

卓越教师教育精品丛书

# 超级画板的教育价值 及其教学应用

徐章韬 著



科学出版社

卓越教师教育精品丛书

# 超级画板的教育价值 及其教学应用

徐章韬 著

华中师范大学国家教师教育创新平台教师教育  
理论创新与实践研究项目资助

中国博士后科学基金面上资助(项目编号:2011M501213)

中国博士后科学基金特别资助(项目编号:2012T50656)



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书论述了超级画板的教育价值,超级画板课件的教学意义,超级画板中难度较大的演示型课件的制作原理,超级画板在师范生教学研究能力培养中的作用,超级画板在推动数学历史文化进入课堂教学中的作用,以及超级画板与算法的关系。

本书可供普通高等师范院校数学专业和信息技术专业本科生,数学教育方向的研究生,以及中学数学教师 and 有志于从事信息技术与课程整合理论与实践的人阅读。

### 图书在版编目(CIP)数据

超级画板的教育价值及其教学应用/徐章韬著. —北京:科学出版社, 2015. 4

卓越教师教育精品丛书

ISBN 978-7-03-044042-6

I. ①超… II. ①徐… III. ①数学教学-计算机辅助教学-应用软件  
IV. ①O1-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 067697 号

责任编辑:姚莉丽/ 责任校对:钟 洋  
责任印制:霍 兵/ 封面设计:华路天然

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015 年 4 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015 年 4 月第一次印刷 印张:16 3/4

字数:397 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## “卓越教师教育精品丛书”编委会

主 任 马 敏 杨宗凯

副主任 李向农

编 委 (按姓氏笔画排序)

王后雄 王坤庆 王恩科 石 挺 朱长江

朱庆海 任友洲 刘建清 李克武 李建华

吴伦敦 洪早清 段 锐 涂艳国 曹艳丽

曹慧东 詹一虹

## 序

教育信息技术要深入学科,要面向学科,已经得到了越来越多学者的认同.

事实上,早在 20 世纪 60 年代,人们就致力于研发和学科内容紧密联系的、支持科技与教育活动的软件.自然地,大家首先关心对数学教育与计算机教育有帮助的软件.“3M”数学软件(Mathematica, Maple, Matlab)不仅广泛用于科学技术领域,也已成为高校理工科教学不可缺少的工具.而 Logo 语言和几何画板,则在许多国家的中小学教育活动中被广泛应用.信息技术与学科教育紧密结合而取得的巨大成效,已成为不争的事实.

在美国几何画板的影响下,已有多种动态几何教育软件在世界各国推出.我国在 1996 年研发的超级画板,除具有动态几何功能外,还支持符号计算、几何推理、简单编程等几乎所有的中小学所需要的计算机辅助数学教学与学习的功能,具体操作上独具特色,更适合教师的传统教学习惯.

超级画板作为一款易学易用且功能丰富的智能教育平台,近 20 年来,获得越来越多的师生和专家学者认同.许多教师从中体会到了超级画板在辅教导学方面的巨大作用,涌现了一些优秀的教师和作品.2012 年中国人民大学书报资料中心《初中数学教与学》曾辟专栏介绍一线教师的有关工作成果.

感谢科学出版社的支持,几年来出版了一些有关超级画板的著作,为在数学教学中使用超级画板提供了帮助辅导.本书更深入地探讨超级画板在教育教学中的应用,主要是作者在博士后工作期间的研究心得.第一章是关于超级画板本身的研究,阐述的是作者对超级画板的一些认识,带有一些思辨的色彩,关于“是什么”最终是个体经验的升华,并指向一种价值判断.读者可以认同这些主张,也可以不认同这些主张,关键的是要深入到其中去.第二章介绍超级画板对课程内容的影响,技术要成为教育中的技术,就是能对课程内容有实质的影响,能动态地、可视化地、举重若轻地揭示课程内容的实质.第三章介绍一些难度较大的技术性问题,需要读者仔细阅读.第四章介绍在超级画板的支持下,落实课程标准中的算法问题.作者通过深入研究,发现超级画板有助于解决某些全国高中联赛试题,这表现了超级画板功能的强大,也说明关于超级画板的应用还需要我们进一步的研究拓广.第五章是免费师范生通过使用超级画板而快速成长的案例,这说明用超级画板推动师范生的培养是一条新路.第六章是作者开辟的新的研究方向,作者希望把超级画板与其他数学教育的研究主题相结合,开创数学教育研究的新天地.从作者已有的研究来看,这是可行的.超级画板与数学史进行有机的融合,使 HPM(数学史与数学教育)焕发了新的生机.作者这方面的见解,已经引起国外同行的兴趣.作者还想把超级画板与学习心理进行有机融合,这还处于尝试之中.

数学教育是一门尚未成熟的学科,其中很多园地都有待开辟,如数学教育技术.该书



作者已经明确认识到这一点,并做了一些思考与探索.该书从一个侧面记录了作者的学术成长之路.相信作者能继续深入研究与实践,为把信息技术与学科课程整合做得更好贡献力量.

2014年10月7日

## 前 言

数学教育技术——超级画板是深入数学学科的信息技术,在课堂教学中大有用武之地。“工欲善其事,必先利其器”,是人所熟知的俗语,其中的道理也广为人知。但是,如此浅显的道理却不见得能正确地践行。以数学学科教育信息化为例,一段时间以来,人们用普适软件如 PPT、Flash 做课件,结果是教师累,学生也累,信息技术于教学效果的提升似乎无助。作者曾经对数学学科教育信息化抱有很大的热情,曾花一个学期的时间用 3D Max 制作了《球的表面积》的课件,虽是获了奖,但回过头想,如此这般做课件,值得吗?有了优秀国产软件超级画板后,数学学科教学信息化翻开了新的一页。超级画板,将动态几何、符号演算、自动推理、编程环境以及课件制作等进行了有机地集成,发展成集动态图形与动态计算于一体的逻辑动漫平台,能画、能算、能动、能变、能测,是实验探索得心应手的环境,超级画板为教学中的数学活动的展开提供了一个崭新的方式。超级画板还考虑了学生认识、学习数学的过程,能展示几何体的运动和变换过程、代数的运算过程、曲线的变换过程、轨迹的运动过程、概率试验的过程以及数据生成过程,在动态过程中为学生获取数学基本活动经验提供了技术上的支持。由于超级画板不是普适软件,是深入数学学科的信息技术,能够满足数学教学活动的需要,且不加重教师制作课件的负担,在课堂教学中大有用武之地。已有诸多案例阐述了超级画板与数学课程的整合,具体到每一章节,每一个主题,为教师进行再次开发提供了可资借鉴的原材料,推动了数学学科教育信息化的进程。数学教学需要深入数学学科的信息技术,同时,信息技术的介入又给数学教学带来诸多新的变化,其中之一,便是从观念上更新了“信息技术无助于教学效益”的错误认识。

熟练掌握以超级画板为典型代表的数学教育技术,对于发展教师信息技术支持下的学科教学知识(Technological Pedagogy Content Knowledge, TPACK)具有重要意义,能推动教师的专业发展。研究已表明,学科教学知识(Pedagogy Content Knowledge, PCK)是支持教师进行有效教学的教学知识基础。发展学科教学知识是教师专业成长的必然诉求。尽管在学科教学知识模型里没有技术这个因子,更没有阐述技术与内容、教法间的相互作用,但随着信息技术逐渐深入课堂,信息技术与课程整合的愿景日益强烈,迫使人们探讨信息技术背景下的教师知识。正是在这种背景之下,信息技术支持下的学科教学知识的概念框架应运而生。在课堂教学中运用超级画板需要这种知识。我师顾泠沅教授曾说“把想好了的做出来,把做好了的说出来”,通过“做”“说”这样的环节,教师的专业发展了。超级画板营造了教师在信息化背景下专业发展的环境。课件制作并不是一个简单的操作问题,而是数学知识出色运用的过程,在制作课件的过程中,教师加深了对数学知识本身的理解,提高了自身的素养。在用课件进行辅助教学,突出重点,抓住关键点,突破难点的过程中,必然要考虑技术、内容和教法之间的相互作用,这样教师信息技术支持下的学科



教学知识发展了. 引入技术这个因子后, 教学系统的构成要素更为复杂, 更需要我们做很多开创性的工作. “理念先行, 行为跟进”是教师专业发展中一条可行的道路, 这也同样适用于推进教师信息技术支持下的学科教学知识的发展. 这样, 有了超级画板之后, 信息技术引领教师教育不再是一句空话. 我们曾指导一些本科生用超级画板进行教学研究, 他们都成长很快, 还在专业期刊上发表了论文, 在中学讲台上脱颖而出.

超级画板拓展了数学教育的研究领域. 作者自师从张景中院士以来, 深得张院士的指点, 对数学教育信息技术抱有极大的热情, 同时, 也认为, 插上了信息技术的翅膀, 就为学科教育的生存窘境开创了一条新路, 也就是华中师范大学杨宗凯教授提出的“用信息技术引领教师教育”. 作者认为, 研究超级画板不仅是个技术操作问题, 而且还涉及教师教育的发展, 数学教育学科的整体发展, 是一个极具前途的研究方向. 例如, 国内 HPM(数学史与数学教育)学派知名学者汪晓勤教授就非常看好信息技术与历史文化的结合, 认为这可能是一个崭新的研究方向; 还可以考虑信息技术与 PME(教育心理)的结合, 使数学教育的研究和心理学的研究结缘, 进而进入到自然科学研究的序列, 等等. 对于研究者, 是要有开疆拓土, 开辟新研究领域的眼光和勇气, 超级画板提供了一种理念和技术上的支持.

研究超级画板的教育价值及其教学应用具有很强的现实意义. 张景中院士不仅是计算机科学家、数学家, 而且还是教育数学的创始人, 对数学教育信息化有很深刻的见解. 故而在首届 HP 杯《数学教育学报》(2003—2012)颁奖大会上, 张院士因其在超级画板方面的工作受到众多研究者的引用, 而获得特殊贡献奖(严虹, 2014; 陈隽, 2014). 与此成对比的是, 国外的数学教育软件却想通过各种途径对中国数学教育信息化进程产生重要影响, 其商业运作模式相当明显. 中国的数学教育信息化虽不排斥国外优秀的数学教育软件, 但中国的数学教育信息化绝不能指望国外的数学教育软件. 因此, 我们认为, 深入研究超级画板的教育价值及其教学应用是有志于推动中国数学教育信息化学人的光荣使命.

在本书即将付梓之际, 我校已成功申报教育部“卓越中学数字化教师培养”国家级项目. 希望本书的出版能为中国数学教育信息化、数学教育人才的培养略尽绵薄之力, 能助推基础教育的信息化.

徐章韬

2015 年元月

# 目 录

序

前言

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第一章 超级画板的教育价值               | 1  |
| 第一节 “Z+Z”智能教育平台是实施变异理论的一个抓手 | 2  |
| 一、变异理论                      | 2  |
| 二、平台简介                      | 3  |
| 三、教学实施                      | 4  |
| 四、超级画板营造了发生着的变异的数学世界        | 6  |
| 第二节 超级画板是获取数学基本活动经验的优秀认知平台  | 6  |
| 一、数学基本活动经验的涵义               | 6  |
| 二、数学基本活动经验的获取               | 7  |
| 三、用超级画板学到了完整的数学过程           | 9  |
| 第三节 超级画板是虚拟环境中数学建模的优秀平台     | 10 |
| 一、数学建模的认识                   | 10 |
| 二、虚拟环境中建模的步骤                | 11 |
| 三、虚拟环境中建模的知识储备              | 13 |
| 四、用超级画板在虚拟环境中建模值得尝试         | 14 |
| 第四节 超级画板是文科数学教学信息化的推手       | 15 |
| 一、文科数学的课程定位                 | 16 |
| 二、文科数学的教学方式变革               | 16 |
| 三、超级画板有助于文科数学课程理念的落实        | 19 |
| 第五节 超级画板作为学科工具平台的现实意义与前景展望  | 19 |
| 一、学科工具平台使课程题材满足多层次的需求       | 19 |
| 二、学科工具平台为学科教育的发展提供了契机       | 21 |
| 三、大力发展学科工具平台                | 22 |
| 第二章 超级画板课件的教学意义             | 24 |
| 第一节 数学的原理 技术的眼光 共同演绎精彩课件    | 24 |
| 一、基本型                       | 24 |
| 二、各种变式                      | 25 |
| 第二节 制作动态几何课件的关键是什么          | 29 |
| 一、问题的缘起                     | 29 |
| 二、探究                        | 29 |
| 三、引申                        | 29 |



|                              |    |
|------------------------------|----|
| 四、和差术的现代意义 .....             | 35 |
| 第三节 超级画板课件背后的数学原理 .....      | 35 |
| 一、精彩样例 .....                 | 35 |
| 二、创意很重要 .....                | 39 |
| 第四节 形象与抽象 .....              | 39 |
| 一、精彩样例 .....                 | 39 |
| 二、把抽象栖居在形象上 .....            | 41 |
| 第五节 超级画板中的仿射变换 .....         | 41 |
| 一、仿射变换的动态呈现 .....            | 41 |
| 二、超级画板推动选修课程走进课堂 .....       | 43 |
| 第六节 二分支的符号函数 .....           | 44 |
| 一、典型问题 .....                 | 44 |
| 二、用数学的眼光解析可视化效果 .....        | 46 |
| 第七节 在平面上表现空间动态 .....         | 47 |
| 一、在技术上实现原函数与反函数的互变 .....     | 47 |
| 二、信息技术让我们经历了感悟 .....         | 48 |
| 第八节 在虚拟环境中生发见识 .....         | 49 |
| 一、何以要引入参数方程 .....            | 49 |
| 二、从何处体现参数方程的妙用 .....         | 50 |
| 三、从何处升华认识 .....              | 51 |
| 第九节 在虚拟环境中学会思考 .....         | 52 |
| 一、学会技术思考 .....               | 53 |
| 二、学会数学思考 .....               | 53 |
| 三、学会技术实现的思考 .....            | 54 |
| 第十节 超级画板支持课堂教学导入方式的生态化 ..... | 55 |
| 一、学习教科书中的导入法 .....           | 55 |
| 二、均值不等式的导入 .....             | 56 |
| 三、分析与讨论 .....                | 58 |
| 四、超级画板使史料的功能得以挖掘 .....       | 58 |
| 第三章 学会解析 .....               | 60 |
| 第一节 超级画板中的半自由点 .....         | 60 |
| 第二节 超级画板中半自由点参数的设计 .....     | 66 |
| 第三节 沿折线运动的正方形 .....          | 72 |
| 第四节 深入认识超级画板中的轨迹 .....       | 77 |
| 第五节 直纹面和圆柱面的展开 .....         | 83 |
| 第六节 圆和凸五边形的滚动 .....          | 87 |
| 一、圆在凸五边形上的无滑滚动 .....         | 87 |
| 二、凸五边形在圆上无滑滚动 .....          | 92 |



|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 第七节 圆的面积的制作原理解析 .....          | 95  |
| 第八节 三角形在圆上的滚动 .....            | 99  |
| 第四章 走向算法 .....                 | 108 |
| 第一节 超级画板的程序 vs 几何画板的迭代 .....   | 108 |
| 一、制作效果的比较 .....                | 108 |
| 二、信息技术是认识世界的有效工具 .....         | 114 |
| 第二节 从二分法的角度解读条件结构 .....        | 115 |
| 一、二分法的认识 .....                 | 115 |
| 二、样例 .....                     | 115 |
| 三、寻找算法的认知固着点 .....             | 121 |
| 第三节 在循环结构中表达递推思想 .....         | 121 |
| 一、递推思想的认识 .....                | 121 |
| 二、样例 .....                     | 122 |
| 三、观千剑然后识器 .....                | 124 |
| 第四节 算法化视角下的中学数学教学内容之知识分析 ..... | 125 |
| 一、理解算理和算法 .....                | 125 |
| 二、知识分析的案例 .....                | 126 |
| 三、知识分析的教育意蕴 .....              | 130 |
| 第五节 数学史下进位制教学的算法实现 .....       | 131 |
| 一、设计背景 .....                   | 131 |
| 二、教学流程 .....                   | 131 |
| 三、基于历史文化的教学过程设计 .....          | 132 |
| 四、从算法的视角实现进位制之间的转换 .....       | 135 |
| 五、用信息技术实现算法 .....              | 140 |
| 第六节 观点高而起点低的面积法 .....          | 140 |
| 一、面积法 .....                    | 140 |
| 二、多角度认识面积 .....                | 143 |
| 第七节 在超级画板程序设计语言中彰显函数思想 .....   | 144 |
| 一、程序实现 .....                   | 144 |
| 二、讨论与分析 .....                  | 150 |
| 第八节 用超级画板解压轴题 .....            | 150 |
| 第九节 超级画板中的方便面 .....            | 154 |
| 一、超级画板的“免费版”和“方便面” .....       | 154 |
| 二、进入方便面环境 .....                | 154 |
| 三、方便面命令的构造规律 .....             | 154 |
| 四、方便面函数命令关键词 .....             | 155 |
| 第五章 指导免费师范生进行教学研究 .....        | 162 |
| 第一节 用超级画板探究正多边形的性质 .....       | 162 |



|                        |                             |     |
|------------------------|-----------------------------|-----|
| 第二节                    | 用超级画板探究圆锥曲线切线性质·····        | 165 |
| 第三节                    | 用超级画板探究一类定值定点问题·····        | 169 |
| 第四节                    | 动态探究椭圆和双曲线的“第三定义”·····      | 176 |
| 第五节                    | 在动态探究中揭示规律·····             | 179 |
| 第六节                    | 在动态变式中演绎升华·····             | 183 |
| 第七节                    | 圆锥曲线之伴生圆及伴生线的探究·····        | 188 |
| 第八节                    | 用超级画板探究圆锥曲线的垂足曲线·····       | 194 |
| 第九节                    | 用超级画板探究圆锥曲线的斜足曲线·····       | 202 |
| 第十节                    | 用超级画板探究圆锥曲线的两个性质·····       | 207 |
| 第十一节                   | 《变式研究出新意,寻幽探微见深功》的动态解析····· | 213 |
| 第六章                    | 开辟新的研究方向·····               | 217 |
| 第一节                    | 信息技术使数学史融入课堂教学之研究·····      | 217 |
| 一、研究问题                 | ·····                       | 217 |
| 二、研究设计                 | ·····                       | 218 |
| 三、课例中的质的数据             | ·····                       | 218 |
| 四、讨论分析及主张              | ·····                       | 219 |
| 第二节                    | 用超级画板挖掘赵爽弦图的导入功能·····       | 222 |
| 一、导入是课堂教学的重要手法         | ·····                       | 222 |
| 二、以形证数、形数统一的赵爽弦图       | ·····                       | 222 |
| 三、赵爽弦图是很好的导入载体         | ·····                       | 223 |
| 四、用信息技术挖掘史料中的智慧        | ·····                       | 224 |
| 第三节                    | 超级画板支持下的勾股定理·····           | 225 |
| 一、在信息技术支持下研究勾股定理       | ·····                       | 225 |
| 二、历史上的证明方法             | ·····                       | 225 |
| 三、技术让思想更完美             | ·····                       | 228 |
| 四、信息技术深入学科大有可为         | ·····                       | 230 |
| 第四节                    | 超级画板使阿氏圆熠熠生辉·····           | 231 |
| 一、教科书中的阿氏圆             | ·····                       | 231 |
| 二、技术实现                 | ·····                       | 231 |
| 三、教育教学意义的提升            | ·····                       | 232 |
| 四、一个新方向                | ·····                       | 233 |
| 第五节                    | 超级画板支持平方差公式从历史走向课堂·····     | 233 |
| 一、抓住平方差公式产生的功用         | ·····                       | 234 |
| 二、学会欣赏别人的好成果           | ·····                       | 234 |
| 第六节                    | 超级画板支持圆的面积从历史走向课堂·····      | 237 |
| 一、历史上求解圆的面积方法简介        | ·····                       | 237 |
| 二、超级画板的支持下基于数学史的教学案例设计 | ·····                       | 237 |
| 三、课堂教学中的留白艺术           | ·····                       | 240 |



|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 第七节 超级画板支持角平分线从历史走向课堂·····          | 240 |
| 一、“角平分线”的历史·····                    | 241 |
| 二、超级画板支持下基于数学史的教学案例·····            | 241 |
| 三、技术、历史和课程内容可以有机地融合·····            | 243 |
| 第八节 超级画板推动学习理论更好地走进课堂教学的课例研究·····   | 243 |
| 一、信息技术支持“以学定教”理论走进课堂教学的初步实践及解释····· | 243 |
| 二、典型课例·····                         | 244 |
| 三、分析与讨论·····                        | 247 |
| 四、信息技术走进课堂应有恰当的心理理论支撑·····          | 248 |
| 参考文献·····                           | 249 |
| 后记·····                             | 252 |

## 第一章 超级画板的教育价值

信息技术何以要进入数学教育,常有不同的理由.香港指导数学课程发展的特设委员会(2000)指出,在数学教学中运用信息技术能带来下列好处:①信息技术能提升和扩展数学学习经验,鼓励学生积极参与实验性和探究性的活动;②信息技术作为一种工具,能支持、扩展教与学的活动,如练习和个别指导、图表和图形分析、模拟和建模、信息检索和处理、数据处理;③信息技术支持在课堂教学中实施新的教学策略,如为学生提供交互式的学习环境、营造情境学习的氛围.上述表述从数学活动经验的获得、学习情境的营造等方面阐述了信息技术的作用.梁贯成(Leung,2008)认为 ICT(Information and Communication Technology,信息与通信技术)具有 3 个基本特征:①数学运算和交流中的效率;②数学的多元表征,尤其是视觉表征与其他形式表征的有效联结;③学习者与数学之间的相互作用.理解上述 ICT 工具的基本特征,对于数学的教与学有重要的意义,将 ICT 工具引入数学课堂,实际上不是简单地再添一个计算或表征的工具,而是实现数学教与学范式的革新.上述表述从效率、多元心理表征、学习者与学习内容的交互作用等方面阐述信息技术对教学范式的变革作用.章建跃(2012a)认为要发挥信息技术在解决学生数学学习困难上的作用:①数学的高度抽象性,带来数学学习对象的抽象性、数学思维的复杂性——借助技术使学习对象形象化,为概括数学概念、原理提供具体背景支持;②数学概念是相互联系的,联系的广泛性、复杂性与工作记忆的有限性有矛盾,由此产生数学学习困难——借助技术实现“多元联系表征”,减轻工作记忆负担,引导学生发现联系,概括出本质特征;③数学定理、公式、性质等都是“一类数学对象的共性”,是“变化中的不变性、规律性”,它们的呈现方式的静态化、抽象化,掩盖了生动的概括过程,带来了理解困难——借助技术实现数学对象变化过程的“可视化”“连续性”,以有序的变化过程帮助学生发现“不变量”“规律性”;④数学推理论证必须强调逻辑的严谨性,但完整的数学学习过程包含合情推理与逻辑推理,证明方法的发现比推理过程的表述更困难——借助技术加强合情推理,使技术在发现具体例证的共同特征、归纳一般结论、推广结论、探寻证明方法等思维活动中发挥作用;⑤数学中存在复杂的数据处理、代数变换、数字运算等——让技术代替机械重复性劳动,使学生有更多时间用于数学的实质性思考;⑥用数学解决问题,特别是解决实际问题,需要经历数据收集和处理、试验解题方案、验证猜想、调试数学模型、考察特例、推广到更一般情形等过程——在技术的支持下尝试进行探究活动,以提高效率、节约时间.上述表述更是从数学内容特征的深度解读等方面阐述了信息技术进入数学教育的理据.根据 Tall(1991)的 Procept 理论,学习“概念化具体化世界”的数学,主要源自对物理世界、思维世界的感知,信息技术提供了一个可视化的环境,对点、线、图形可操作、可变换等,无疑是一个有力的促进学习的工具;学习“Procept-符号世界”的数学,始于行为,然后用符号将行为压缩为概念,这主要表现在算术、代数等的计算和学习中,这需要信息技术能进行符号运算、能处理数值;学习“形式-公理世界”的数学,概念用形式定义来表



示,通过形式证明获得其性质,进而构建一个公理化的形式系统,或许对数学家而言,在这个世界中,不需要信息技术,但对普通学习者而言,如果能把“抽象栖居在形象”之上,找到认知的固着点,意义或许更大.超级画板能否进入课堂教学,表现在它能否体现或表现上述特征,我们看下面的论述.

## 第一节 “Z+Z”智能教育平台是实施变异理论的一个抓手

数学中充满了“变”,但却是研究变化中的不变量和不变性.教育中的变异学习理论认为,为了认识某个事物,就必须注意到这个事物与其他事物之间的不同,为了注意到这个事物与其他事物在某个属性上的不同,这个属性就必须在某个维度上发生变化.在所有其他属性都保持不变的情况下,这个差异才可以被识别出来.变异学习理论指导下的变式教学也是通过变化,让学习者掌握变化中的不变,所以在数学教学中实施变异学习理论及变式教学,切合了数学学科的特点.为了使好的学习理论更好地指导课堂教学,我们需要一个实施平台.“Z+Z”智能教育平台正是实施变异学习理论的理想平台.这个智能教育平台就是要让学习者在基本的数学活动如计算、抽象、假设(猜想)、证明、应用、验证、建模、提出问题并解决问题的过程中实现“变异”,抓住数学最本质的东西,看到数学活的灵魂,最终使学习者学会做数学.

### 一、变异理论

变异学习理论认为学习意味着发展学生看待事物的方式,而这种方式的建立是基于学习对象关键特点的分辨及对这些特点的同时聚焦.变异学习理论与其他学习理论的最大不同之处在于它对学习内容的关注,并强调学习者通过变异分辨这种学习方法对学习内容的体验.即通过对变异空间的营造,对事物关键特征的聚焦,对变异的体验这样一种学习方式,促进学习者对学习内容的全面理解和认识能力的进一步发展.

学习内容是有逻辑结构和思维特点的特定体系,但这种逻辑结构和思维特点并不能直接转化为学生的认知结构,变异学习理论讨论学习者在某个情境中,怎样通过构建认识学习内容的特定方式来实现这种转化.人的活动都有一定的意向性,变异学习理论十分强调对学习内容的选取和分析.如何处理学习内容是导致不同学习成就的一个最重要因素.学习需要分辨,有效分辨的必要条件是变异.通过变异让学习者逐渐体会到学习内容的不同层面,加深对学习内容的认识,逐渐抓住事物的本质.基于对学习内容的分析,学习者在变异空间里对学习对象的多种属性进行分辨,形成对学习内容的多角度认识.不仅要分辨出关键特征,还要对学习内容的关键属性同时聚焦,当不同的变式出现在同一时段时,它们使学习者认识到学习内容的不同方面.学习内容有层次的体系,有层次地推进变异可用之于概念的形成、问题解决及构建活动经验系统,以便与内容体系的层次性相协调.学习者只有与学习内容直接接触,在变异空间里体验学习内容的各个关键特征,才能获得对事物直观和深刻的认识.

有四种实施“变”与“不变”的范式:对比、分离、类合和融合(植佩敏,马飞龙,2009).对比是指一个事物、概念或现象在某个维度上不同值或特征的变化,对比有助于识别特征,



即“不怕不识货,就怕货比货”.对比关注的是某个“变异维度”(如三角形的形状)上某个“值”(如锐角三角形)的变化,除了我们所关注的这个值外,同一维度上至少还要有另一个值(如直角三角形),同时这两个(或多个)事物的其他维度(如大小保持不变).分离是指学习者将注意力集中于事物、概念或现象的某个变异维度上.学习者所识别的是变化的维度.例如,当一个人注意到三角形在形状上不同时,他就把“形状”这个概念与其他属性(这些属性保持不变)分离开了.呈现两个或多个事物在某个维度上的变化时,就同时出现了对比(如锐角三角形和直角三角形)和分离(如形状这个变异维度),同时还取决于学习者的关注点(如“直角三角形”这种形状,或“形状”这个概念).类合是指关注保持不变的方面.这是教学中经常保持不变的一种范式.如果想将一个特定的值(如直角三角形)从一个事物或多个事物中分离出来,就必须保持那个值不变,而同时让事物之间的其他维度(如大小等)发生变化.融合指的是让学生注意事物、概念或现象同时变化的几个方面.它反映了几个方面之间的关系,以及这些方面与作为整体的学习内容之间的关系.例如,让学习者分别看到需求与供给的变化情况之后,再让他们观察两者的同时变化,可以帮助他们同时思考两者的变化特征,并由此掌握两者之间的关系.在数学教学领域,在经验与实验的基础上,发展出了两种具体的变异方式:概念性变式和过程性变式(鲍建生等,2003).概念性变式与类合和对比这两种变异范式类似,即通过多种不同的具体实例概括出一个共同的核心概念(类合),通过与非标准变式的对比突出概念的本质属性,通过与非概念性变式的对比明确概念的外延,最终达到对概念的多角度理解.过程性变式是在数学活动过程中,通过有层次的推进,使学生逐步形成概念或者解决问题,从而形成多层次的活动经验系统.概念形成过程中的过程性变式,体现了概念形成的逻辑、历史和心理过程的统一.问题解决过程中的过程性变式使学生的问题解决具有多个台阶或多条途径.构建特定经验系统的过程性变式创造了一个多层次的经验和策略系统,使片断的、零散的经验活动构成一个有机的整体.

数学教学领域中的变异学习理论拟合了“做数学”的过程.构建适当的变异空间关注体验,有助于获得有意义的探究性学习,铺设适当的潜在距离关注探索,可以在新知识的探究过程中,促进创造性的问题解决能力的提高.变式教学是有效教学的中国式经验,信息技术的发展,使得这一中国式经验获得了新的发展途径.

## 二、平台简介

变异学习理论“演义”了知识的形成过程,不仅有利于学生通晓知识的来源,构建合理的知识网络,而且还有助于培养学生的探索发现能力,可用之于概念的形成,问题解决及经验活动系统的构建.信息技术为数学内容的重新选择和组织提供了机会,为以前由于过难而无法进行有效教学的重要数学思想的教学提供了途径,能推进数学的探索发现.信息技术能推进变异学习理论在教学中的应用.但实践表明,要有效地推进信息技术在数学教学中的应用,需要深入数学学科的信息技术(张景中,彭翥成,2009).

超级画板是张景中院士及其研究团队自主研发的优秀国产软件,曾在墨西哥蒙特雷第十一届国际数学教育大会上作了专场展示,也是中国唯一被介绍的具有自主知识产权的数学软件,被多个国家的与会专家誉为“高智能高质量的数学软件”.“Z+Z”智能教育



平台,即超级画板,将动态几何、符号演算、自动推理、编程环境以及课件制作等进行有机地集成,发展成集动态图形与动态计算于一体的逻辑动漫平台,这一基于动态几何的平台,能画、能算、能动、能变、能测,是实验探索得心应手的环境.超级画板能很好地满足作图、测量、计算、编程,以及制作课件或演示现成的课件等数学教学活动的需要.超级画板就是我们手中的“笔”和“纸”,能画出具有动态几何图形特点的图形,图中的对象可以用鼠标拖动或用参数的变化来驱动,其他对象会自动调整其位置,以保持图形原来设定的几何性质.超级画板能画含有可变字母参数的函数图像,还能在曲线上取点,画切线,对曲线作几何变换,跟踪变化的曲线以形成曲线族,对曲线下的区域填充,作积分分割等.超级画板能测量图形中的角度、长度和面积,点的坐标及曲线的方程,表达式的值,测量出来的数据随图形的变化而变化.作图、测量、计算,改变图形、再测量、再计算,以发现变化中的不变,这是实施变异学习理论的一个切入口.超级画板能进行符号计算、数值计算,能实现任意精度的计算.超级画板可以编写和运行简单的程序,还能用程序作图.

超级画板的动态作图、动态计算、动态测量,以及编程功能于生动形象中把知识产生的发展过程和逻辑关系阐述得更为清晰,以此平台来实施变异学习理论,能更有力地营造变异空间,不仅能以趣引思,还能使学生从动手操作到动脑思维的过程中更好地体验事物的关键特征,在动态变异中改变了知识的获取方式,培养了探究创新能力,有助于概念的理解、问题解决能力的培养和数学活动经验系统的构建.数学是在一个变化的过程中发现一个不变的事实,超级画板的动态性为营造变化的过程提供了技术上的有力支持,使做数学的方式发生变化成为可能,相应地,在教学上也应反映这种进步.

### 三、教学实施

波利亚(G. Polya, 1887~1985)认为,正在形成中的数学是一门实验性的归纳科学,已经形成的数学是一门系统的演绎科学,因此,既要教猜想,也要教证明.这种教学方式突出了数学知识发现与形成的过程,使学习者在变异中发现不变的结论,也改变了学习者在学习活动中的角色,他们像研究者一样经历了发现、探索数学的活动.超级画板是学习者改变学习角色,体验变异,获取数学结论的一个有力抓手.一个精当的例子胜过一打说明.下面通过一个精当的例子说明超级画板在推动变异学习理论在概念形成、问题解决和经验活动系统构建等方面的独特作用.

超级画板有助于深入理解概念,发展概念.传统教学讲中位线,都是在 $\triangle ABC$ 中,先作 $AB, AC$ 的中点 $E, F$ ,然后连接 $EF$ ,然后告诉学生,这就是中位线.而使用超级画板,则可以让学生在动态中理解得更深入一点.先在底边 $BC$ 上任取一点 $D$ ,跟踪 $AD$ 的中点 $E$ ,作点 $D$ 的动画,则可以让理解中位线的本质:底边上任意一点与顶点的连线的中点都在中位线上,换句话说,中位线是由无数个中点 $E$ 的构成的集合,而传统教学所取的只是底边线段 $BC$ 的两个端点罢了.再扩展一下,一一对应的思想便呼之欲出.运用超级画板不仅在动态中形象地展示了中位线的形成及其本质,以及所蕴涵的思想,还可以多角度地认识中位线这个概念.例如,在 $\triangle ABC$ 的边 $AB$ 上任取一点 $D$ (自由点),在边 $AC$ 上任取一点 $E$ (自由点),把此两点的参数设为 $t$ ,然后作一个关于 $t$ 的动画,并运用超级画板