

大学数学教学系列教材

# 高等数学

## 学习提要与习题精练 (上)

封汉颖 主编



中国林业出版社

大学数学教学系列教材

# 高等数学

## 学习提要与习题精练

(上册)

主 编：封汉颖

副主编：王琳静 董臻圃

编著者：(按姓氏笔划为序)

王丽丽 王琳静 王力彪

高改良 董士杰 董臻圃

中国林业出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习提要与习题精练. 上册/封汉颖主编. —北京: 中国林业出版社, 2005. 8

大学数学教学系列教材

ISBN 7-5038-4053-6

I. 高… II. 封… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 095526 号

出版 中国林业出版社 (100009 北京西城区刘海胡同 7 号)

E-mail: cfphz@public.bta.net.cn 电话: 66184477

网址 www.cfph.com.cn

发行 新华书店北京发行所

印刷 中国农业出版社印刷厂

版次 2005 年 8 月第 1 版

印次 2005 年 8 月第 1 次

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 12.5

字数 250 千字

印数 1~3500 册

定价 12.80 元

## 前 言

高等数学、线性代数和概率论与数理统计这三门课程是各工科院校必修的重要基础理论课程，也是全国硕士研究生统一入学数学考试的必考课程，因而，学习好这些课程的重要性是不言而喻的。

但是，对学生来说，学习好数学课程并不是一件容易的事情。那么如何才能学习好数学课程呢？一般来说，必须抓好以下四个环节：课前预习、课堂听课、课后复习和练习，这四个环节一环紧扣一环，不可脱节。为了帮助学生课后复习和练习，我们在总结多年教学实践的基础上，组织编写了这套丛书。

本丛书由《高等数学学习提要 and 习题精练》、《线性代数学习提要 and 习题精练》和《概率论与数理统计学习提要 and 习题精练》三本组成，分别与同济大学编写的《高等数学》、《线性代数》和浙江大学编写的《概率论与数理统计》教材配套使用。为便于学生复习，我们列出了每章的重点、难点，教学要求和内容归纳等，而后编写了与教学同步的习题、综合题和自测题，分别作为学生课后的作业、习题课作业和自我测试使用。我们精选的习题题型广泛，由易到难，由单一到综合，希望学生通过对这些习题的精练，能够深刻理解所学课程的基本概念，熟练掌握所学课程的基本方法，做到循序渐进，举一反三，熟能生巧。同时，根据有关专家建议，我们还在各章自测题后选辑一些历年考研试题并附要点评注。除了全书基本内容的稳定和适时修订，这部分内容将在每年重印时，更新当年考研内容，与时俱进，激发学生的学习兴趣和提高本书的适用性和教学效果。同时，章末最后部分，列“自我小结”一项，对学生来说，通过小结，可以检查本章学习的思路方法和成效，找到薄弱环节，并适时补救；而这又是学生训练文字表达能力的一个有效环节。对任课教员来说，阅读学生的小结，更有利掌握本课程教学动态，不断改进教学方法，以求更好的效果。本书可供开设相应数学课程的学校使用，不但可以进一步规范 and 统一教学要求，而且也便于学生课后复习作业和教师习题批阅，初稿曾经多期试用，取得良好的教学效果，并受到学生的欢迎。

由于水平有限，缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

2005年3月

# 目 录

前 言

上 册

<b>第一章 函数极限与连续</b> .....	(1)
习题一 函数与初等函数 .....	(3)
习题二 数列的极限 .....	(7)
习题三 函数的极限, 无穷大与无穷小 .....	(9)
习题四 极限的运算法则 .....	(11)
习题五 极限存在准则, 两个重要极限 .....	(13)
习题六 函数的连续性与间断性 .....	(15)
习题七 初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质 .....	(17)
综合题 .....	(19)
自测题 .....	(25)
<b>第二章 导数与微分</b> .....	(33)
习题八 导数的概念 .....	(35)
习题九 导数的四则运算、反函数的导数 .....	(37)
习题十 初等函数的求导问题 .....	(39)
习题十一 高阶导数、隐函数的导数、由参数方程确定的函数的导数, 相关 变化率 .....	(41)
习题十二 函数的微分、微分在近似计算中的应用 .....	(45)
综合题 .....	(47)
自测题 .....	(51)
<b>第三章 中值定理和导数的应用</b> .....	(61)
习题十三 中值定理 .....	(63)
习题十四 洛必达法则 .....	(67)
习题十五 泰勒公式 .....	(69)
习题十六 函数的单调性, 函数的极值 .....	(71)
习题十七 函数的最大值和最小值 .....	(75)
习题十八 曲线的凸凹性与拐点、函数作图 .....	(77)
习题十九 曲率、方程的近似解 .....	(79)
综合题 .....	(81)
自测题 .....	(85)
<b>第四章 不定积分</b> .....	(91)
习题二十 不定积分的概念与性质 .....	(93)

习题二十一 换元积分法 .....	(95)
习题二十二 分部积分法 .....	(99)
习题二十三 几种特殊类型函数的积分 .....	(101)
综合题 .....	(103)
自测题 .....	(107)
<b>第五章 定积分</b> .....	<b>(113)</b>
习题二十四 定积分的概念和性质 .....	(115)
习题二十五 微积分基本公式 .....	(119)
习题二十六 换元积分法 .....	(123)
习题二十七 分部积分法 .....	(125)
习题二十八 反常积分 .....	(127)
综合题 .....	(129)
自测题 .....	(133)
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	<b>(139)</b>
习题二十九 平面图形的面积 .....	(141)
习题三十 体积、平面曲线的弧长 .....	(143)
习题三十一 功、水压力及引力、平均值 .....	(145)
综合题 .....	(147)
自测题 .....	(151)
<b>第七章 向量代数与空间解析几何</b> .....	<b>(157)</b>
习题三十二 空间直角坐标系 向量及其线性运算 向量的坐标 .....	(159)
习题三十三 向量的乘法运算 .....	(163)
习题三十四 曲面及其方程 空间曲线及其方程 .....	(167)
习题三十五 平面及其方程 空间直线及其方程 .....	(173)
综合题 .....	(177)
自测题 .....	(183)

## 第一章 函数极限与连续

**重点:**函数的概念、极限的概念、无穷小、极限的计算、函数的连续性概念.

**难点:**数列和函数极限定义,极限求法.

**教学要求:**理解集合概念,会集合的基本运算;理解映射、函数、反函数、复合函数和初等函数的概念,了解函数的基本性质,会建立简单实际问题的函数关系式。

理解极限的概念,掌握极限的性质及四则运算法则,掌握极限存在的两个准则,并会用它们求极限,熟悉两个重要极限求极限的方法;

理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小代换求极限;

理解函数连续性的概念,了解间断点的概念,会判断间断点的类型;了解初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质,并会运用这些性质。

**主要内容:**

### 一、映射与函数

#### 1. 集合

- (1) 集合的概念
- (2) 集合的运算
- (3) 区间和邻域

#### 2. 映射

- (1) 映射概念
- (2) 逆映射与复合映射

#### 3. 函数

- (1) 函数概念
- (2) 函数的几种特性
- (3) 反函数与复合函数
- (4) 函数的运算
- (5) 初等函数

### 二、极限

#### 1. 数列的极限

- (1) 数列的极限定义
- (2) 收敛数列的性质

#### 2. 函数极限

- (1) 函数极限定义
- (2) 函数极限的性质

#### 3. 无穷小与无穷大

- (1) 无穷小
- (2) 无穷大
- (3) 无穷小与无穷大的关系

#### 4. 极限运算法则

5. 极限存在准则与两个重要极限

6. 无穷小的比较

### 三、函数的连续性

1. 函数的连续性与间断点

(1) 函数的连续性

(2) 函数的间断点

2. 连续函数的运算与初等函数的连续性

(1) 连续函数的和、差、积、商的连续性

(2) 反函数与复合函数的连续性

(3) 初等函数的连续性

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性与最大值最小值定理

(2) 零点定理与介值定理



### 习题一 函数与初等函数

1. 填空题:

(1) 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x+3)}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

(2) 设  $f(x) = \arcsin x, \phi(x) = \ln x$ , 则  $\phi[f(x)]$  的定义域是\_\_\_\_\_.

(3) 函数  $y = \sin(\omega x) + 1$  的周期是\_\_\_\_\_.

2. 选择题:

(1) 设  $f(x) = \begin{cases} x^3, & -3 \leq x \leq 0 \\ -x^3, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ , 则此函数是 ( )

- (A) 有界函数 (B) 奇函数 (C) 偶函数 (D) 周期函数

(2) 函数  $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$  是 ( )

- (A) 奇函数 (B) 偶函数  
(C) 既是奇函数, 又是偶函数 (D) 非奇非偶函数

(3) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 0 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$  则  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  和  $f(2)$  分别为: ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$  和 1 (B) 0 和 1 (C)  $\frac{1}{2}$  和 0 (D) 1 和 0

3. 下列函数是否相同, 为什么?

(1)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  与  $g(x) = x+1$ ; (2)  $f(x) = \sqrt{x^2}$  与  $g(x) = |x|$ .

4. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin |x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$ , 求  $f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(2)$ .

5. 判定下列函数的奇偶性:

(1)  $y = \sin x + \cos x + 1$ ;

(2)  $y = \frac{a^{-x} + a^x}{2}$ ;

6. 指出下列函数哪些是周期函数, 并指出它的周期.

(1)  $y = \sin^2 x$ ;

(2)  $y = x \cos x$ .

7. 试证函数  $f(x) = \ln x + x$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加.

8. 求函数  $y = e^x - 1$  的反函数, 并指出定义域.

9. 作出下列函数图像:

(1)  $y = x^3 + 1$ ;

$$(2) y = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}.$$

10. 下列函数由哪些简单函数复合而成:

(1)  $y = 2^{\sqrt{x}}$ ;

(2)  $y = \sin^2(2x + 3)$ ;

(3)  $y = \cos \sqrt{1 + x^2}$ .

11. 设  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 问 (1)  $f(x + a)$ ; (2)  $f(x^2)$ ;

(3)  $f(\sin x)$  ( $a > 0$ ) 的定义域各是什么?

12. 设  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  ( $x \neq 1$ ), 求  $f\{f[f(x)]\}$ .

13. 设  $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$ , 求  $f(x)$  及  $f(\cos x)$ .

## 习题二 数列的极限

1. 填空题:

- (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则点到  $\{x_n\}$  中的点 \_\_\_\_\_ 落在  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  之外.
- (2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , 则  $a$  \_\_\_\_\_  $b$ .
- (3) 设数列  $\{x_n\}$  无界, 则数列  $\{x_n\}$  \_\_\_\_\_.

2. 选择题:

- (1) 对于数列  $\{x_n\}, n \in \mathbf{N}$ , 当  $n > \mathbf{N}$  时,  $x_n > 0$ , 则 ( )
- (A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$  (B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$
- (C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0$  不一定存在 (D) 上述三种情况均不成立.
- (2) 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = b$ , 则 ( )
- (A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在 (B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在
- (C) 当  $a = b$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (D) 上述三种情况无法不成立
- (3) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a > 0$ , 则 ( )
- (A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 但不等于  $a$
- (C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不一定存在 (D) 上述三种情况均不成立

3. 观察下列数列的变化趋势, 指出哪些数列有极限, 哪些数列没有极限.

- (1)  $x_n = 2 + \frac{1}{2^n}$ ; (2)  $x_n = (-1)^n$ ;

- (3)  $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ ; (4)  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ .

4. 用极限的定义证明

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$ .

5. 设数列  $\{x_n\}$  有界, 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 试证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

6. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, a > 0$ , 证明存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $x_n > 0$ .

7. 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛的充要条件是  $\{x_{2k}\}$  与  $\{x_{2k-1}\}$  收敛于同一极限.

对于数列  $\{x_n\}$ , 若  $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty), x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$ .

证明:  $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

### 习题三 函数的极限,无穷大与无穷小

1. 填空题:

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} =$  \_\_\_\_\_.

(2) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则直线  $x = x_0$  为函数  $f(x)$  的图形是 \_\_\_\_\_.

(3) 若函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$  \_\_\_\_\_.

2. 选择题:

(1) 当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  的左、右极限为 ( )

(A) 都等于 1 (B) 都等于 -1 (C) -1 和 1 (D) 1 和 -1

(2) 无穷小量是 ( )

(A) 比任何数都小的数 (B) 零  
(C) 以零为极限的函数 (D) 以上三种都不是

(3) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则 ( )

(A)  $f(x)$  为无穷小量 (B)  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大量  
(C)  $f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$  (D)  $f(x + x_0) \neq f(x - x_0)$

3. 根据极限的定义证明:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4;$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8.$

4. 设  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ 2x+1, & x \geq 1 \end{cases}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ , 并问  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  是否存在?

5. 证明:若  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时,函数  $f(x)$  的极限均为  $A$ ,则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

6. 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1-e^{\frac{1}{x}}}$  不存在.

7. 根据定义证明:当  $x \rightarrow 0$  时,函数  $y = \frac{1+2x}{x}$  是无穷大,问  $x$  应满足什么条件,能使  $|y| > 10^4$ .

8. 函数  $y = x \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是否有界?又当  $x \rightarrow \infty$  时,这个函数是否为无穷大,为什么?

9. 证明:函数  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上无界,但当  $x \rightarrow +0$  时,这函数不是无穷大.



### 习题四 极限的运算法则

1. 填空题:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x - e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^4 + bx^3 + 2}{x^3 + x^2 - 1} = -2$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ , 则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 选择题:

(1) 设  $f(x)$  有界,  $\lim g(x) = 0$ , 则 ( )

- (A)  $\lim[f(x) + g(x)]$  存在 (B)  $f(x) + g(x)$  不一定有界  
 (C)  $\lim f(x)g(x) = 0$  (D) 上述三种情况均不成立

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( )

- (A)  $\infty$  (B)  $-\frac{7}{3}$  (C) 0

(D) 上述三种情况无法不成立

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( )

- (A) 1 (B) 0 (C)  $\infty$

(D) 上述三种情况均不成立

3. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2+x}{1-x^3} \right).$