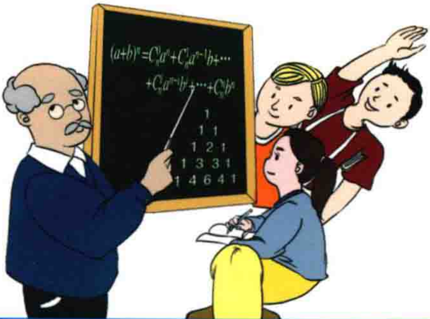


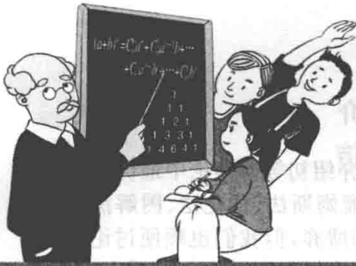
数林外传系列

跟大学名师学中学数学

同中学生谈博弈

◎盛立人　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

同中学生谈博弈

◎ 盛立人　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书从一些生活中的例子入手，介绍初等博弈论中最优对策的基本计算方法，包括鞍点法、威廉姆斯法、优化法、图解法等. 虽然主要讨论的是如何计算零和博弈，但我们也顺便讨论了在实际中更重要的非零和博弈，如囚徒两难论、"玩命"博弈、军备博弈等，还特别讨论了著名的纳什平衡理论. 本书讲述方式虽然十分浅显，但书中的计算方法则更为重要. 如果读者能够学会这些方法，就可以正确处理日常生活中大多数的决断问题，让自己的生活更加丰富多彩. 这也就使得本书的读者对象更为广泛. 本书除供中学生阅读外，还可供社会其他各界人士阅读.

图书在版编目(CIP)数据

同中学生谈博弈/盛立人编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.1

（数林外传系列：跟大学名师学中学数学）

ISBN 978-7-312-03106-9

Ⅰ. 同… Ⅱ. 盛… Ⅲ. ① 博弈论—青年读物 ② 博弈论—少年读物 Ⅳ. O225.49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 273526 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

安徽江淮印务有限责任公司印刷

全国新华书店经销

开本：880 mm×1230 mm 1/32 印张：3.25 字数：67 千

2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

印数：1 — 4000 册

定价：10.00 元

前　　言

随着世界范围内经济和科技的迅猛发展,“博弈”一词几乎已成为日常生活用语,乃至常常出现在一些小说里.但到底什么是博弈?人人都说它重要,却总是说不太清楚.一个最普通的说法是,学了博弈,我们便能在任何游戏甚或竞争里常常立于不败之地.读了本书你会知道,这显然是一种误导.

但是博弈论确实能使你学会许多意想不到的方法,这些方法的作用是使你能像牛顿常说的“处处慎思”那样.就是说,你常常会用最好的思考方式处理日常问题,尤其是碰到决断问题时更是如此.从这个意义上来说,跟中学生谈谈博弈是有好处的.

但遗憾的是,作为一门比数学影响更大的、立足于数学与经济两栖的博弈论,相对于中学的数学层面来说,实在是太博大精深了.此外,博弈论里的数学与常规数学又不大一样,这就给普及博弈论带来困难.我们也常见许多讲述“博弈”的通俗小册子,但那里的说法大都是讲故事式的,很少与数学或度量挂上钩.

在本书中,我们尽量用中学生能读懂的数学知识来讲解一些基本的博弈实例,并介绍一些有用的博弈方

法.博弈论里正有这么一方“小花园”,可以只用求解线性方程组以及解简单不等式来完成工作,只是在理解上需要比中学生有更深入的思考而已.由于运用中学数学来推广博弈论是个新课题,我们的想法一定会遭遇不少困难,例如,至少在深浅方面便很难把握,但作者一定会尽力而为.此外,作者并不是博弈论的专业工作者,书中一定会有许多不恰当的地方,还要请方家们多提宝贵意见.

盛立人

2012 年 4 月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　次

1 无处不在的博弈

假如你喜欢读书，那么不管你读的是小说还是历史，或者是科学书，你都会碰到许多有关博弈的故事. 那些博弈故事多少次曾吸引着你，使你感到人类因这等睿智而变得伟大. 但博弈又岂止是在书中，你的身边同样也有许多博弈事件等你去试探和运作，小到下一盘棋，大到一项决断等等，这样的例子真可谓不胜枚举. 正是由于无处不在的博弈，久而久之便产生了一门学科，它隶属于数学，通常称为**博弈论**，也叫**对策论**.

人们常说，人类有个共同的主题，即所谓斗争，或者说是竞争. 若竞争就得讲究策略. 所谓策略，即指两个或多个个体为达到某种事态而实施的控制局势的方法. 人们在这种情景下竞争，是因为我们有着选择价值观的自由. 而博弈论便是一门研究有关竞争和合作的严肃的数学理论.

在把数学思想用于策略研究方面，或者说，关于博弈论的雏形思想，可以毫不夸张地说，我们的祖先早就为人类留下了一份宝贵财富，即那本脍炙人口的《孙子兵法》. 此外，我国古代著名的"田忌赛马"可以说是世界上最早出现的博弈之例！在西方，直到 1944 年才出版这方面的第一本著作，即著名数学家冯·诺依曼（J. Von Neumann）和莫根施特恩（O. Morgenstern）合著的名著《博弈论与经济行为》. 受到近

代人文科学发展的影响,此书总结了许多科学方法和强有力的数学工具,它们已被经济学家广泛地应用到现代经济理论中.

博弈往往出现在两个或多个个体——称为玩家——各自都可以自由地从一系列有意义的选项中采取行动的时候.这些选项可以称为策略.随着策略的不同选择,将会出现许多不同的、称为局势的状态(在我们下面要讨论的例子中,局势常常用数字来表示).例如,在田忌赛马中,两个玩家都有上、中、下三匹马,即有三个策略可供选择,而双方每出一匹马即构成了一个局势.因此,每位玩家都可以对最后出现的局势表示出某种程度的偏爱.而博弈论要研究的是最佳策略的选取、平衡局势的形成、联盟的组成与稳定、公平分配和纠纷的解决.一切选择还都必须按照游戏规则有条不紊地进行,在个体或联盟按照各自的价值标准下一次又一次地运作,其中常常可能包含不定因素或偶然因素.

在许多博弈的情况里,局势常常是处于不协调状态的.例如交战国的双方,或体育比赛的两个对手.在这里,对手双方的地位是反向目的进行的:一个输,则另一个赢!但在另一些博弈情形里,有时也讲究合作.例如拥有许多子公司的经济实体或拥有众多成员的政党.有时这种联盟表现得坚实,有时则表现得很脆弱.例如,表现在生意场上,就得看经济环境是否繁荣和健康.

作为一种数学理论,不用说,度量化应是它的生命.当我们研究博弈时,不能泛泛地谈论一些想法,而应实实在在地用度量来说明结论的正确性,否则,严肃的理论便成为“间谍

小说"了！因此，本书便是贯彻这样一切以计算为主体的精神.我们总是从几个例子出发来讲述博弈概念.其中我们尽可能给某些问题以有限的理论提升.

要注意的是，这些例子的共同特点是博弈双方都处于平等地位；还要注意，我们提供的策略只是一种最佳的思考方案，而不是稳操胜券的方法，并且我们也不能提供这样的方法.试想：如果每个对手同时都和田忌一模一样地思考，比赛会有什么样的结果呢.因此，像下面的"抢 30 游戏"和"填桌游戏"这一类问题，由于博弈双方处于不平等地位，可以把它们纳入智商测验范围，而不在我们的讨论之列.

抢 30 游戏：两人轮流从 1 起数数，至少报一个数，至多报两个数，先报到 30 者为赢家.

由游戏规则容易理解，能报到 27 的人一定是赢家，但能报到 24 的人一定能报到 27，等等.因此你只要抓住报 3 的倍数你就一定是赢家.所以先报的人一定是输家！

填桌游戏：两个人手里各有一把五分镍币，轮流在一张小方桌上放上一枚.规则只有一条：任何两枚镍币不能有丝毫重叠.就这样逐渐将小方桌填满.现在约定：最后一位再也不能在小方桌放置镍币的玩家为输家.

理论上讲，后放置镍币的人一定是个输家！理由如下：先放的人只要用一下"对称原理"就行了.就是说，先放的人如把镍币放在小方桌的中心处，如果下一步运作时他的对手放在 A 处，则轮到他时可以将镍币放在与 A 完全（中心）对称的 B 处.以后每一步都严格按照这个对称原理进行.只要他的对手有处可放，他一定就有地方可放.所以先放者必赢

无疑.

由于博弈论本来属于大学教育内容,我们这本小册子显然不能任意使用各种数学知识,因此我们只能在中学的层面来讲解博弈论,但是即便如此,相信你将学会许多博弈方法,并惊奇于博弈论的精妙,乃至回味无穷.同时,我们也尽量介绍一些涉及博弈论中的顶尖内容(那当然很少),例如纳什平衡理论(如果你看过美国大片《美丽心灵》,你一定忘不了那位主人公!).

为中学生介绍博弈论的一个重要理由是,博弈论作为介入经济学的数学理论,已经成为当代人不可或缺的必读理论之一.举例来说,1994 年的诺贝尔经济学奖即授予三位博弈论专家,1996 年诺贝尔经济学奖又同样授予两位与博弈论一脉相承的信息经济学开拓者.这就无怪乎诺贝尔经济学奖获得者保罗·萨缪尔逊(Paul Samuelson)会发出这样的感慨:"要想在现代社会做一个有文化的人,你必须对博弈论有一个大致了解."①

① 无独有偶,数学家罗伊德·沙普利(Lloyd Shapley)也是因为成功地将博弈论应用到经济学中而获得 2012 年诺贝尔经济学奖.

2　最简单博弈的解——鞍点

我们从一个实例开始关于博弈的讨论.

选址博弈　有两位企业家李某(称为玩家一)与王某(称为玩家二)决定在山区附近的交通要道处合资兴建一座快餐店.王某认为快餐店应建在山下,但李某则认为应建在高山处.两人无法决断.山区附近的道路分布如图1所示,那里有四条南北向平行的国道,记为 A',B',C',D',以及四条东西向省级公路,记为 A,B,C,D.这八条公路共有16个交叉点,快餐店应当设在这些点上.而各点的海拔高度由表1定出.按上文约定,这张表格称为(支付)局势表.

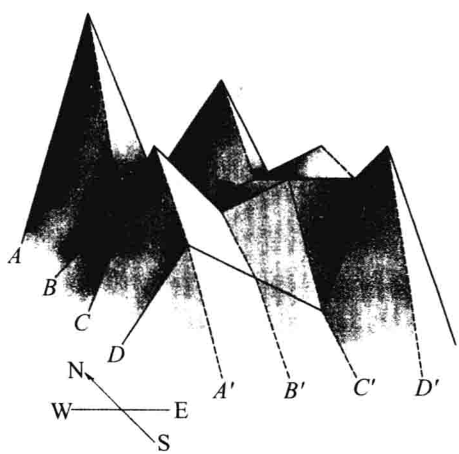


图1　选址博弈的公路分布图

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

王某与李某决定采取下面的博弈办法来解决他们的问题.李某从 A,B,C 及 D 四条公路中任选一条,同时王某也从 A',B',C'及D'四条公路中任选一条(一般说来,选择的时候应当背靠背).最后,快餐店将建在他们选择的公路的交点上.由于两人的要求不同,这就形成了一宗博弈.

表 1 选址对策局势表(单位:百米)

	A'	B'	C'	D'	min
A	7	2	5	1	1
B	2	2	3	4	2
C	5	(3)	4	4	3^*
D	3	2	1	6	1
max	7	3^*	5	6	3

李某是个客观主义者,他考虑的是 A,B,C 及 D 四条公路的最低点,即数字 1,2,3 及 1.我们把这三个数记在表 1 的最右侧.他注意到这些数中最大者为 3.这个高度位于公路 C 上,他就选择了公路 C,以便保证他的快餐店至少有 300 米的高度.这个选择相当明智,因为当他选择 C 后,不管王某如何选择,300 米的高度是能够保证的(在公路 C 上,这是个最低点).而且,说不定情况会更好,如果王某选择了公路 A'的话!

碰巧王某也在作自己的**最坏情形分析**,他列出了对他来说最**坏**的高度,即四条公路 A',B',C',D'上的四个最高点,高度分别为 7,3,5 及 6.我们把这三个数记在表 1 的最下方.从这三个数中他找到最小数是 3,于是他便选择了经过高度为 3 的点的那条公路 B',以保证他的快餐店高度至多不会超过 300 米.他的想法与李某的想法一样.

结果是,快餐店应建在公路 C 和公路 B'的交点处,即 300

米高度处.两个人的选择实际上是一致的.双方都按照自己的意愿达成完满的结果.可以称博弈的结果(C,B')为**最佳局势**.

在博弈论里,常常将上述两人达成一致结果的最佳局势(C,B')称为这个博弈的解.

应当说,我们问题的上述解法是最好的!为什么呢?

要说明这一点,让我们不按照两人上述的想法进行选择,看看会有什么结果.

假如李某一开始就选择公路A,因为那上面有个最高点:700米.而假如他的意图被王某发现,则王某立即选择公路D',于是得到的局势为(A,D'),这对于李某来说是最坏的情况:快餐店必须建在山脚下!同理,如果一开始王某选了公路C',那里有个100米高的点,则李某很可能选择公路A.结果得到的局势(A,C'),得到的高度是500米,这是王某不愿意的.因此,如果双方都不清楚对方的意图,那么,我们上面最初的考虑应当是最保险、最不会吃亏的办法.进一步观察可以发现,在我们的做法下,两个人其实大可不必**秘密投票**.因为即使李某选择C已被公开,王某因他的偏爱,实际上从中什么好处也没有得到,所以他此时非选公路B'不可.

我们这里不经意地也给俗语"退一步海阔天空"做了一个很好的数学解读!

回到刚才王某与李某的博弈,我们发现他们最后成交的局势点(C,B')有个特点:在公路C处它是最低的,而在公路B'上它是最高的.这在几何上是什么形状呢?容易看出来这里有个马鞍面,而我们的解正在这个马鞍点上.我们就把得到的解称为鞍点.

把刚才的讨论稍稍总结一下，顺便给出几个术语.

一个上述的局势表也称为支付表格或支付矩阵.表格里的每一横行(竖列)可称为玩家一(玩家二)的可用策略，表格中的每个数称为一个局势，以它所在的横行和竖列作为标记.例如上面的(C,B'),(A,D')等.

上文已经说了，玩家一的目的是希望得到支付表格中的数愈大愈好.他采取的办法是：取每一横行的最小数，然后取这三个最小数中的最大数；最后，将这个最大数所在的横行作为其策略选择.同理，玩家二的目的是希望得到支付表格中的数愈小愈好.他采取的办法是：取每一竖列中的最大数，然后取这三个最大数中的最小数；最后，将这个最小数所在的竖列作为其策略选择.如果碰巧这两个数相等，我们就说这个博弈有解，这个数便称为博弈的值.我们在下节中会证明，这个值一定是个鞍点.

在我们的例子中，数 3 便是这个博弈的值，而玩家一(玩家二)的选择 $C(B')$称为最佳策略.而最佳的意思是，任何别的策略选择(至少对一个玩家)有可能带来不理想的后果.

虽然我们已经学会了求解最简单的博弈问题，如上述一类选址问题，但因为它太简单了，我们无法想象出现下面这些问题时怎么办：鞍点一定存在吗，如果存在，同一个博弈问题里会出现几个鞍点吗，等等.我们也将在下一节中回答这些问题.

最后说一个约定.在上文所说的博弈里，玩家一(即李某)的偏爱，是要求支付表格里的数愈大愈好，而玩家二(即王某)则相反，他的偏爱是要求支付表格里的数愈小愈好.请读者记住，这是本书自始至终的约定.

3　最大最小定理

为了进一步进行数学讨论，我们需要一些记号. 先将一个博弈问题写成下面的形式：

$$\Gamma = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\},$$
$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\},$$

其中 S_1 与 S_2 分别表示玩家一与玩家二的可用策略的集合（一般情形下，它们可能不止有三个策略）. $\boldsymbol{A}$ 是一个支付表格（矩阵），如下所示：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

数 a_{ij} 的下标 (i,j) 的意义是这个数位于第 i 横行、第 j 竖列的交叉处. 表格 $\boldsymbol{A}$ 可以称为 3×3 表格（矩阵）. 最一般情形是下面（由 m 个横行、n 个竖列组成）的 $m\times n$ 表格：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

上一节中所用的求解技巧，用一些记号可以陈述如下. 我们以 3×3 表格为例.

玩家一的做法是算出三个数 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{1j}$, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{2j}$, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{3j}$ 中的最大者

$$\max\{\min_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{1j}, \min_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{2j}, \min_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{3j}\}.$$

这个数也可以记成

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} \min_{1\leqslant j\leqslant 3} a_{ij}.$$

它表示先对列标 j 求最小,再对行标 i 求最大.

完全一样,玩家二的做法是算出三个数 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{i1}$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{i2}$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{i3}$ 中的最小者

$$\min\{\max_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{i1}, \max_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{i2}, \max_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{i3}\}.$$

这个数可以记成

$$\min_{1\leqslant j\leqslant 3} \max_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{ij}.$$

它表示先对行标 i 求最大,再对列标 j 求最小.

有了这些记号,现在可以回答上一节中提出的问题.这些问题的答案是:

鞍点可能不存在;有鞍点时,鞍点可能不止一个;出现鞍点的博弈行为中,从玩家的最坏情况分析往往可以得到最好的解.我们将这些结论写成定理,注意我们并未限制在 3×3 博弈情形.就是说,对于 $n\times n$ 博弈情形,下面的命题与定理也是对的.

命题 1 在任何情况下,下面的不等式总是成立的:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij}. \tag{1}$$

此不等式的意思是说,对任何一个支付矩阵,各横行最小数中的最大者总是小于各竖列最大数中的最小者.

证明 对每一 i,有

$$\min_j a_{ij} \leqslant a_{ij};$$

对每一 j,有

$$a_{ij} \leqslant \max_i a_{ij}.$$

因此,对一切 i 与 j,有

$$\min_j a_{ij} \leqslant \max_i a_{ij}.$$

上式的左边与 j 无关,两边对 j 取最小值,得到

$$\min_i a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij};$$

再对 i 取最大值,即得

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij}.$$

命题证毕.

命题 2 若

$$\max_i \min_j a_{ij} = v = a_{i^*j^*} = \min_j \max_i a_{ij} \tag{2}$$

成立,则一定会出现鞍点的情形.就是说,对任何 i,j,下式成立:

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}. \tag{3}$$

证明 若式(2)成立,则必有一个 i^* 和一个 j^*,使下面的两式成立:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j}, \quad \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*}.$$

因此

$$\max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j}.$$

但由于

$$\max_i a_{ij^*} \geqslant a_{i^*j^*} \geqslant \min_j a_{i^*j},$$

故得

$$\max_i a_{ij^*} = a_{i^*j^*} = v = \min_j a_{i^*j}.$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com