理论.

D'Alembert(达朗贝尔,1707～1783,法国数学家):弦振动、流体平衡与运动、风的成因.

Lambert(兰伯特,1728～1777,瑞士数学家):双曲函数、彗星轨道.

Lagrange(拉格朗日,1736～1813,法国数学家):分析力学、解析函数.

Laplace(拉普拉斯,1749～1828,法国数学天文学家):天体力学.

……

应当指出,微积分理论在指导实践上取得巨大成功的还有(如19世纪):

Maxwell(麦克斯韦,1831～1879,英国数学家和物理学家):用它阐述电磁学定律,预示了为后人证实的电磁波的存在.

Riemann(黎曼,1826～1866,德国数学家):用它研究几何,为Einstein(爱因斯坦)的研究工作做了准备,使之很快从Riemann几何中发现了建立一般引力理论的钥匙.

又如海王星被确切地观测到,也是由于在纠正天王星轨道的计算偏差时的预先设定.

……

0.3 微积分的名称来源

Newton称微积分为fluxions(流数术),而Leibniz把它称为Calculus differentials(差的计算),Calculus summatorius(求和运算).Calculus是拉丁文,原意为“石子”,这是因为古代欧洲人是用石子来作为计算工具的.因此,后人也就把计算或演算都称为Calculus.随着这一学问的深入发展以及人们对它认识的提高,把差的计算改称为differential calculus(微分学),求和运算改称为求整运算,即现在的integral calculus(积分学),而微积分也就统称为Calculus.

微积分学传入我国在19世纪,1859年上海墨海书馆首次发行中文译本《代微积拾级》一书,原书是Loomis(鲁米斯,1811～1889,英籍)所著的*Analytical Ge-*

ometry and calculus,是由李善兰和 A. Wylie(伟烈亚力,1815~1887,英籍)合译的. 译名中的"代"是指解析几何(当时称代数几何),"微"是指微分,"积"是指积分,而 Calculus 被译成微积. 该书在序中写道:"我国康熙时,两国本来之(即莱布尼茨)、奈端(即牛顿)二家又创微分、积分二术……其理大要:凡线面体皆设为由小渐大,一刹那中所增之积即微分也,其全积即积分也."这是我国微积分这一名称的由来.

第1章　函　　数

研究事物的变化、运动，要求在数学中引入变量的概念，事物之间的相互制约与联系，使得变量与变量之间呈现出某种依赖关系——函数关系.

数学分析就是以研究（实）函数为己任. 为此，本章把函数的概念以及有关事项先作一介绍，也可以说是预备知识.

1.1　变　　量

变量，顾名思义，就是变化着的量，即允许或可以取不同数值的量. 这是中学时代就已经学过的概念.

变量数学属于高等数学范畴，其创始期应追溯到 1637 年 Descartes① 所奠定的解析几何. 自 16 世纪以来，物理学（包括天文学）的中心问题是研究位移运动，运动着的物体随时间而改变其位置. 因此，用数量关系来描述这一现象时，必须采用允许其取不同值的量——符号 x 及其各种组合来表示. 人们为了适应这一思想上的飞跃，就必须摆脱常量数学的束缚.

常量数学的两个特征是：①研究对象是常量，如代数方程 $x^2-4=0$ 的未知常量 x；②运算次数是有限的.

当然，变量是常量的发展，两者有着不可分割的联系. 所谓常量，是在某一个特定的研究过程或数学问题中保持其数值不变的量. 因此，如果将常量视为此一过程中总取同一值的量，那么常量与变量只是一种相对的说法.

例如，在考察方程

$$y=ax^2+bx+c$$

作为二次曲线的性态时，其中 a,b,c 是作为常数看待的，但在其作为一般二次曲线的表达式，而研究其性质与 a,b,c 的关系时，人们又可视 a,b,c 为变量而取不同的值加以考察.

不仅如此，变量还是通过它所取的一系列特定的量（常值）而被认识的. 因此，常量又可看成是变量在变动过程中所取到的一个确定的量，运动状态中的一种暂驻状态. 这一观点是变量数学研究数学问题的核心思想，解决了许多常量数学所无法解决的课题. 这一思想正是从运动中认识事物这一哲学原理的反映. 例如，曲线

① 笛卡儿（1596～1650），法国数学家.

在一点的切线可视为割线转动的极限位置；圆面积可用边数逐次增多的圆内正多边形面积来逼近. 下面，我们还是要给出变量概念的一般说法.

“如果符号 x 能表示对象集合 E 中的任意元素，那么就称 x 为**变量**，称 E 为 x 的变化范围——**变域.**”

在本书中，变域中的元素均为实数. 实数是大家在中学时期就已经比较熟悉的，其中有：

(1) 正整数. 正整数全体记为 $\mathbf{N}^*$，它们是可以从小到大排列起来的. 由一部分正整数组成的集合必有最小数.

(2) 有理数. 全体整数记为 $\mathbf{Z}$，有理数是指分数

$$\frac{p}{q}\quad (p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0)$$

(并经常以既约分式出现，即 p 与 q 互素). 其全体记为 $\mathbf{Q}$. 显然，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$，而且有理数的和、差、积与商(分母不为零)仍为有理数(关于四则运算是封闭的).

(3) 无理数(非有理数).

实数的全体称为**实数系**，记为 $\mathbf{R}$[①] 或 $(-\infty,\infty)$.

实数还可以从代数方法的角度分为两类：称满足整系数代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\quad (n\in\mathbf{N}^*,a_0\neq 0)$$

的实数 x 为**代数数**，否则为**超越数**. 显然，一切有理数皆为代数数；$p+q\sqrt{m}$ $(p,q\in\mathbf{Q}$，m 是非完全平方的整数)是代数数，它满足方程 $x^2-2px+(p^2-mq^2)=0$. 圆周率 π 与自然对数底 e 则都是超越数[②].

由一部分实数构成的数集常用大写英文字母 $E,F,\cdots,X,Y$ 等表示，其中的元素即实数用小写字母 $a,b,c,\cdots,r,s,t,\cdots,x,y,z$ 等表示. $a\in E$(读作 a 属于 E)表示 a 是 E 的元素，而 $a\notin E$(读作 a 不属于 E)表示 a 不是 E 的元素.

在实数系里，今后本书常用的是区间的概念，其符号与意义如下.

(a,b)是指数集$\{x\in\mathbf{R}:a<x<b\}$，即指大于 a 且小于 b 的一切实数构成的集合，称为开区间；$[a,b]$是指数集$\{x\in\mathbf{R}:a\leqslant x\leqslant b\}$，称为闭区间. 类似地可以理解半开半闭区间$(a,b]$，$[a,b)$以及无穷区间，如

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>a\},\quad (-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant b\}$$

等. 上述各种区间也统一记为 I 或 J.

设 $x_0\in(-\infty,\infty)$，δ 是一个正实数，则称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为以 x_0 为中心，δ 为半径的**邻域**，简称为 x_0 的邻域，也记为

---

① 取自拉丁文 reulus.

② 1873 年左右，法国数学家 Hermite(埃尔米特，1882～1901)证明了 e 是超越数；1922 年，德国数学家 Lindemann(林德曼，1852～1939)证明了 π 是超越数.

$$U_\delta(x_0) \quad 或 \quad U(x_0,\delta).$$

如果在邻域中舍去中心点 x_0，称为**无中心邻域**，记为

$$U_0(x_0,\delta) \overset{\text{def}}{=} U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

如果所研究的问题与邻域半径 δ 的大小无直接关系，即不必特别指定 δ 时，那么有时就不写出 δ，而简记为 $U(x_0)$ 或 $U_0(x_0)$.

1.2　函数概念

1.2.1　函数的定义

在中学时期的学习中，许多具体的函数给我们留下了深刻的印象. 例如，$s=\frac{1}{2}gt^2$（g 是引力常数）. 它可以用来描述自由落体的路程 s 与时间 t 的关系；又如三角函数 $y=\sin x$ 可以用来描述周期现象；对数函数 $\lg x$ 可以用来探讨存款利率，等等. 这种变量与变量之间的相互依存关系是人们早期所认识的函数的类型，其特征是（画在）坐标平面上的一条接连不断的曲线. 然而，随着科学技术的进步，出现了各种复杂或“不良”的数量关系，数学必须把它们纳入视野，也因此对什么是函数在数学界产生了不同的看法和争论. 到了 19 世纪，大家终于承认，不论数量关系的结构及其几何形态如何，有一点是共同的，那就是给定（自）变量一个值，就可唯一确定地对应（用计算也可，用别的对应办法也行）出函数的一个数值来，这正是函数概念所包含的本质内容.

定义 1.1　设有实数集合 X,Y，称 f 是从 X 到 Y 的一个**函数**（或**映射**），是指 f 在 X 与 Y 之间的这样一个对应，对于每一个 $x\in X$，都有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，此时称 y 为 x 在（映射）f 下的**象**（x 为 y 的**逆象**），并记为 $y=f(x)$. X 称为 f 的**定义域**，也记为 $D(f)=X$. 所有 $x\in X$ 在映射 f 下的象的全体称为 f 的**值域**，记为 $R(f)$. $R(f)=f(X)=\{f(x):x\in X\}$.

当 f 是以 X 为定义域而值域在 Y 中的函数时，我们也记为

$$f:X\to Y.$$

如果 $f:X\to X$，那么就说 f 是从 X 到自身的一个函数. 对本课程，所讨论的函数之值域 $R(f)$ 总在 $(-\infty,+\infty)$ 中，称为**实值函数**. 而在本书第一、二册中，定义域 $D(f)$ 也在 $(-\infty,\infty)$ 中. 因此，总称为**实变量实值函数**——这是一元函数的情形. 其图形多可在笛卡儿直角坐标系中作出，如图 1-1 所示.

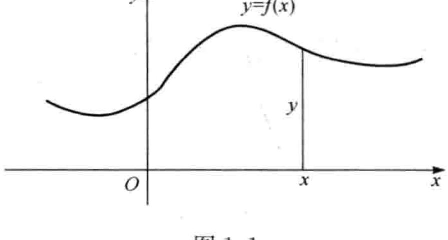

图 1-1

在习惯上,我们总是把 x 视为定义域 $D(f)$ 中元素的代表,也称为自变量,y 视为值域 $R(f)$ 中元素的代表. 因此联系象元 y 与 x 的关系式 $y=f(x)$ 也说成 y 是 x 的函数,甚至简称 $f(x)$ 为函数,这种统一称呼在本课程中并不会造成混乱,而在行文上却带来许多方便.

函数的记号也可用 g,h,φ,ψ 等表示. 在讨论同一数学问题时,为区别不同的函数,还可用记号 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$ 等. 不论用什么符号记法,只要是定义域以及对应关系相同,就是同一个函数.

例 1 幂函数 $y=x^a$(图 1-2(a)～(d)).

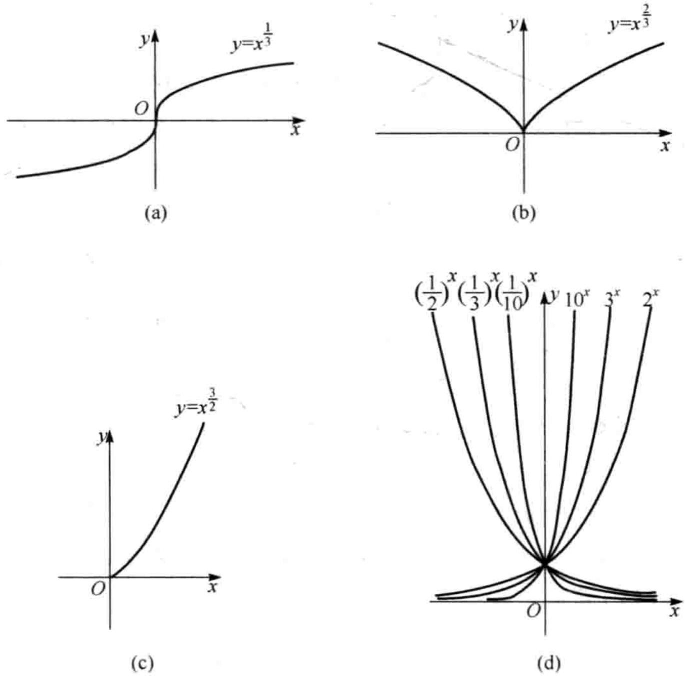

图 1-2

1.2.2 构成函数的各种途径

大家已经知道了许多函数,如幂函数、三角函数和指数函数等. 进一步也还学过用四则运算以及复合运算组成的函数,甚至从一个函数确定其反函数,而且认识到这众多函数对于描述各种事物的运动规律是必不可少的. 事实正是如此,随着人们视野的扩大,以及对数学的理解的深入,建立了各种各样运算方式,创造出构造新函数的许多途径,这是科学发展的必然. 下面就构成函数最初等的手段作一粗略归纳,更深入和复杂的构成法将在后面逐步展开,并贯穿始终.