文都教育®

高等院校数学经典教材

同步辅导及考研复习用书

经济数学 线性代数

解题方法技巧归纳

（与人大版赵树嫄主编·四版配套）

◎毛纲源 编著

△ 专题讲解 涵盖重点难点

△ 通俗易懂 帮助记忆理解

△ 同步学习 深入辅导指点

△ 复习迎考 获益效果明显

买书送课： 配套精品课程讲解

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

文都教育

高等院

同步辅导及考研复习用书

经济数学 线性代数

解题方法技巧归纳

（与人大版赵树嫄主编·四版配套）

⊙毛纲源 编著

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳/毛纲源编著.—武汉：华中科技大学出版社，2014.12

ISBN 978-7-5609-9118-4

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①毛…　Ⅲ.①经济数学-研究生-入学考试-题解　②线性代数-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①F224.0-44　②O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 289934 号

经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳　　　　**毛纲源　编著**

策划编辑：王汉江(QQ：14458270)
责任编辑：王汉江
特约编辑：陈文峰　李　焕
封面设计：杨　安
责任监印：朱　霞
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：北京世纪文都教育科技发展有限公司
印　　刷：三河市航远印刷有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：26
字　　数：480 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：46.00 元

华中出版

郑重声明

买正版图书　听精品课程

毛纲源编著的《经济数学(微积分)解题方法技巧归纳》《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳》《经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印毛纲源老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010－88820419,13488713672
电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取文都名师精品课程。

华中科技大学出版社
北京世纪文都教育科技发展有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所
刘　岩
2015年3月

前　　言

编写本书的目的是为帮助经济类和其他文科类在校学生和自学者学好经济数学(线性代数),为他们备考研究生提供一份复习资料.事实证明,购买本书的读者已绝大部分从中受益.

本书将经济数学(线性代数)的主要内容按问题分类,通过引例归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧.它不同于一般的教科书、习题集和题解,自具特色.

本书实例较多,且类型广、梯度大.例题一部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版(以下简称"人大版")的《线性代数》(第4版)中的典型习题(原习题的题号在例序后用表示章序、类序(A类还是B类)、题序和小题序的三个或四个字加上方括号标志.例如,例3[2A3(2)]表示例3是人大版《线性代数》(第4版)第2章A类第3题的第2小题).例题的另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题,其中数学试卷三的考题(适用经济类、财政类专业的考生)绝大部分都已收入(例序后用表示年份的数字和数学试卷类别加上方括号标志.例如,例1[2010年3]表示例1是2010年数学试卷三中的考题).

采用人大版《线性代数》(第4版)中典型习题,是因为该书是目前我国文科类专业使用量最大的一本教材,习题部分比较准确地反映了学习经济数学(线性代数)的基本要求.通过这些例题的学习将有利于促进学生全面掌握经济数学(线性代数)的基础知识、基本理论和基本方法,正确理解该课程的基本内容.

需查找人大版《线性代数》(第4版)中习题解答的读者,请参看书末附录.

通过统考试题的研讨,使有志于攻读硕士学位的同学"平战结合",了解考研试题的特点及其逐年发展趋势,从知识、题型、方法和技巧上作好应试准备,做到心中有数.这些考题并非都是难题,其突出特点是全面、准确地体现了教学大纲的要求.不少试题的原型就是《线性代数》中的习题.多做考题,并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力及加深经济数学(线性代数)的理解都是大有好处的.

考虑到经济类和其他文科的学生和自学者学习经济数学(线性代数)的困难,编写此书时,在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点.此外,还在不少例后加写注意部分,以总结解题经验,避免常犯错误.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学(线性代数)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士研究生的青年,本书更是良师益友;对于从事经济数学(线性代数)教学的教师也有一定的参考价值.

鉴于目前有关读物尚缺，适用于理工科学生阅读的线性代数参考读物，不适宜文科学生阅读的特点，作者使用多年来在教学过程中所积累的资料，汇集历年来数学试卷三的绝大部分考题和其他试卷的部分考题，编写成这本书，为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力. 希望本书能激起在校的和自修的广大同学学习经济数学（线性代数）的兴趣，这是作者最大的心愿.

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教！

另外，准备考研的朋友，可以参考本人编写的由华中科技大学出版社出版的一套考研书籍：

◎ 考研数学常考题型解题方法技巧归纳（数学一、二、三）

◎ 考研数学客观题简化求解（数学一、二、三）

毛纲源

2015 年 3 月

目　　录

第1章 计算行列式

1.1 计算排列的逆序数

一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$($i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 n 个不同数码)的逆序的总数,称为该排列的逆序数,记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 其求法有两种. 一种是从排列中的第 2 个(自然排列的左边算起)数码 i_2 开始计算,求出比它大且在其左边数码的个数,即为与该数码构成的逆序数的个数. 同法再算出在第 3 个数码 i_3 左边且比它大的数码的个数,即为与该数码构成的逆序数的个数……最后算出第 n 个数码 i_n 的左边比它大的数码的个数,即为与该数码构成的逆序数的个数,将所有这些个数相加,即得该排列的逆序数.

另一种算法是先求出在数码 1 的左边且比 1 大的数码的个数,再算出在数码 2 的左边且比 2 大的数码的个数……最后算出在数码 $n-1$ 的左边且比$n-1$大的数码的个数,将所有这些个数相加即为该排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1 求下列排列的逆序数:

(1) [1A8(3)]* 36715284; (2) [1A8(4)] $n(n-1)\cdots 21$.

解 (1) **解一**

排列中的数码	3	6	7	1	5	2	8	4
与各数码构成的逆序数		0	0	3	2	4	0	4

故排列 36715284 的逆序数为 $0+0+3+2+4+0+4=13$.

解二 在该排列数码中 1 的左边且比 1 大的数码有 3 个,因而与数码 1 构成逆序的个数为 3. 同法可求得与数码 2,数码 3,数码 4,数码 5,数码 6,数码 7 构成逆序的个数分别为 4,0,4,2,0,0,0. 因而所求的逆序数为

$$N(36715284)=3+4+0+4+2+0+0+0=13.$$

(2)

排列中的数码	n	$n-1$	$(n-2)$	$\cdots$	3	2	1
与各数码构成的逆序数		1	2	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	$n-1$

故 $$N(n(n-1)\cdots 21)=1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=n(n-1)/2.$$

例 2 下列( )是 4 级偶排列.

---

* [1A8(3)]表示该例是人大版《线性代数》(第 4 版)第一章习题中 A 类第 8 题的第 3 小题. 下同.

(A) 4321　　(B) 4123　　(C) 1324　　(D) 2341

解　仅(A)入选. 因为

对于(A), $N(4321)=3+2+1=6$, 4321 是偶排列;

对于(B), $N(4123)=1+1+1=3$, 4123 是奇排列;

对于(C), $N(1324)=1$, 1324 是奇排列;

对于(D), $N(2341)=3$, 2341 是奇排列.

例 3　选择 a 与 b, 使(1) $4a2b3$ 成偶排列; (2) $1a25b4869$ 为奇排列.

解　(1) 排列 $4a2b3$ 中缺数码 1,5, 故 a,b 只能取 1 或 5.

当 $a=1,b=5$ 时该排列为 41253, 其逆序数为 4, 因而 41253 为偶排列. 但当 $a=5$, $b=1$ 时, 该排列为 45213, 它是排列 41253 将 5 与 1 对调的结果, 奇偶性改变, 它为奇排列. 应选 $a=1,b=5$.

(2) 在排列 $1a25b4869$ 中缺 3,7, 故 a,b 只能取 3 或 7.

若取 $a=3,b=7$, 则排列 132574869 的逆序数为 5, 因而该排列为奇排列. 若取 $a=7,b=3$, 则排列为 172534869, 它是排列 132574869 将 3,7 对调的结果, 排列的奇偶性改变, 则 172534869 为偶排列. 应选 $a=3,b=7$.

习 题 1.1

1. [1A8(1),(2)]　求下列排列的逆序数:(1) 41253;(2) 3712456.

2. 求 a 与 b 使(1) $4a2b5$ 成偶排列;(2) $3a124b6$ 为奇排列.

3. 排列 $3972i15j4$ 是偶排列, 则 $i=$____, $j=$____.

4. 下列排列为偶排列的是(　　).

(A) 4312　　(B) 51432　　(C) 45312　　(D) 654321

1.2　利用定义计算行列式或求其部分项

(一) 用定义计算行列式的方法

用行列式定义计算或证明行列式一般适用于零元素较多的行列式或低阶行列式和某些特殊的行列式.

含零元素较多的行列式常称为稀疏行列式, 可用定义直接计算其值. 因行列式的项中有一因数为零时, 该项的值为零, 故只需求出所有非零项即可. 如何求出呢? 常用下述两法:

【法一】　求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项.

当行列式含大量零元素, 尤其是行列式的非零元素乘积项只有一项时, 用此法计

算较简便.

例 1　用行列式定义计算下列 n 阶行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) [1A12(2)] $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解　D_1 与 D_2 均为稀疏行列式,可按行列式定义直接计算其值.

(1) 由行列式定义,D_1 的每一非零项由不同行、不同列的 n 个非零元素乘积所组成.第 1 行的非零元素只有 $a_{1n}=1$,第 2 行的非零元素只有 $a_{2,n-1}=2,\cdots$,第 $n-1$ 行的非零元素只有 $a_{n-1,2}=n-1$,第 n 行的非零元素只有 $a_{n1}=n$.而这 n 个非零元素又在不同的列,因此 D_1 除去等于零的项外,只有一项非零项,即

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!.$$

这一项的行下标排列为自然排列,列下标排列为 $n(n-1)\cdots 21$,其逆序数为 $N(n(n-1)\cdots 21)=n(n-1)/2$,故 $D_1=(-1)^{n(n-1)/2}n!$.

(2) 同法可求 D_2,除去等于零的项外,非零项只有一项,即

$$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!.$$

这一项的行下标为自然排列,而列下标排列为 $23\cdots(n-1)n1$,其逆序数为 $N(23\cdots(n-1)n1)=n-1$,故　　$D_2=(-1)^{n-1}n!$.

例 2[1A11]　设 n 阶行列式有 n^2-n 个以上元素为零,证明该行列式为零.

解　根据行列式定义,该行列式展开后都是 n 个元素相乘,而 n 阶行列式共有 n^2 个元素,若等于零的元素个数大于 n^2-n,那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个,因而该行列式的每项都至少含一个零元素,所以每项必等于零,故此行列式等于零.

【法二】　求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列,即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{1j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2.1}$$

可知,非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个,相应地该行列式就含多少个非零项;如果这样的非零项一个也没有,则不含非零项,行列式等于零,这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列,先由第 1 行的非零元素及其位置,写出 j_1 可能取的数码;再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中,求出 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列.

大家知道,上(下)三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.2.2}$$

下面证明次三角行列式的值等于次对角线上元素的乘积,并带上适当正、负号,即

例 3 设 $$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $$D_n = \Delta_n = (-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.2.3}$$

证 D_n 与 Δ_n 均为稀疏行列式,可按行列式定义直接证明.

(1) D_n 中第 1 行非零元素为 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$,故 $j_1=1,2,\cdots,n-1,n$. 同法可求得 $j_2=1,2,\cdots,n-1$; $\cdots$; $j_{n-1}=1,2$; $j_n=1$.

下面求 $j_1j_2\cdots j_n$ 可能取的所有 n 元排列.

因 $j_n=1$,故 $j_{n-1}=2,j_{n-2}=3,\cdots,j_2=n-1,j_1=n$,即 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能取一个 n 元排列 $n(n-1)\cdots 21$. 于是 D_n 的非零项只有一项,即

$$D_n=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

(2) 同法可证 $\Delta_n=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

注意 若 $n(n-1)/2$ 为偶数,即若 $n=4t+1$ 或 $n=4t$,其中 t 为正整数或零,则该排列$(n(n-1)\cdots 21)$为偶排列,该项带正号;若 $n(n-1)/2$ 为奇数,即若 $n=4t+2$ 或 $n=4t+3$,该排列为奇排列,该项带负号.

例 4 用定义计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}.$$

解一 D 为稀疏行列式,可按行列式定义求其值.求 D 的值时,只需求出 D 中所有非零项即可.求解时应注意 D 为 1986 阶行列式.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$,因而 j_1 只能取 1985,即 $j_1=1985$.同理可知 $j_2=1984, j_3=1983, \cdots, j_{1985}=1, j_{1986}=1986$,于是 $j_1, j_2, \cdots, j_{1985}, j_{1986}$ 在可能取的数码中,$j_1 j_2 \cdots j_{1985} j_{1986}$ 只能组成一个 1986 元排列:

$$1985 \quad 1984 \quad \cdots \quad 2 \quad 1 \quad 1986,$$

故 D 中非零项只有一项,即

$$D=(-1)^{N(1985\ 1984\ \cdots\ 2\ 1\ 1986)} a_{1,1985}\, a_{2,1984} \cdots a_{1985,1}\, a_{1986,1986}.$$

因 $N(1985\ 1984\ \cdots\ 2\ 1\ 1986)=1984+1983+\cdots+2+1=1985\times 992$ 为偶数,故

$$D=(-1)^{1985\times 992} 1\times 2\times 3\times \cdots \times 1985\times 1986=1986!.$$

解二 因 D 中位于不同行、不同列的非零元素只有

$$a_{1,1985}=1,\ a_{2,1984}=2,\ \cdots,\ a_{1985,1}=1985,\ a_{1986,1986}=1986,$$

故 D 中非零项只有一项.注意到 1985×992 为偶数,得到

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{N(1985\ 1984\ \cdots\ 2\ 1\ 1986)} a_{1,1985}\, a_{2,1984} \cdots a_{1985,1}\, a_{1986,1986} \\ &=(-1)^{1985\times 992} 1\times 2\times 3\times \cdots \times 1985\times 1986=1986!. \end{aligned}$$

例 5[1A12(4)] 用行列式定义计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (a_{ij}\neq 0).$$

解 由 D 中第 1 行和第 2 行的非零元素分别得到

$$j_1=1,2,3,4,5; \quad j_2=1,2,3,4,5.$$

其余三行只有两个非零元素,故 $j_3=1,2$; $j_4=1,2$; $j_5=1,2$.

因 j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 在上述可能取得的数码中不能组成一个 5 元排列,这说明一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 的列下标 $j_3 j_4 j_5$ 至少有一个要取 3,4,5 中之一,因而一般项中 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中至少有一个因子取零,即一般项为零项,所以 D 中没有非零项,故 $D=0$.

注意 (1) 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{sj_s}$ $(2\leqslant s\leqslant n)$,其列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 所能取的不同数码个数小于行数 s,则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s,j_{s+1},\cdots,j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成,即 D 中没有非零项,从而 $D=0$. 例如,在五阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

中,a_{1j_1} 的列下标 $j_1=1,3$;a_{2j_2} 的列下标 $j_2=1,2,3,4,5$;a_{3j_3} 的列下标 $j_3=1,2,3,4,5$;a_{4j_4} 的列下标 $j_4=1,3$;a_{5j_5} 的列下标 $j_5=1,3$. 如 $j_1=1$,则 $j_4=3$,而 j_5 没有数码可取. 因而 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 一个排列也不能组成,即 D_5 中没有一个非零项,故 $D_5=0$.

(2) 一般地,若 n 阶行列式中位于某 k 行、l 列交叉处元素全部为零,且 $k+l>n$,则该行列式之值等于零.

例 6 证明
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}.$$

证 令 $N(j_1j_2j_3)=k$. 由行列式定义得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
$$=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^k a'_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}+\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^k a_{1j_1}a'_{2j_2}a_{3j_3}+\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2}a'_{3j_3}$$
$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}.$$

(二) 确定行列式中某项前面所带的符号

如果该项元素的行(或列)下标已按自然顺序排列,则该项符号由其列(或行)下标组成的排列的逆序数确定.如果其逆序数为偶数,则该项带正号;如果其逆序数为奇数,则带负号.如果该项元素的列下标和行下标都没按自然顺序排列,则该项符号由其行下标组成的排列的逆序数与列下标组成的排列的逆序数之和来确定.如果其逆序数之和为偶数,则该项带正号;如果为奇数,则带负号.

例 7[1A10] 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|(i,j=1,2,3,4,5)$ 中带有负号的项.

解 该项元素的行下标已按自然顺序排列,而列下标的排列缺数码 5,1,故 k,l 只能取 1 或 5,即 $k=1,l=5$ 或 $k=5,l=1$.

当 $k=1,l=5$ 时,该项为 $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$,其行下标已按自然顺序排列,该项的符号由列下标组成的排列的逆序数确定.因

$$N(31425)=1+2+0+0+0=3$$

为奇数,31425 为奇排列,故当 $k=1,l=5$ 时,$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$ 为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

当 $k=5,l=1$ 时,$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$ 为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有正号的项,这是因为在排列 31425 中仅对换两个数码 1 和 5,奇偶性发生变化,所以排列的奇偶性也发生改变.于是 35421 为偶排列,$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$ 为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带正号的项.

例 8 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中,下列各元素乘积应取什么符号?

(1) [1A9(1)] $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$; (2) [1A9(3)] $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$;

(3) [1A9(5)] $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$.

解 (1) 因为行下标已按自然顺序排列,该项的符号由列下标组成排列的逆序数来确定.又因

$$N(532416)=4+2+1+1+0+0=8$$

为偶数,所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 在六阶行列式中取正号.

(2) 因为行下标和列下标都没按自然顺序排列,该项的符号由行下标组成的排列与列下标组成的排列的逆序数之和来确定.又因

$$N(251463)=2+0+3+1+0+0=6,$$

$$N(136254)=0+2+0+2+1+0=5.$$

而 $N(251463)+N(136254)=11$ 为奇数,所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 在六阶行列式中取负号.

(3) 因为列下标已按自然顺序排列,该项的符号由行下标组成排列的逆序数来确定.又因

$$N(654321)=5+4+3+2+1+0=15$$

为奇数,所以 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 在六阶行列式中取负号.

例 9 若 $(-1)^{N(1k4l5)+N(12345)}a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$ 是五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项,则 k,l 之值及该项符号为(　　).

(A) $k=2,l=3$,符号为正　　(B) $k=2,l=3$,符号为正

(C) $k=3,l=2$,符号为正　　(D) $k=3,l=2$,符号为负

解 仅(C)入选.该项元素的列下标已按自然顺序排列,而行下标的排列缺数码 2,3,故 k,l 只能取 2 或 3,即 $k=2,l=3$ 或 $k=3,l=2$.

当 $k=2,l=3$ 时,$N(12435)=1$,而 $N(12345)=0$,故该项符号为负.当 $k=3,l=2$ 时,$N(13425)=2$,而 $N(12345)=0$,故该项符号为正.

(三) 求行列式中的部分项

此部分项常为含特定元素的所有项,一般用行列式的定义求出.

例 10 写出五阶行列式 $D_5=|a_{ij}|_{5\times5}$ 中包含 a_{13},a_{25} 并带正号的所有项.

解 D_5 中包含 a_{13} 及 a_{25} 的所有项数为 5 元排列 $35j_3j_4j_5$ 的个数.因 j_3,j_4,j_5 所能取的排列是 1,2,4 这三个数码所取的 6 个全排列,故 $35j_3j_4j_5$ 能组成的 5 元排列共有 6 个,即

$$35124,\ 35142,\ 35214,\ 35241,\ 35412,\ 35421.$$

相应的项分别为

$$(-1)^{N(35124)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}=-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54},$$
$$(-1)^{N(35142)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}=a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},$$
$$(-1)^{N(35214)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},$$
$$(-1)^{N(35241)}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}=-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51},$$
$$(-1)^{N(35412)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}=-a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51},$$
$$(-1)^{N(35421)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}=a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

故包含 a_{13},a_{25} 并带正号的所有项为

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},\quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

例 11 试求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数,已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $f(x)$ 中含 x 因子的元素有

$$a_{11}=-x,\quad a_{21}=x,\quad a_{23}=2x,\quad a_{32}=x,$$
$$a_{35}=3x,\quad a_{44}=x,\quad a_{52}=-7x.$$

因而，含 x 因子的元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1;\quad j_2=1,3;\quad j_3=2,5;\quad j_4=4;\quad j_5=2.$$

于是，含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取 $j_1=1,j_2=3,j_3=2,j_4=4$ 与 $j_2=1,j_3=5,j_4=4,j_5=2$，相应的 5 元排列是 13245，31542，含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{N(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{N(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4.$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

为求 x^3 的系数，需求出含 x^3 的项. 这只要在上面取 x 的 5 个列中排除两个即可. 为此需取 $j_2=1$（因而 j_1 不能再取 1），j_3 取 2（因而 j_5 不能再取 2）. 为使其列下标为 5 元排列应取 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}$，相应项为

$$(-1)^{N(31245)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{52}=(-1)^2\cdot 1\cdot x\cdot x\cdot x\cdot 2=2x^3.$$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 2.

习 题 1.2

1. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) [1A12(1)] $\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{vmatrix}$；　(2) [1A12(3)] $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$；

(3) $D_4=\begin{vmatrix}a_1&0&b_1&0\\0&c_1&0&d_1\\a_2&0&b_2&0\\0&c_2&0&d_2\end{vmatrix}$；　(4) $D_5=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\0&a_{42}&a_{43}&0&0\\0&a_{52}&a_{53}&0&0\end{vmatrix}$.

2. 写出四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中所有含 a_{13} 且带负号的项.

3. 求出 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数：

$$f(x)=\begin{vmatrix}5x&1&2&3\\2&1&x&3\\x&x&2&3\\1&2&1&-3x\end{vmatrix}.$$

4. 计算下列 n 阶行列式：