高等教育“十二五”规划教材

高等数学（上册）

ADVANCED MATHEMATICS

施建兵 ◎ 主编

科学出版社

高等教育"十二五"规划教材

高等数学

（上册）

施建兵　主　编
邬良春　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据编者多年的教学实践，针对新的教育形势和特定的教学对象，并在适当结合《高等数学课程教学基本要求》的基础上编写而成.

本书共分5章，涵盖了一元函数微积分的基本内容，具体包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，各章节都配备了一定数量的习题，供读者练习、复习之用，也可供教师选用，书末附有习题参考答案.

本书可作为高等院校特别是民办本科院校的高等数学课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/施建兵主编. —北京：科学出版社，2012
(高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-03-035396-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①施… Ⅲ.①高等数学-高等教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 198595 号

责任编辑：张振华 / 责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九天志诚印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012年9月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2012年9月第一次印刷　印张：10
字数：220 000

定价：23.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈九天志诚〉）
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　　言

多年以来，我国的高等教育取得了巨大的发展，一举跨入了高等教育大众化阶段，毛入学率达到了 26％以上. 与此同时，民办高等教育(含民办独立学院和民办二级学院)也获得了快速发展. 在规模快速发展的进程中，高等教育的质量受到了社会大众越来越多的关注. 胡锦涛总书记在庆祝清华大学建校 100 周年大会上的重要讲话中鲜明指出:“高等学校要把提高质量作为教育改革发展最核心最紧迫的任务”. 以高等数学为代表的基础课程在高等学校的人才培养质量方面起着基础性、先导性的重要作用. 本书就是在这样的背景下，在科学出版社的大力支持下着手编写的. 我们试图为民办高校的老师、学生提供一本更贴近民办高等教育实际的教材，以达抛砖引玉之功.

在编写过程中，参编人员交流了各自的教学心得，通过分析民办本科学生的特点和状况，一致认为学生通过学习高等数学这门课程，必须掌握高等数学中最基本的概念、思想与方法，初步学会利用数学方法分析处理一些应用问题，并借此提高抽象思维能力和空间想象能力. 在本书的编写过程中，我们尽可能用直观、通俗的方式叙述基本概念，借助几何直观说明有关定理、结论，便于学生理解基本概念，掌握基本方法;列出较多例题以展示分析问题的思路及解题方法，各章节都配备了一定数量的习题，以便学生练习和掌握.

本书是上册，共分 5 章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用. 其中第 1～4 章由南京林业大学施建兵编写，第 5 章由南京林业大学邬良春编写，全书由施建兵负责统稿，书后习题答案由南京工程学院施颖浩提供或验算.

衷心感谢南京林业大学南方学院有关领导对本书的关心帮助，感谢校内外数学同仁对编写本书的支持、指导.

限于编者的水平，加之编写时间仓促，书中难免有错漏之处，敬请广大读者不吝指正.

编　者

2012 年 5 月

目 录

第1章

函数与极限

本章要点

- 函数、复合函数、分段函数的概念
- 极限的概念、运算及性质
- 两个重要极限
- 连续函数的概念及性质

本章难点

- 复合函数的概念及其应用
- 极限的概念与运算
- 连续函数的概念与应用

函数和极限都是高等数学中最重要、最基本的概念，极限方法是最基本的方法，一切内容都将从这两者开始.

1.1 函　　数

1.1.1 集合

1. 集合概念

通常，称具有某种特定性质的事物的全体为集合，组成集合的各个事物称为该集合的元素，一般用大写字母 A、B、C、…表示集合，而用小写字母 a、b、c、…表示集合的元素. 若事物 a 是集合 M 的一个元素，记作 $a\in M$(读作 a 属于 M)；若事物 a 不是集合 M 的一个元素，记作 $a\notin M$ 或 $a\overline{\in} M$(读作 a 不属于 M)；集合有时也简称为集.

表示集合的方法通常有两种. 一是列举法，即把集合的全体元素一一列举出来表示，例如，由 10 以内的自然数组成的集合 A 可表示为

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

二是描述法，若集合 B 由具有某种特定性质 P 的元素 x 的全体组成，则 B 可表示为

$$B=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，由不超过 1 的实数组成的集合 C 可表示为

$$C=\{x\mid x\leqslant 1\}.$$

若一集合只有有限个元素，则称为有限集；否则称为无限集.

2. 集合间的基本关系

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若有 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）. 若 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称 A、B 相等，记作 $A=B$. 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 空集是任何集合的子集.

3. 集合的运算

集合的基本运算通常包含并、交、差等几种. 设 A、B 是两个集合，由 A 和 B 中所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$；由既在 A 中又在 B 中的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$；由在 A 中但不在 B 中的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$. 有时需要将研究的问题限定在一个特定的集合 I 中，涉及的其他集合 A 均为 I 的子集，则称 $I-A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^{C}.

4. 数集

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集. 显然，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

5. 区间

所有大于 a 且小于 $b(a<b)$ 的实数组成的集合，称之为开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；同理，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，如图 1-1(a)和(b)所示；而 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 分别称为左闭右开、左开右闭的区间，并统称为半开区间.

以上集合均称为有限区间，而所谓的无穷区间（见图 1-1(c)和(d)）指集合：

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},\quad (a,+\infty)=\{x\mid x>a\}.$$

在没有特别要求下，有限区间、无限区间统称为区间，a、b 分别称为对应区间的左、右端点.

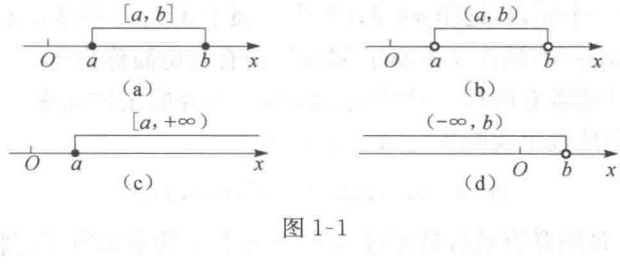

图 1-1

6. 邻域

定义 1.1 设 a 和 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，则称集合 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，事实上，

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

同理,我们称 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 为 a 的去心 δ 邻域或 a 的空心 δ 邻域.

1.1.2 映射

1. 映射概念

定义 1.2 设 X 和 Y 为两个非空集合,如果存在一个法则 f,对每一个 $x\in X$,在 Y 中总有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f:X\to Y$,其中 y 称为 x 的象,记作 $y=f(x)$,而 x 称为 y 的原象.

集合 X 称为该映射的定义域,记作 D_f,X 中所有元素的象组成的集合称为映射的值域,记作 R_f,通常 $R_f\subset Y$.

若 $R_f=Y$,即 Y 中每一元素 y 均是 X 中某元素 x 的象,则称映射 $f:X\to Y$ 为满射;若对 X 中任两个不同元素 x_1 与 x_2,均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称映射 $f:X\to Y$ 为单射;既是单射又是满射的映射称为一一映射或双射.

2. 逆映射、复合映射

设 f 为从 X 到 Y 的单射,则由定义 1.2,对 R_f 中每一元素 y,有 X 中的唯一元素 x 满足 $y=f(x)$,从而可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g:对每个 $y\in R_f$,规定 $g(y)=x$,该映射 g 称为 f 的逆映射,记作 f^{-1}. 需要指出的是,只有单射才可定义逆映射.

设 g 为从 X 到 Y_1 的映射,f 为从 Y_2 到 Z 的映射,其中 $Y_1\subset Y_2$,则可定义一个从 X 到 Z 的映射,将每个 $x\in X$,映成 $f[g(x)]\in Z$,该映射称为由 g 和 f 构成的复合映射,记作 $f\circ g$. 需要注意的是,$R_g\subset D_f$,且不可交换.

1.1.3 变量与函数

1. 常量与变量

在自然科学中,人们常常会遇到各种不同的量,如长度、体重、速度、面积等,然而在观察这些量时,会发现有的量在一定的考察过程中不起变化,保持一定的数值,这种量称为常量;又有些量在一定的考察过程中有变化,可取各种不同的数值,此种量称为变量. 通常用字母 a、b、c 等表示常量,用字母 x、y、t 等表示变量.

例如,某地某天 24h 内的温度,某同学从出生至读大一时的身高、体重等均为变量,而掷同一铅球数次,铅球的质量、体积为常量,而投掷距离、上抛角度、用力大小均为变量.

注: 常量与变量是相对而言的,同一量在不同场合下,可能是常量,也可能是变量,如在 1h 内观察某同学的身高,身高就是常量,但在从小学至高中的 12 年中观察某同学的身高,身高就成了变量;从小范围而言,重力加速度是常量,但从大范围来看,重力加速度就会成为变量,然而,一旦考察的时空环境确定了,同一量不能既为常量又为变量,二者必为其一.

2. 函数的概念

例如,正方形的边长 x 与面积 S 之间的关系为 $S=x^2$. 显然,当 x 确定后,S 也就确定了. 这就是说,两个变量之间存在着某种内在的联系. 它们在遵循某一规律时既相互联系

又相互约束.

定义 1.3 设数集 $D\subset R$,称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,简记作 $y=f(x)$, $x\in D$. 数集 D 称为该函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,依法则 f 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $f(x_0)$. 所有函数值组成的集合 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$,称为函数 $y=f(x)$ 的值域,而平面点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$,称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

注:(1) 函数 f 与 g 相等,即 $f=g$ 当且仅当定义域相同且对应法则相同.

(2) 约定实际问题中出现的函数的定义域按实际问题本身的特性而定,而通常函数的定义域是指使函数表达式有意义的自变量所能取的一切实数值的全体.

(3) 函数的表示通常有公式法、图示法、表格法等.

例 1 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$.

例 2 $y=\sqrt{1+x}$的定义域为$[-1,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$.

例 3 $f(x)\equiv x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,从而 $f(x)\neq g(x)$.

例 4 $y=\begin{cases}x^2, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ 1-x, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,2]$,其图形如图 1-2 所示.

这种在自变量的不同取值范围内,对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数,常见的分段函数有以下几类.

绝对值函数 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,其图形如图 1-3 所示;

符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$,其图形如图 1-4 所示;

取整函数$[x]$表示在自变量为 x 处的取值是不超过 x 的最大整数,其图形如图 1-5 所示.

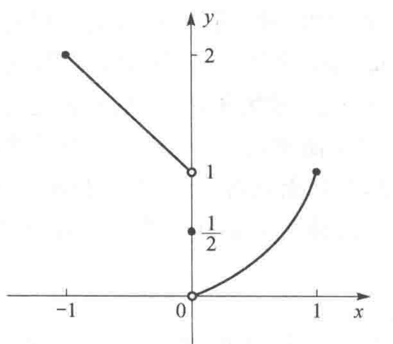

图 1-2

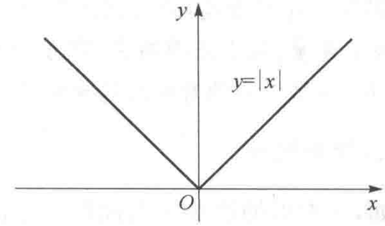

图 1-3

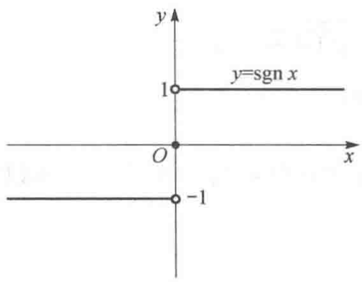

图 1-4

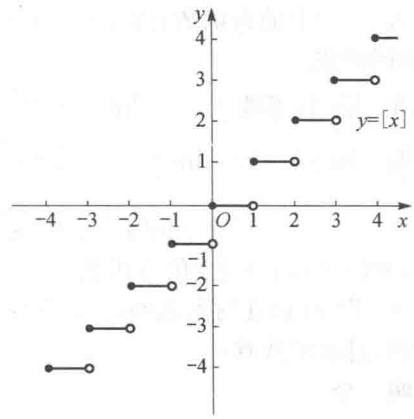

图 1-5

例 5　某公司按以下原则出售某商品，购 10t 及以下者，每 t 售价 1000 元，购 50t 及以下者，超过 10t 部分按七折优惠，购 50t 以上者，一律按七折价出售，试写出销售收益 Q(千元)与销售量 x(t)之间的函数关系.

解　$Q(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 10 \\ 0.7x+3, & 10<x\leqslant 50. \\ 0.7x, & x>50 \end{cases}$

3. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性. 设 $y=f(x)$在 D 上有定义，若 $\exists M>0$，$\forall x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 D 上有界，否则称为无界.

注：(1) 若对 $\forall x\in D$，$\exists M$，使得 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$，则称 $f(x)$在 D 上有上(下)界. $f(x)$在 D 上有界$\Leftrightarrow f(x)$在 D 上同时有上界和下界.

(2) $f(x)$在 D 上无界：对 $\forall M>0$，总 $\exists x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$.

(3) 函数是否有界，通常与考虑的范围有关，如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在(1,2)内是有界的，而在(0,1)内却是无界的.

(2) 函数的单调性. 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若对 $\forall x_1$、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$在 I 上单调递增(递减)或增加(减少). 特别地，当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$成立时，则称 $f(x)$在 I 上严格单调递增(递减)或增加(减少).(严格)单调递增或递减函数统称为(严格)单调函数.

例 6　符号函数和取整函数均为单调递增函数，但不是严格单调递增，而 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是严格单调递减函数.

(3) 函数的奇偶性. 设函数 $f(x)$在数集 D 上有定义，D 关于原点对称(即若 $x\in D$，必有$-x\in D$)，若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为 D 上的偶函数；若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为 D 上的奇函数.

例 7　$y=x^2$、$y=\cos x$、$y=|x|$为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数；$y=x^3$、$y=\sin x$、$y=\operatorname{sgn} x$

是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数;而 $y=x^2+x^3$ 及 $y=\cos x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上既非奇函数,也非偶函数.

例 8 证明:函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$(-\infty,+\infty)$上为奇函数.

证明 因 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数.

例 9 设 $f(x)$在对称区间$(-l,+l)$上有定义,证明:$f(x)$可表示为一奇函数与一偶函数的和,且表示式唯一.

证明 令

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

由于 $g(-x)=g(x)$,$h(-x)=-h(x)$,所以 $g(x)$为偶函数,$h(x)$为奇函数,且 $f(x)=g(x)+h(x)$,故 $f(x)$可表示为一奇函数与一偶函数的和.

又若 $f(x)=g(x)+h(x)$,其中 $g(x)$为偶函数,$h(x)$为奇函数,则 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)$. 于是有

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

即 $f(x)$表示为一奇函数与一偶函数的和时,表示式是唯一的.

注:(1) 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(2) 若 $f(x)$是奇函数,且 $0\in D$,则必有 $f(0)=0$.

(3) 两偶函数和为偶函数;两奇函数和为奇函数;两偶函数的积为偶函数;两奇函数的积也为偶函数;一奇函数与一偶函数的积为奇函数.

(4) 周期性. 设函数 $f(x)$在数集 D 上有定义,如果$\exists l\neq 0$,使得对$\forall x\in D$,有 $x\pm l\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,l 称为 $f(x)$的周期.

例 10 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$ 分别为以 2π,2π,π 为周期的周期函数,而 $y=x-[x]$为以 1 为周期的周期函数.

注:(1) 若 l 为 $f(x)$的周期,由定义知 $2l,3l,4l,\cdots$也都是 $f(x)$的周期,故周期函数有无穷多个周期,通常说的周期是指最小正周期(基本周期),然而最小正周期未必都存在. 例如:

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$$

是以任一非零有理数为周期的函数,但无最小正周期.

(2) 周期函数在每个周期$(a+kl,a+(k+1)l)$(a 为任意数,k 为任意整数)上,有相同的形状.

4. 反函数与复合函数

作为逆映射的特例. 设函数 $f:D\to f(D)$是单射,则它的逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$ 称为

$f(x)$的反函数.

注:(1) 反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域为 $W=f(D)$,值域为 D.

(2) 在习惯上往往用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此将 $x=f^{-1}(y)$中的 x 与 y 对换,$y=f(x)$的反函数可改记作 $y=f^{-1}(x)$,并称 $y=f(x)$为直接函数. 例如,函数 $y=2x+3$、$y=x^3$ 的反函数分别为 $y=\frac{x-3}{2}$、$y=x^{\frac{1}{3}}$.

(3) 反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-6 所示.

作为复合映射的特例. 设 $y=f(u)$的定义域为 D_1,$u=\varphi(x)$在 D 上有定义,且 $\varphi(D)\subset D_1$,则有确定的函数 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D$,称为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$构成的复合函数,其中 u 称为中间变量.

例 11　$y=\sin^2 x$ 就是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成;而 $y=\sqrt{1-x^2}$由 $y=\sqrt{u}$与 $u=1-x^2(|x|\leqslant 1)$复合而成.

注:(1) 并非任何两函数都可以复合成复合函数,如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 不能复合.

(2) 复合可推广到三个或更多的函数中去,如 $y=\tan(\ln x)^2$ 就是由 $y=\tan u$,$u=v^2$ 与 $v=\ln x$ 复合成.

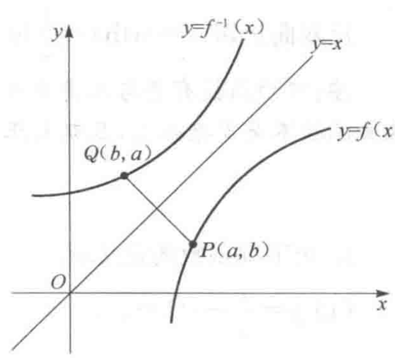

图 1-6

1.1.4　初等函数

幂函数 $y=x^\mu$(μ 为常数)、指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$、对数函数 $y=\log_a x$(a 为常数,$a>0,a\neq 1$)、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 而称由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤后,所得到的能用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\sqrt{1+x}$,$y=\sqrt{1-2^x}$,$y=\sin^2 x$,$y=\tan(\ln x)^2$,$y=\arctan\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$等都是初等函数.

本书讨论的函数主要是初等函数(也有非初等函数).

例 12　(1) 设 $f(x)=2x-3$,求 $f(a^2)$,$f[f(a)]$,$[f(a)]^2$;

(2) 设 $f(\sin x)=\sin^2 2x$,求 $f(x)$.

解　(1) 因 $f(a^2)=2a^2-3$,又 $f(a)=2a-3$,故

$$f[f(a)]=2f(a)-3=2(2a-3)-3=4a-9,[f(a)]^2=(2a-3)^2=4a^2-12a+9.$$

(2) 因 $f(\sin x)=(2\sin x\cos x)^2=4\sin^2 x(1-\sin^2 x)$,故

$$f(x)=4x^2(1-x^2)=-4x^4+4x^2.$$

另外,在本节最后列出双曲函数和反双曲函数,尽管本书对此不作要求,但对读者阅读部分参考书有所帮助.

双曲正弦:$y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

双曲余弦:$y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

双曲正切:$y=\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

反双曲正弦:$y=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

反双曲余弦:$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,$x\in[1,+\infty)$.

反双曲正切:$y=\operatorname{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,$x\in(-1,1)$.

注:双曲函数有着与三角函数很相似的性质,感兴趣的读者可参见相关的参考书,但双曲函数不是周期函数,且双曲正弦、余弦均不是有界函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=\sqrt{6-5x-x^2}+\dfrac{1}{\ln(2-x)}$;　　(4) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$的定义域.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(2)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sin x+\cos x$;　　(2) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

(3) $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;　　(4) $y=\tan(\cos x)$.

5. 求 $y=2\sin 3x$,$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$的反函数.

6. 对于下列每组函数写出复合函数 $f[g(x)]$的表达式.

(1) $f(x)=\sin x$,$g(x)=x^2-1$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=e^x$.

7. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50kg 时,按基本运费计算,如从上海到某地以 0.15 元/kg 计算基本运费,当超过 50kg 时,超重部分按 0.25 元/kg 收费.试求上海到该地的行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系.

8. 某产品共有 1500t,每 t 定价 150 元,一次销售不超过 100t 时,按原价出售,若一次销售量超过 100t,但不超过 500t 时,超出部分按 9 折出售;如果一次销售量超过 500t,超

过 500t 的部分按 8 折出售. 试将该产品一次出售的收入 y 表示成一次销量的函数.

1.2　数列的极限

1.2.1　数列的基本概念

通俗地讲,所谓数列就是按一定次序将一系列的数排成一列. 在本课程中通常只考虑无穷数列,即有无穷多项的数列. 数列也可看成定义在自然数集 **N** 上的函数:

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$,这是最常见的数列表现形式,有时也简记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 称为一般项或通项.

例如,$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$; $1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$; $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ 都是数列,其通项分别为 $\frac{1}{n}$, $(-1)^{n-1}$, $2n$ 及 $\frac{1}{2^n}$.

从一个数列中取出无穷多项组成的新的数列称为原数列的子数列,简称子列. 例如,数列 $\{x_{2n-1}\}$、$\{x_{2n}\}$ 均为数列 $\{x_n\}$ 的子列,前者由 $\{x_n\}$ 的所有奇数项组成,后者由 $\{x_n\}$ 的所有偶数项组成.

如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$,则称之为单调增加数列;若满足 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$,则称之为单调减少数列.

如果 $\exists M$,使得 $x_n \leqslant M (n=1,2,\cdots)$,则称数列 $\{x_n\}$ 有上界;若 $\exists M$,使得 $x_n \geqslant M (n=1,2,\cdots)$,则称数列 $\{x_n\}$ 有下界;若 $\exists M>0$,使得 $|x_n| \leqslant M (n=1,2,\cdots)$,则称 $\{x_n\}$ 有界.

显然,数列 $\{x_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 有上界且有下界.

1.2.2　数列极限的定义

对于数列来说,最重要的是研究其项数 n 在无限增大的变化过程中,对应的项 x_n 无限接近于某一常数的渐趋稳定的状态,这就是常说的数列的极限问题.

下面观察 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的情况,随着 n 的增大,不难发现 $\frac{1}{n}$ 无限地接近于 0,亦即 n 充分大时,$\frac{1}{n}$ 与 0 可以任意地接近,即 $\left|\frac{1}{n}-0\right|$ 可以任意地小. 换言之,当 n 充分大时,$\left|\frac{1}{n}-0\right|$ 可以小于预先给定的无论多么小的正数 ε. 例如,取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$,由 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$,可得 $n>100$,即 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 从第 101 项开始,以后的项 $x_{101}=\frac{1}{101}, x_{102}=\frac{1}{102}, \cdots$ 都满足不等式 $|x_n-0|<\frac{1}{100}$,或者说,当 $n>100$ 时,有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\frac{1}{100}$. 一般地,不论给定的正数 ε 多么小,总存在一个正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. 这就充分体现了当 n 无限增大时,$\frac{1}{n}$ 无限接近于 0 这一事实. 这个数“0”称为当 $n\to\infty$ 时,$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的极限.

定义 1.4　设 $\{x_n\}$ 为一给定的数列,a 为某常数,若对任意给定的正数 ε(可简记作

$\forall\varepsilon>0$)(不论 ε 多么小),总存在(可简记作 $\exists$)自然数 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,或 $x_n\to a(n\to\infty)$;否则就称数列无极限或称该数列是发散的.

例 1 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$,由于 $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$,故要使得 $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$,只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

注:(1) ε 是衡量 x_n 与 a 的接近程度的,除要求为正以外,无任何限制. 然而,尽管 ε 具有任意性,但一经给出,就应视为不变(另外,ε 具有任意性,那么 $\dfrac{\varepsilon}{2}$,2ε,ε^2 等也具有任意性,它们也可代替 ε).

(2) N 通常与 ε 有关. 在解题中,N 等于多少关系不大,重要的是它的存在性(不是唯一的),只要存在一个 N,使得当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 即可,而不必求最小的 N.

数列极限的几何意义:将数列 $\{x_n\}$ 的项在数轴上用对应的点表示出来,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的含义就是,任意给定 a 的一个 ε 一邻域 $U(a,\varepsilon)$,数列从某项 x_N 以后的各项均要落到该邻域内(邻域外至多有有限项),如图 1-7 所示.

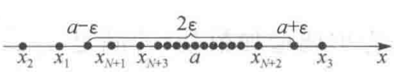

图 1-7

例 2 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$,要使得 $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$,只须 $n>-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$,所以取 $N=\left[-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$,则当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

类似地,可证 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$,其中 r 为常数且 $|r|<1$.

1.2.3 收敛数列的性质

下面介绍收敛数列的有关性质.

(1) (**唯一性**)收敛数列的极限唯一.

证明 设 a 和 b 为 $\{x_n\}$ 的任意两个极限,下证 $a=b$.

由极限的定义,对 $\forall\varepsilon>0$,必分别 $\exists$ 自然数 N_1,N_2,当 $n>N_1$ 时,有

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{1}$$

当 $n>N_2$ 时,有

$$|x_n-b|<\varepsilon. \tag{2}$$

令 $N=\mathrm{Max}\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,式(1)和式(2)同时成立. 从而有

$$|a-b|=|(x_n-b)-(x_n-a)|\leqslant|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

由 a,b 均为常数及 ε 的任意性,得 $a=b$,即 $\{x_n\}$ 的极限只能有一个.

例 3 证明:数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 是发散的.