□ 高等学校教材

初等几何研究

第二版

李 晟 李长明

高等教育出版社

高等学校教材

初等几何研究

Chudeng Jihe Yanjiu

第二版

李　晟　李长明

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版是根据1991年12月颁发的中学教师进修高等师范专科《"初等数学研究"教学大纲》编写的《初等数学研究》。现根据当前教学需求分成两册出版，本书属于初等几何部分。修订后的内容包括几何证明、机器证明、几何计算、初等变换、轨迹、作图、立体图形的性质、立体几何证题法。全书的证明采用框图式，前后关联一目了然。

本书可作为师范类院校"初等几何研究"课程的教材，亦可作为中学教师培训的教程，还适合广大数学爱好者阅读、欣赏。

图书在版编目（CIP）数据

初等几何研究 / 李晟，李长明编. --2版. --北京：高等教育出版社，2015.1
ISBN 978-7-04-039611-9

Ⅰ.①初… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.①初等几何－高等师范院校－教材 Ⅳ.①O123

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第073543号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　封面设计 姜 磊　版式设计 余 杨
插图绘制 杜晓丹　责任校对 殷 然　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京玥实印刷有限公司印刷		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×960mm 1/16		
印　张	36	版　次	1995年6月第1版
字　数	680千字		2015年1月第2版
购书热线	010－58581118	印　次	2015年1月第1次印刷
咨询电话	400－810－0598	定　价	45.00元

物 料 号　39611－00

序

李长明教授是我熟悉的数学界前辈,著述颇丰,尤以研究初等数学见长。他教学经验极为丰富,先后在贵阳师范学院(现贵州师范大学)、贵州大学、贵州民族学院(现贵州民族大学)、贵州教育学院(现贵州师范学院)任教,曾担任贵州省数学会理事长。李晟同志是在李长明教授亲手培养、指导下成长起来的新一代数学才俊。二李合作的《初等几何研究(第二版)》的前身是《初等数学研究》的几何部分,此次出版时增加了"几何定理的机器证明"和"立体几何证题法"的内容。我认为增加得很好,极有眼光,极有见地,尤其是在"几何定理的机器证明"一章中表现出来的独特创见和深入浅出、曲径通幽的讲解,一下子拉近了初等数学和近代数学的距离,拉近了青少年数学爱好者与数学大师的深邃思维之间的距离,其意义非凡。

正如吴文俊先生指出的,计算"虽繁而易,根本原因正在于它已经机械化。而证明的巧而难","其根本原因也正在于它并没有机械化"。但是,尽管"证明机械化的设想"早在17世纪就由Leibniz提出,其发展却非常缓慢。20世纪20年代的一些基础性研究,其结果又"大都是否定的",例如Gödel的不可判定性定理。直至20世纪50年代中期人工智能的出现,使得用启发式方法求解各种问题,包括数学命题,成为一种潮流。继Newell和Simon在1956年用机器证明方法证明了罗素的《数学原理》中的几十条定理以后,美籍华裔数学家王浩先生又在1958年只用几分钟就机器证明了该书的几百条定理,至今传为美谈。另外,数学中有一些计算,例如不定积分,对它们没有一定的方法,往往要靠经验、靠聪明,靠技巧,这些"计算"也需要机械化,这些在20世纪60年代也成为人工智能学者研究的对象,先由Slagle,后由Mosis,研究出功能相对完备的能够求解不定积分的程序。另一种定理证明技术是由Robinson在1965年提出的消解法(又称归结法),但是其复杂性之高(证明两个连续函数之和还是连续函数,用了十万步还没有证出来)令人望而却步。

由吴文俊先生在20世纪70年代开创的数学定理机械化证明(后来又进一步发展为数学定理自动发现)使这个领域进入了一个新的纪元。由于Tarski在此之前已经证明了欧氏几何是可判定的,选择欧氏几何的证明机械化为突破口顺理成章。同时也归功于"几何问题代数化"思想具有的普适性,使吴先生以深刻的代数几何理论为基础提出的"吴方法"的应用领域很快就超越了初等几何,接着也超越了几何学本身而进入现代数学的大片领地。有两件事实可以证明"吴方法"在国际上引起的反响。第一件事是国际著名人工智能杂志 Artificial

Intelligence 在 1986 年出专刊,以文集形式介绍吴方法及其应用;第二件事是吴文俊先生在 1997 年荣获国际上专为自动定理证明设立的 Herbrand 奖。吴文俊先生的爱好之一是研究中国古代数学史,他发现中国古代数学的一大特点是重视算法,重视问题的现实求解。吴文俊先生以自己的贡献发扬光大了中国古代数学的这种传统。

直到“吴方法”出现之前,在历史上的各种数学机械化证明方法中,还没有一种(至少在其工作原理上)是可以和初等数学接轨的,这使它们成为了只有数学家(或逻辑学家、人工智能学者)可以享用的奢侈品,而使一般的数学青少年难以亲近。恰恰是吴文俊先生的数学定理机械化证明以平面几何定理的机械化证明为突破口,为学过平面几何的大众创造了一窥数学定理机械化证明基本原理的机会。又是张景中先生另辟蹊径创造了一种新的几何定理机械证明方法,用面积原理、消点法等更符合中学生证明平面几何时的传统思维方式来引导求索者,并最后形成“教育数学”的理念。在此基础上,本书作者用四两拨千斤的娴熟手段,以初等几何学为平台,对这两方面的工作做了完美的诠释,让中学生也可以坐上直通车,对数学定理机械化证明的云雾庐山实行抵近观察,这在数学教育上与张景中先生的教育数学理念一脉相通,也是该理念的进一步发展,有可能演化成横跨数学和教育两个领域(如果包括心理学,是三个领域)的一个新的研究方向,就如吴先生的数学机械化已经发展成一个当代的研究方向一样。本书作者强调和力推初等数学方法之深意不可低估。被华罗庚先生尊称为老师的熊庆来先生一贯认为:同一个数学定理的证明,用初等方法证明的难度大于用高等方法,因而其成就也大于用高等方法。用高等方法证明重要数学定理固然是一大成就,但日后再次用初等方法证明仍然是又一大成就。初等方法之不可被轻视于此可见一斑。

作序者合卷赞曰:是谁在横刀立马,一桥飞架初等平面几何和近世代数几何,使得艰深数学理论的本质在读者面前卸下其神秘的外表?竟是我李大教授及其传人。善哉![1]

陆汝钤

2014 年 7 月

① 编者按:陆汝钤是中国科学院院士,计算机软件和人工智能专家。

第二版前言

本书第一版于1995年出版，转眼将近廿年，受出版社的嘱托进行修订，除在原有的章节里，增添、更换了个别新的更有代表性的例题，并将一些思路理得更加自然，证法更加清晰以外，主要增加了两点新内容，删去一章，现将增删的理由陈述如下：

几何命题的机器证明，是本书新增的一章。

几何中的许多名题，结构之美，让人赞叹；涵意之广，启人深思；证法之妙，令人叫绝。因此，丰富多彩、引人入胜的几何学向来吸引着众多学子，满怀兴致，欲往几何园地一览奇景。然而，证法之妙的另一面，却是题目变化万千、证法因题而异。一条辅助线引不出来，便陷入困境、一筹莫展。这种恼人的一题一法，又让人心生怯意。因此自古就激发着人们去寻觅适用所有几何难题的通用证法，或生动一点地说：梦想一个“万能”证法，像套公式一样，一步一步地去完成证明。笛卡儿的坐标法，正是迈向这“万能”证法的征途上，树起的一个了不起的里程碑。因为把几何问题分门别类，借助坐标都可化成相应的算式去演算。例如，三点共线的难题，几何证法各有妙处，但化为坐标法，就只需计算相应的行列式为零，即得所证。照此，多点共线，也迎刃而解，只不过计算量大一些罢了。由此可见坐标法开启了“万能”证法的大门。至此，一题一法发展成一类一法，且各类证法还有共同之处。留下的问题乃是如何将各类问题化归成某个统一的规范算式，再觅一个可行且比较简便的算法，交计算机去执行。这便是吴文俊创建的几何问题之机器证明。

简述这一过程，说明机器证明的重要性。这也是本书在几何证法之后，紧接着新辟一章机器证明的主要原因。

又因，机器证明的两项重大成果分别是我国两位数学家吴文俊、张景中所创建的，并已在国际上广泛地流传和应用。因此，在国内也更应广为传播，而教材便是传播的最好工具，这是增加此章的原因之二。

吴氏机器证法(简称“吴法”)为什么没有在国内广为流传，这与一个不贴切的称谓有关，有人把吴法称为“不可读”的机器证明，甚至说“计算机懂，人不懂”。这更让人纳闷、费解。机器执行的是人创建的方法，并编出相应的指令(程序)，岂有人不懂而机器却懂！这种称呼给吴法披上了一层神秘的外衣，让人望而却步，阻碍了吴法在国内的普及。

其实，吴法最关键的一招是“三角化”，这正是吴文俊高明之处。如果我们领会了“三角化”的精妙，便会发现它与上述笛卡儿的一类一法，是一脉相承的。

没听说笛卡儿坐标法是“不可读的”,一脉相承的吴法当然也非“不可读”。因为知其然,又知其所以然,便应是可读的。能讲清这一点,才宜把它纳入教材之中。这是增加此章的原因之三。至于张景中的机器证明,犹如横空出世,大放异彩。因为它不需要借助坐标,故机器证明的过程实际上就是几何推理的再现。

此外,另增加的一章是立体几何证题法,虽说平面几何证题法也可用于立体几何,但立体几何有别于平面几何的是需要空间想象力,而培养、增强空间想象力也与证法息息相关。笔者尚未见到这方面的专论,因此,这一章也是一种尝试,仅是两位作者在教学和解题实践中,摸索和总结的心得和体会。如有不妥,甚至有误也在所难免,还望广大读者指正和补充,以臻完善。

与初版有较大变化的还有,删去了“制图基本知识”这一章。因为它与初等几何关系不大,它的价值在于工程上的应用,也是工科的基础课。作为师范院校的学生,如果将来教学上有需要,只要在立体几何中空间想象力训练有素,制图、识图便不在话下。因此为省篇幅,删去为佳。

最后,给同学们的几句话:

为了给教师有选择的余地,适当的增添了一些有关的内容。又为了讲清来龙去脉,篇幅不免增大了许多。因此,同学不应苛求教师讲完书中全部内容,那是不可能的,因为课时有限;何况,少而精,乃是传道授业应该遵循的不二法则,以少胜多又是讲课艺术追求的最高境界。对大学生来说,重要的是从老师的讲解中受到有益的启示,而非知识的一味堆积。因为大学生更应培养和具备举一反三、独立钻研的能力。因此,在老师的引导下自学有关的、自己又感兴趣的内容,才是学习的最佳途径。

依笔者意见,第一、二、八章是讲授的重点。第一章的几何证法,因分类过细,一一去讲,既琐碎又有重复之嫌。只能择其一二详加论述,以求触类旁通,第二章已如上面所述,内容较新,值得给学生介绍。第八章是平面几何证题法的发展,既有推理能力的训练,更侧重在培养和发展空间想象力,这正是中学数学中的一根软肋。能在这三方面有较大的收获,就算对初等几何精髓有所了解、有所研究。

本书的修改稿是两位作者经常研究、磋商的结果,并由李晟执笔完成的。

李晟、李长明

2013.12.11

记号与符号

符号	表示的意义
$\triangle$	三角形
Rt$\triangle$	直角三角形
$\varparallelogram$	平行四边形
$\angle$	角
$\because$	因为
$\therefore$	所以
AB	以 A、B 为端点的线段,有时也表此线段之长
$\overline{AB}$	以 A 为起点以 B 为终点的有向线段,有时也表示此有向线段的代数值
S_{ABC}	ΔABC 的面积
$S_{\overline{ABC}}$	$\Delta\overline{ABC}$的有向面积
$S_{A_1A_2\cdots An}$	多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积
$S_{\overline{A_1A_2\cdots An}}$	有向多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积
$\odot$	圆
$\odot(O)$	以 O 为圆心的圆
$\odot(O,r)$	以 O 为圆心、r 为半径的圆
$\odot(ABC)$	过 A、B、C 三点的圆,即 ΔABC 的外接圆
$P\in\odot(O)$	P 点在以 O 为圆心的圆上
$L=AB\times CD$	L 是直线 AB 与 CD 的交点
$m=\alpha\cap\beta$	m 是二平面 α、β 的交线
图 3.5(b)	第三章例 3.5 的第二个图
图 5.012	第五章非例题的第 12 个图
(2.3,5)	第二章例 2.3 的第 5 个算式
(8.021)	第八章非例题的第 21 个算式

目　　录

绪　言

§0.1　几何学研究的对象

一、作为经验科学的几何学——现实空间的直接反映

人类生存的现实空间,本质上是一个物质世界. 在认识这个物质世界的过程中,有时需要撇开物质的物理、化学等属性,抽象地考察它的形状、大小和位置. 譬如说,车辆平稳地行进,关键在于车轮的形状,无论是古代锯刨而成的木轮,或是现代铸锻而成的火车铁轮,或是轻便、耐磨又可充气的橡胶轮……尽管制造它们的物质和过程可以千差万别,但其轮廓的形状都具有如下的特性

边缘各处到中心的距离彼此相等

这恰是几何上之"圆"的概念,也正是车辆行进时保持平稳的根本原因. 当然,轮的大小和位置也与车辆的运行和各种不同的用途有着密切的关系.

显然,无论是车辆、舟楫、桥梁……各式各样的工具,都有一个确定其形状、大小和位置的问题. 岂止是工具,人类在认识世界、改造自然的过程中,始终离不开考察物质形状、大小和位置的问题.

众所周知,有关田地的确定与测量,也是图形赖以抽象出来的源泉. 几何历史都讲到: 古代因河流泛滥后,需要重新确定田土原先的相互位置,于是田地边界的形状及其所围定范围的大小,也都是人们关心而又需要解决的问题.

由此可见: 人们在认识世界、改造世界的过程中,很自然地抽象出描述物体形态的图形,而考察种种图形的形状、大小和位置关系,正是古典几何研究的内容. 基于对几何学的这种认识,恩格斯才把数学定义为

纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系

——恩格斯. 反杜林论. 北京: 人民出版社,1956:157.

这样,侧重对空间形式的研究,便成为几何学的内容;而着重于研究量的关系时,又可细分为代数、三角和微积分……众多的数学分支.

二、作为思维科学的几何学——开创公理化的先河

几何学诞生之后,在很长的时期内,其研究内容处处依附着具体的图形. 事实上,几何学的众多内容,都是受图形直观的启示而得. 因此,可以说,反映事物

形状的图形是古典几何赖以发展的基础.然而,即使直观图形占主导地位的几何学初期阶段,逻辑推理的作用也是必不可缺的,而且它和图形的直观启示相辅相成,相得益彰.事实上,从直观上最容易发现:矩形的二对角线等长.但无论测量工具多么精密,也会有误差,不论测量验证了多少个形状和大小不同的矩形,也只停留在不完全可靠的经验阶段.因为矩形无穷无尽,验证再多,也是很有限的一小部分.只有运用全等三角形(图 0.1),通过$\triangle ABC \cong \triangle DCB$而断定“二对角线相等”对任意矩形皆真,才能使人确信无疑.

又如直角三角形边长间的关系,在有悠久文化历史的希腊和我国,都发现得很早.最古老的《周髀算经》就曾记载着商高答周公“故折矩以为勾广三,股修四,经隅五”之说,据考证,《周髀算经》成书于公元前 100 年左右,即是说,早在公元前 100 多年,古人就已经知道,以 3、4 为直角边的三角形,其斜边为 5,如图 0.2;再对一些直角三角形的三边勾、股、弦进行量算,也不难把勾 3、股 4、弦 5 的关系概括为

$$勾^2 + 股^2 = 弦^2.$$

即

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

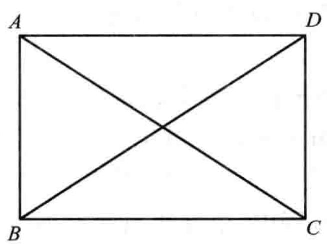

图 0.1

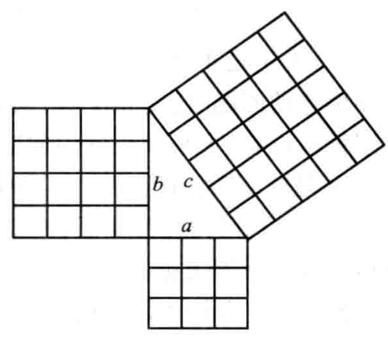

图 0.2

但是,如前一样,验证的再多,也不足以使人信服.这简洁、美妙的等式,在形状各异的无法穷尽的所有直角三角形中,怎知永无例外的情形?所以,即使几何学产生的初期,由图形观察、量算而总结出来的性质、关系,都还要依靠逻辑推演,使其上升为让人确信无疑的理性知识,这种努力也是促使古代几何学蓬勃发展的重要因素.在中国,赵爽构造“弦图”开证勾股之先河,以后用图证勾股者不计其数.在古希腊,相传,毕达哥拉斯(Pythagoras,前 580 至前 570 之间—约前 500)发现勾股定理时,“欢欣之情,不可言状,宰了 100 头牲畜来祭缪斯女神(Muses,神话中掌管文艺、科学的女神),以酬谢神的默示”.[13] 传说的真伪姑且不论,然

而，由来已久的传说本身也充分显示出希腊对几何证明的高度重视.

在几何中，重视逻辑推理，还有更深一层的道理.

首先，是图形的直观启示未必可靠. 单靠目力，观察图形而得的量的关系，粗糙不说，还可能有误. 如图 0.3 所示的二垂直线段，一眼看去，似乎竖线段 a 比横线段 b 长. 其实不然，用米尺一量便知二者的长短相等. 造成错觉的原因乃是，竖线段处于横线段的正中，看起来，竖线段确实比横线段一半长得多，因而给人以“比两个一半还长”的错误印象.

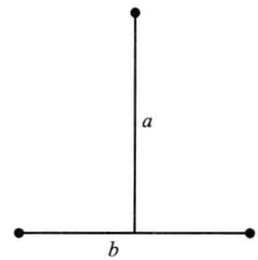

图 0.3

其次，单凭图形的直观去归纳、总结图形的几何性质，其正确性也与理性思维是否缜密有关. 例如要问

两个圆所组成的图形有几条对称轴?

如果只从下面图 0.4(a)—(c)所示的二圆相交、相切、相离这三种情况便总结出

两个圆所组成的图形只有一条对称轴.

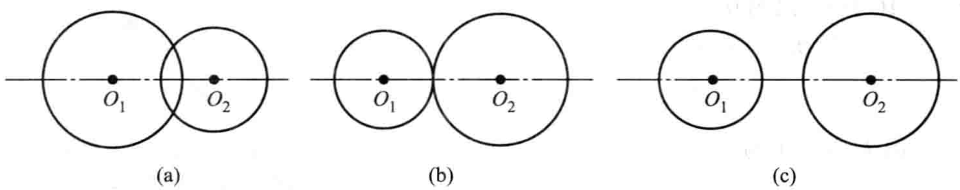

图 0.4

则失片面. 因为以上所画的各种情形，对于研究二圆交点的个数而言倒是很全面的，但决定对称的重要因素却在：半径是否相等；中心是否重合.

如图 0.5(a)—(c)所示，不同心但相等的二圆，不论它们是相交、相切或相离，皆有两条对称轴，又如图 0.6 所示，同心二圆有无穷多对称轴. 由此可见，分类也随要求而异，不能把“相交、相切、相离”的分法到处乱套. 同时，这也表明了图形画的是否全面，能否抓到问题的关键，起决定因素的，还在于人们的思维是

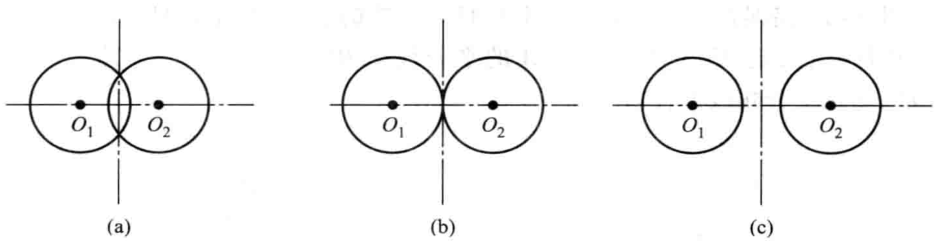

图 0.5

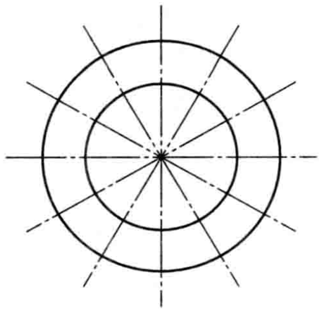

图 0.6

否缜密,这方面的例子,有兴趣的读者可以参阅[10].

第三,图形的不准确,还会导致推理的失误,对此,我们介绍一个简单而又有说服力的例子.

任意三角形皆等腰的"证法":

设 BC 边的中垂线交 $\angle A$ 的平分线于 E,再自 E 分别作 $EF \perp AB$ 于 F, $EG \perp AC$ 于 G,如图 0.7.

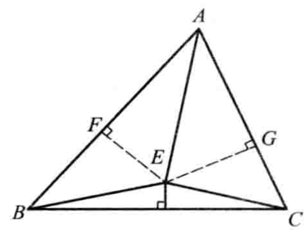

图 0.7

由 E 在 BC 中垂线上知

$$EB = EC,$$

由 E 在 $\angle A$ 的平分线上知

$$EF = EG,$$

$\therefore \quad \triangle BEF \cong \triangle CEG$

且 $\triangle AEF \cong \triangle AEG$,

$\therefore \quad BF = CG$ 且 $AF = AG$,

$\therefore \quad AB = AF + FB = AG + GC = AC$,

即 $\triangle ABC$ 等腰.

任意三角形岂能都是等腰的! 显然,"证明"应是错误的. 但上述"证明",依照图形,步步都有依据,所以错误只能在于它所依据的图形.

事实上,错误在于: 把本应位于 $\triangle ABC$ 之外的点 E,画在 $\triangle ABC$ 内部,如图 0.8 中所示,假定 $AB > AC$,并设 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D',则依平分角线的性质可知

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC} > 1,$$

即 $$BD' > D'C,$$

亦即 中点 D 在大段 BD' 上.

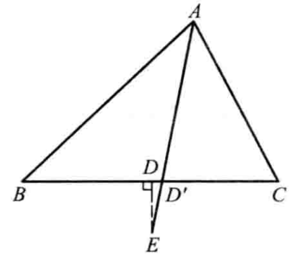

图 0.8

故 AD' 与中垂线的交点 E 应在 $\triangle ABC$ 的 BC 边外，依此正确之图，证明便不会出错.

虽说此例有人为的凿痕，但它也说明，图的直观性只能在理性指引下，才能正确地发挥它的威力，上面我们把 E 画在 $\triangle ABC$ 之外，就是靠着角平分线性质的导引.

综合上述，可以看出：自古典几何诞生之日，逻辑推理就伴随其中，而且随着几何学的发展，逻辑的因素还日益增强. 不但如此，人们还把严密的逻辑推理和完善的逻辑结构看成是古典几何成熟的标志. 欧几里得（Euclid，约前 330—前 275）的《几何原本》，在数学史上被树为划时代的里程碑，就是因为它的逻辑结构十分严谨，在当时看来又十分完美，以致流传两千多年而经久不衰.《几何原本》之所以经得起历史的检验，主要原因有二：

一是它在科学中开创了公理化的新纪元. 牛顿就深受影响，他在其名著《自然哲学之数学原理》的序中对几何公理化推崇备至："从那么少的几条外来的原理，就能够取得那么多的成果，这是几何学的光荣". 我们现在广泛运用的牛顿力学，也只是从最基本的三条定律繁衍而成，实质上也是公理化的体现，至于近代数学中，集合论、抽象代数、概率论……众多的分支，也都先后奠基在若干公理之上，由此可见《几何原本》的公理化思想影响之广泛与深远.

二是严谨、完善的逻辑结构. 在欧几里得之前，学习和研究几何已蔚然成风，相传古希腊的著名学者柏拉图在他创办的学院门口，挂着一块"不懂几何的人不许入内"的牌子，足见几何学已成为人们必备的常识，因此，在古希腊，几何学的内容已发展得十分丰富，但却是零零碎碎，杂乱无章，正如大量的土木砖瓦堆在一起，尚需高明的建筑师用它们建造起辉煌的殿堂，欧几里得不愧是一位学术界的营造大师，他将丰富、杂乱的几何内容，由表及里，去粗取精，认真筛选又分门别类，再按它们内在的逻辑，建成了一座坚实而宏伟的几何宫殿——《几何原本》，虽历经两千多年的沧桑巨变，至今仍巍然屹立. 历史证明：这不是一项简单的整理、编纂，而是富有创造性的一项非凡的思维工程.

诚然，依现代的观点，《几何原本》在逻辑化的根基上，也有不少弱点，由此又引起对"几何基础"的深入探讨；希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）的《几何基础》（有中译本[4]）的问世，公理体系才达到严格、完美、无懈可击. 因而也彻底弥补了《几何原本》的种种不足. 但纵观《几何原本》广泛而久远的流传，它在传播几何知识的同时，对人们逻辑思维的训练和解题技巧的培养，其功德是无法估量的. 对此，我们不妨介绍两位举世闻名的大科学家学习过程的轶事. 据说牛顿少年时代，因轻视平面几何学而在一次享受奖学金的考试中落选. 后经他的老师巴罗博士提醒，才明白是因为"缺乏几何的训练，所以怎么学也是白费."于是，他重新研读《几何原本》，终于领悟到几何的奥妙，且打下坚实的数学基础，

终成科学伟人. 相对论的创始人爱因斯坦,12 岁时,曾迷上勾股定理,他花了三个星期,居然独自找到一个证明,这一并非显而易见的关系,却能够证明. 他由此而体会到思维威力的强大. 之后,一位俄国大学生塔尔梅送给他一本几何教科书,他读得心醉神迷,那一个个几何定理的证明,严密得滴水不漏,使人不能有半点怀疑. 思路是那样明晰,推理那样可靠,更使他对人的思维有能力揭示自然的奥秘而感到惊奇,思维的训练和好奇心的培养,也在这潜移默化的学习中油然而生,并逐渐增强.

由此可见: 数学被美誉为“思维的体操”,在几何学中更为突出.

作为思维科学的几何学,既是数学又涉及逻辑,所以,要完成建立严密欧氏公理体系的历史重任,仅停留在几何学的范围内,是不可能完成的,因为它需要丰富而深刻的数理逻辑知识和素养. 因此,我们现在看到的完美的欧氏公理体系,乃是出自数学大师希尔伯特之手. 由于它的严密与精练,至今被奉为经典而广为流传.

三、作为量的科学之几何学

1637 年,笛卡儿(Descartes,1596—1650)出版了他的方法论名著《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(简称《方法论》). 在这本仅几万字的“小书”里,笛卡儿以优美的笔调,深刻地阐述了他的理性主义的哲学思想——方法论在整个哲学中具有主导地位,正确的方法是发展科学的前提. 同时,在该书后加了三个附录:《折光学》、《论流星》和《几何学》,既是阐述他哲学思想的依据,又是体现他方法论的样板,其中,《几何学》约占 117 项,而这短短的篇幅,却是具有革新意义的解析几何之诞生地.

在笛卡儿一生中,虽通过与一些数学家的信件交往表达过他的一些数学思想,也有过揭榜巧解难题的轶事,但作为纯数学著作,仅此一本,也正是在这本经典著述中,笛卡儿实际上提出了如下两个基本观点:

1. 平面上的点可用坐标(有序数组)表示.

2. 平面上的曲线可用坐标满足的方程来表示.

现今解析几何的丰富内涵,全是在这两个观点的基础上发展起来的.

笛卡儿创立的解析几何,本意在于为几何学提供一个通法,以克服几何证法中技巧随题而异、不便驾驭的难关. 解析几何的发展,也基本实现了笛卡儿的这一思想,因为通过将点化为坐标、曲线(包括直线)化为方程,古典几何的大部分问题都可以化成代数对象,并通过易于掌握的运算去统一地解决,尽管有时会出现运算量较大的麻烦,但作为方法却是有规可依、有步可循,最终可以达到目的.

解析几何的重大意义,不仅限于为几何学提供了一种通法,还在于它为欧氏几何提供了一个算术模型,因为在坐标法的基础上,欧氏平面上的几何问题,可

化为相应的代数问题,并通过四则运算加以解决,即如

<table>
<tr><th colspan="2">欧氏平面 E^2</th><th>$R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">结合关系</td><td colspan="2">点 A_0——(x_0,y_0)
直线 l——$ax+by+c=0$</td></tr>
<tr><td>点 A_0 在直线 l 上</td><td>$ax_0+by_0+c=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">顺序关系</td><td colspan="2">点 A——(x_1,y_1),点 B——(x_2,y_2),点 $C(x,y)$</td></tr>
<tr><td>点 C 在 A、B 之间</td><td>存在一正实数 λ,使
$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三线共点</td><td colspan="2">l_1——$a_1x+b_1y+c_1=0$;　l_2——$a_2x+b_2y+c_2=0$
l_3——$a_3x+b_3y+c_3=0$</td></tr>
<tr><td>l_1、l_2 相交,
l_3 过 l_1、l_2 的交点</td><td>$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$</td></tr>
</table>

反之,有许多代数问题,亦可由上述对应关系,找到它们相应的几何意义.如上所示,它们好比两种不同的语言可以互相翻译一样,用数学的术语来说,就是欧氏平面 E^2 与坐标集合 R^2 二者同构.因此,欧氏平面几何的研究内容,亦可看成坐标集合 R^2 中数量关系的直观图示,或直观模型.即是说,几何研究的空间形式,只不过是数量关系的一种具体反映,或一个直观样板.照此观点,有人把数学定义为

研究数和数量间关系的学科.

此外,以数组作为点的坐标,原来仅限于平面和立体,因而坐标是有序数偶 (x,y)(平面上的点)或有序三数组,但从量的关系来看,作为坐标的有序数组,何尝不可以给出有序的4数组……有序的 n 数组.因此,从量的观点来看,通过坐标发展到高维空间,乃是水到渠成,自然而然.既是量的普遍性之反映,又合乎思维发展的规律.因而在数学史上,高维空间的出现,没有引起什么争论.唯一使人感到困惑的是,没有原先那种直观图示,但可以找到物理模型.例如,确定一个质点的状态,既要知道它的位置 (x,y,z),又要知道它的动态(速度的三个分量 v_x,v_y,v_z).因此,所有质点可能有的种种状态,就是6维坐标空间的物理模型;同时,它在理论上,又是解决线性方程组等的有力工具.在理论和实际上的广泛应用,使高维空间显示出强大的生命力.最后,利用坐标个数的增多,不但引出有限的高维空间,而且还可进一步发展到无穷维空间,对此,有兴趣的读者可参阅