智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

解析几何

上海科学普及出版社

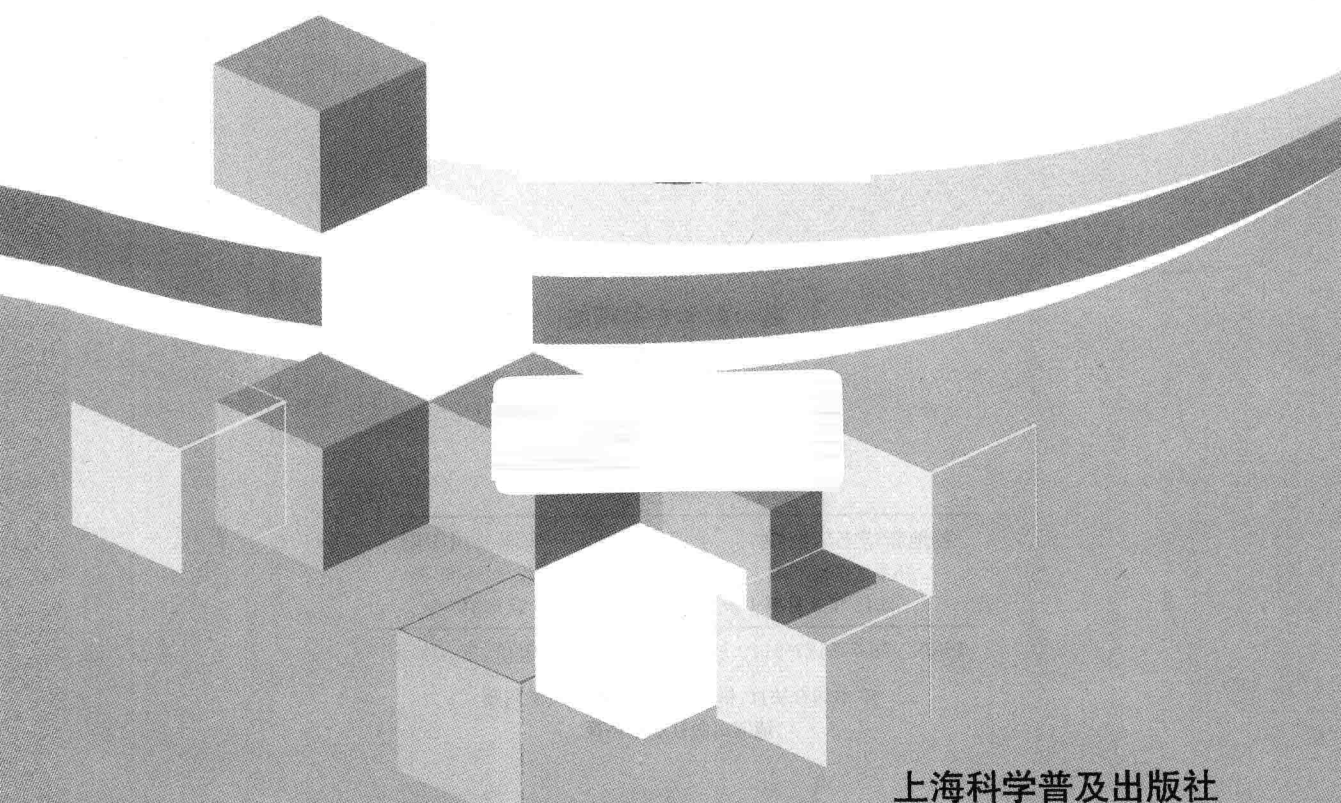
智立方

中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

解析几何



上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题精编. 解析几何/李正兴著. —上海：上海科学普及出版社，2014.8

ISBN 978-7-5427-6170-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①解析几何课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 147136 号

责任编辑　张建青

高中数学专题精编

解析几何

李正兴　著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号　邮政编码 200070)

http://www.pspsh.com

各地新华书店经销　上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 787×1 092　1/16　印张 22.25　字数 540 000

2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-6170-5　定价：39.00 元

序

300余万字的《高中数学专题精编》丛书，由昂立智立方中学生教育研究院院长卢影精心策划，经历了我整整两年的笔耕，终于如愿完成并付梓在即.这是我退休之后完成的第六套数学教育专著，也是我15年来出版的所有数学教育专著中篇幅最长、花费工夫最大、写作时间最长的一套.

《高中数学专题精编》分为8册，根据课程标准以及近年来高考数学命题的现状及改革方向，遵循考纲、注重思维、立足各版教材，目标是在专题上有所突破，在夯实基础的同时，全面提升学生的能力和素质.它涵盖了高中数学的所有知识板块，并以知识板块为分册依据，每个分册针对一至两个板块，满足学生在这些知识点上的学习需求.而在谋篇布局上，既考虑了高一、高二学生新授知识的需要，又考虑到高三学生迎考冲刺的需求，每个分册都由基础篇和拓展提高篇组成，力求层次清楚、坡度平稳，基础一般的学生和优秀学生都能使用.

一、基础篇中章与章之间、讲与讲之间环环相扣.每讲从“知识储备”、“双基回眸”、“例题精讲”、“易错警示”、“链接高考”、“专项训练”等六个方面实施“推进式”辅导，每章最后给出若干份阶段检测卷来对整章知识进行全面考核.

1.“知识储备”：重要知识点一览无余，从而达到消除盲点、贯通知识、建构知识链的目标.你想要完整地夯实数学基础，你想在数学高考中获得高分，对知识点的整理归纳是必不可少的重要步骤.

2.“双基回眸”：复习过程中的“热身”，通过3～5题紧扣本讲知识的基础小题，巩固“通识”，掌握“通法”，带给高中学生攻克数学堡垒的灵感.

3.“例题精讲”：针对每讲应掌握的知识点，给出若干紧扣考纲、能呈现基础知识和解题通法的典型例题，并给出“策略点击”与详细的解法步骤.例题的涉及面广，题型多样，通过一题多解的方式，倡导多角度、多维度地分析问题、突破难点，引导学生拓展思维、循序渐进、由此及彼、逐步深入，进而能举一反三，掌握若干解题方法.

4.“易错警示”：帮助学生寻找易错点，进行查漏补缺.对大多数学生而言，在数学学习过程中常有一个瓶颈存在，就是在每次测试中低级错误不断，问题出在对知识点以及解题通法不能做到“了然于胸”.解决这一问题，是短时间内提高成绩的有效途径.

5.“链接高考”：高中阶段的数学学习完成后，大多数学生总是要参加数学高考的，所以在高一、高二阶段的数学学习过程中，渗透高考的要求是必需的.这里所选的例题通常是经历时间洗礼或近年来在高考(或自主招生考试)中出现的具有创新精神的精彩好题，这些例题典型性强，能启迪思维，揭示规律性.同时，对近年来高考命题的走向进行科学分析，展示解题过程中的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美.

6.“专项训练”：每讲至少给出一份专项训练卷(重点专项给出A、B两份甚至A、B、C三份专项训练卷)，题型新而全，基础题、中档题、难题合理布局，并大多给出详解.通过专项训练可以激发学生的潜能，进一步深入理解和掌握相关知识点，提高解题的能力和技巧.

二、拓展提高篇所讲的是体现能力要求的重点专题，充满了知识的交汇、方法与技巧的展示、数学思想的顿悟，是高考中常出压轴题之所在，也是名牌大学自主招生的“主打板块”. 所选例题大多是近年来出现的一些极其典型的试题，浓缩了一种纯粹的高考精华，体现了一种全新的备考理念，既是基本方法的科学总结，又是决战千里的锦囊妙计. 剑指难点，迎战不慌！

本人从事高中数学教育工作30余年，退休至今一直沉潜在这一领域也已有7年，我认为一名优秀的高中数学教师对教学过程应当有通盘考虑，对纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合应当有清晰的认识与掌控. 如对每一节课如何引入和展开，知识层面上如何发散，如何抓住学生的注意力，如何激发学生的兴趣，课后如何精选习题和巩固练习，如何进行检测反馈，都要作出独具匠心的安排. 我崇尚戏剧式的数学教学，追求完美的有节奏感的深入推进，上每堂专题课都如同导演一场舞台剧，序幕、情节展开、高潮、升华、思考，一环紧扣一环，引领学生走向成功.

胡适有言：“成功不必在我，功力必不唐捐”. 在丛书完稿之时，填词一首，是生命的感受，不吐不快.

金缕曲

数苑四十载，在教坛，华发染鬓，才情尽送.
叹高次方程无解，世事原来不公.
难将息，灵泉源涌，五色尚存生花笔，向人间，纸墨相吟弄.
夜深沉，海上风.
青春岁月消踪，想当年，意气勃发，今已成空.
一曲清歌浦江畔，汗牛也要充栋.
君不见，江湖澒洞.
得失无关文章事，勤耕耘.
莘莘学子有用，脚乃健，心犹雄.

每当我想起钱钟书先生的诗句：“睡乡分境隔山川，枕坼槐安各一天，那得五丁开路手，为余凿梦两通连”，更激励我无怨无悔地做学生们的“开路手”，为具有梦想的学生们写作，他们的受益是我的快乐. 我不会在喧闹的人世间迷失方向，我找到了最适合我的天性的生活，对我而言是理想的生活. 感谢我的妻子杨惠芬，没有她的支持，我的2000余万字、35部专著是不可能写出来的，亲情使我获得生命的享受，我坚信，大自然提供的只是素材，唯有亲情才能把素材创造成完美的作品，我获得的任何细小的成功都有她的陪伴，这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福. 我还要感谢昂立智立方中学生教育研究院高中数学教研组长李璐璐老师帮我校对了一部分书稿，责任编辑张建青先生8年来为出版我的书所付出的辛勤劳动.

限于本人水平，书中难免存在的疏漏之处，欢迎读者批评指正.

李正兴
2014年夏于海上述而斋

目　　录

基　础　篇

（每讲配有专项训练）

拓展提高篇

基　础　篇

JICHUPIAN

第一章　平面直线方程

第一讲　直线的点方向式方程与点法向式方程

一、知识储备

名称	已知条件	方程	说明
点方向式	点 $P(x_0,\ y_0)$ 及方向向量 $\boldsymbol{d}=(u,\ v)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ u & v \end{vmatrix}=0\left(或\dfrac{x-x_0}{u}=\dfrac{y-y_0}{v}\right)$	$u^2+v^2\neq 0$
点法向式	点 $P(x_0,\ y_0)$ 及法向量 $\boldsymbol{n}=(a,\ b)$	$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$	$a^2+b^2\neq 0$

二、双基回眸

1. 过点$(2,\ -1)$，且法向量为$(2,\ -1)$的直线方程是________.
2. 已知$\triangle ABC$ 的边 AB，BC，CA 的中点依次是 $D(-1,\ 2)$，$E(2,\ -3)$，$F(-3,\ 4)$，则直线 AB 的方程是________.
3. 将直线 $3x-4y+9=0$ 绕其与 x 轴的交点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后得到直线 l，则直线 l 的方程为________.
4. 已知 O 为坐标原点，点 A 的坐标为$(4,\ 2)$，P 为线段 OA 的垂直平分线上一点. 若$\angle OPA$ 为钝角，则点 P 的横坐标的取值范围是________.
5. 已知直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,\ 3)$，直线 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{b}=(-1,\ k)$，若直线 l_2 过点$(0,\ 5)$，且 $l_1\perp l_2$，则直线 l_2 的方程是（　　）.

   A. $x+3y-5=0$　　B. $x+3y-15=0$　　C. $x-3y+5=0$　　D. $x-3y+15=0$

解法导析：1. 设$(x,\ y)$是所求直线上的任意一点，则由点法向式方程可得 $2(x-2)-(y+1)=0$，即 $2x-y-5=0$.

2. 由已知得 $\overrightarrow{EF}=(-5,\ 7)$，则直线 AB 的点方向式方程是 $\dfrac{x+1}{-5}=\dfrac{y-2}{7}$，即 $7x+5y-3=0$.

3. 直线 $3x-4y+9=0$ 与 x 轴的交点坐标为$(-3,\ 0)$，其一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,\ -4)$，此向量即为所求直线 l 的一个方向向量.

$\therefore$ l 的点方向式方程为 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-0}{-4}$，即 $4x+3y+12=0$.

4. $\overrightarrow{OA}=(4,\ 2)$ 为线段 OA 垂直平分线 l 的一个法向量，又 l 过 OA 中点$(2,\ 1)$，故 l：$4(x-2)+2(y-1)=0$，即 $2x+y-5=0$.

$\because$ 点 P 在直线 l 上，$\therefore$ 可设 $P(x,\ -2x+5)$，$\overrightarrow{PA}=(4-x,\ 2x-3)$，$\overrightarrow{PO}=(-x,\ 2x-5)$.

又$\angle OPA$ 为钝角，故 $\cos\angle OPA=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PA}|\,|\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{5x^2-20x+15}{|\overrightarrow{PA}|\,|\overrightarrow{PO}|}<0$.

解得 $1<x<3$，又 $x\neq 2$，否则 $P(2,\ 1)$恰为 OA 中点，$\angle OPA=\pi$ 与$\angle OPA$ 为钝角矛盾，故点 P 横坐标的取值范围为 $x\in(1,\ 2)\cup(2,\ 3)$.

5. ∵ 直线 l_2 经过点 $(0, 5)$，且方向向量为 $\boldsymbol{b}=(-1, k)$，∴ 直线 l_2 的方向为 $y-5=-kx$.

又∵ 直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1, 3)$，且 $l_1 \perp l_2$ ∴ $-k \cdot 3=-1$，∴ $k=\dfrac{1}{3}$.

∴ 直线 l_2 的方程为 $y-5=-\dfrac{1}{3}x$，即 $x+3y-15=0$，故选 B.

三、例题精讲

例 1 (1) 求过点 $A(-2, 5)$ 且平行于直线 l_1：$4x-3y-9=0$ 的直线方程；

(2) 求过点 $B(3, -4)$ 且垂直于直线 l_2：$3x+7y-6=0$ 的直线方程；

(3) 已知 $\triangle ABC$，$A(3, 2)$，$B(9, -8)$，$C(-1, 4)$，试求 $\triangle ABC$ 的外心 O 的坐标；

(4) 有两条直线 l_1，l_2，它们的方向向量均为 $(1, -2)$，另两条直线 l_3，l_4，它们的法向量均为 $(1, -2)$，其中 l_1 与 l_3 交于点 $(2, -4)$，l_2 与 l_4 交于点 $(2, 4)$，求 l_1，l_2，l_3，l_4 的直线方程.

策略点击： 对于第(1)、第(2)小题，由直线 l：$ax+by+c=0$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(a, b)$，一个方向向量为 $\boldsymbol{d}=(-b, a)$，根据此条件可求出与直线 l 平行或垂直的直线方程. 对于第(3)小题，$\triangle ABC$ 的外心 O 是中垂线交点，易求得三条中垂线方程(用点法向式)，再通过解方程组求外心坐标. 对于第(4)小题，确定直线需要两个独立条件(位置和方向)，而题设中两个条件是具备的，求之极易.

解： (1) $\boldsymbol{n}_1=(4, -3)$ 是 l_1 的一个法向量，也是所求的与 l_1 平行直线的法向量，由点法向式方程得所求直线方程是 $4(x+2)-3(y-5)=0$，即 $4x-3y+23=0$.

(2) $\boldsymbol{n}_2=(3, 7)$ 是 l_2 的一个法向量，也是所求的与 l_2 垂直直线的一个方向向量，由点方向式方程得所求直线方程是 $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+4}{7}$，即 $7x-3y-33=0$.

(3) 设点 D, E, F 分别为 AB, BC, CA 的中点，三条中垂线方程分别为 l_1，l_2，l_3，由中点坐标公式知：$D(6, -3)$，$E(4, -2)$，$F(1, 3)$.

向量 $\overrightarrow{AB}=(6, -10)$ 为直线 l_1 的一个法向量，由于直线 l_1 经过点 $D(6, -3)$，

所以直线 l_1 的点法向式方程为：$6(x-6)-10(y+3)=0$，即 $3x-5y-33=0$；

同理可知，直线 l_2 的点法向式方程为：$-10(x-4)+12(y+2)=0$，即 $5x-6y-8=0$；

直线 l_3 的点法向式方程为：$4(x-1)-2(y-3)=0$，即 $2x-y+2=0$.

由 $\triangle ABC$ 三边的垂直平行线交于同一点易得 $O\left(-\dfrac{38}{7}, -\dfrac{69}{7}\right)$.

(4) 由方向向量 $\boldsymbol{d}=(1, -2)$ 及直线上点 $(2, -4)$ 知：l_1 的点方向式方程为：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{-2}$.

同理可知：l_2 的点方向式方程为：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-2}$.

由法向量 $\boldsymbol{n}=(1, -2)$ 及直线上点 $(2, -4)$ 知：l_3 的点法向式方程为：$(x-2)-2(y+4)=0$.

同理可知：l_4 的点法向式方程为：$(x-2)-2(y-4)=0$.

例 2 在正方形 $ABCD$ 中，过一个顶点 D 作对角线 CA 的平行线 DE，若 $|CE|=|AC|$，且 CE 交边 AD 于点 F，则 $|AE|$ 与 $|AF|$ 有可能相等吗？为什么？

策略点击： 本例的证明方法是解析法，其关键在于恰当地选取坐标系. 坐标系不同，证明的过程当然也不尽相同，但大致是一致的，最大的差别是计算有难易之分. 下面介绍两种解法.

解法一： 以 A 为原点，对角线 AC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 1-1 所示.

设正方形的四个顶点和点 E 的坐标分别为 $A(0, 0)$，$B(a, -a)$，$C(2a, 0)$，$D(a, a)$，$E(x_E, a)$.

∵ $|CE|=|AC|$，∴ $(x_E-2a)^2+a^2=(2a)^2$，解得 $x_E=(2-\sqrt{3})a$.

又$\overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3}a,\ a)$，故直线 CE 的方程为$\dfrac{x-2a}{-\sqrt{3}a}=\dfrac{y}{a}$，即 $x+\sqrt{3}y-2a=0$.

设点 F 的坐标为$(x_F,\ y_F)$. ∵ $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AF}$，∴ $(a,\ a)=\lambda(x_F,\ y_F)$.

于是有 $x_F=y_F$，又点 F 在直线 CE 上，故

$x_F+\sqrt{3}x_F-2a=0$，$x_F=(\sqrt{3}-1)a$，即 $F((\sqrt{3}-1)a,\ (\sqrt{3}-1)a)$.

∵ $|AE|^2=[(2-\sqrt{3})a]^2+a^2=(8-4\sqrt{3})a^2$，

$|AF|^2=[(\sqrt{3}-1)a]^2+[(\sqrt{3}-1)a]^2=(8-4\sqrt{3})a^2$，

∴ $|AE|=|AF|$.

所以根据题意作出的 DE，能使 $|AE|=|AF|$.

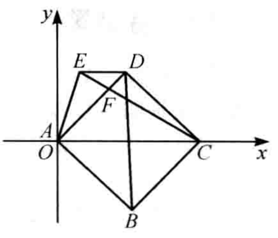


图 1-1

解法二： 以 D 为原点，DC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如图 1-2所示.

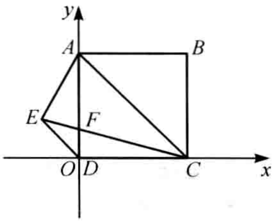


图 1-2

设正方形的四个顶点和点 E 的坐标分别为 $D(0,\ 0)$，$C(a,\ 0)$，$B(a,\ a)$，$A(0,\ a)$，$E(x_E,\ -x_E)$，由 $|CE|=|AC|$ 得$(x_E-a)^2+x_E^2=(\sqrt{2}a)^2$，

解得 $x_E=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)a$，则 $E\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)$.

又$\overrightarrow{CE}=\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)$，

故直线 CE 的方程为$\dfrac{x-a}{-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{y}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}a}$，

即$(\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}+1)y-(\sqrt{3}-1)a=0$，令 $x=0$，则$(\sqrt{3}+1)y_F=(\sqrt{3}-1)a$，$y_F=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}a$.

∵ $|AE|^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}a\right)^2=(4-2\sqrt{3})a^2$，

$|AF|^2=\left(a-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}a\right)^2=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2a^2=(-1+\sqrt{3})^2a^2=(4-2\sqrt{3})a^2$，

∴ $|AE|=|AF|$. 所以根据题意作出的 DE，能使 $|AE|=|AF|$.

例 3　已知直线 l 的方程为：$(a+2)x+(1-2a)y+4-3a=0$（其中 a 为实数）.

(1) 求证：不论 a 取何值，直线 l 恒过定点；

(2) 记(1)中定点为 P，若 $l\perp OP$（O 为坐标原点），求实数 a 的值.

策略点击： 实数 a 取一个值，方程对应着一条直线，故可先用特殊值求出定点，再证明其余直线也过此定点.

解： (1) 令 $a=-2$，得 l 的方程为 $y=-2$；令 $a=\dfrac{1}{2}$，得 l 的方程为 $x=-1$，

两直线 $x=-1$ 和 $y=-2$ 的交点为$(-1,\ -2)$.

当$\begin{cases}x=-1,\\ y=-2\end{cases}$时，原直线方程左 $=(a+2)\times(-1)+(1-2a)\times(-2)+4-3a=0$，

故直线 l：$(a+2)x+(1-2a)y+4-3a=0$ 恒过定点$(-1,\ -2)$.

(2) $l\perp OP$，则$\overrightarrow{OP}=(-1,\ -2)$ 为直线 l 的一个法向量，又由直线方程的形式知直线 l 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(a+2,\ 1-2a)$，∴ $\boldsymbol{n}\ /\!/\ \overrightarrow{OP}$，即$\dfrac{a+2}{-1}=\dfrac{1-2a}{-2}$，解得 $a=-\dfrac{3}{4}$.

四、易错警示

例 已知：$ABCD$ 是正方形，如图 1-3 所示，$\angle MDA=\angle MAD=15^{\circ}$，用解析法证明$\triangle MBC$ 是等边三角形.

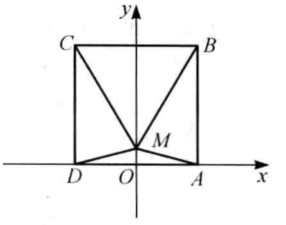


图 1-3

错证：以正方形的边 AD 所在直线为 x 轴，AD 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

$\because$ $\triangle MDA$ 是等腰三角形. $\therefore$ 顶点 M 必在 y 轴上.

设 $|AD|=2a$，$\therefore$ A，B，C，D 点的坐标分别为$(a,0)$，$(a,2a)$，$(-a,2a)$，$(-a,0)$，则 $|AM|=\dfrac{a}{\cos 15^{\circ}}$，$\angle MAB=75^{\circ}$.

由余弦定理得：$|MB|^{2}=(2a)^{2}+\left(\dfrac{a}{\cos 15^{\circ}}\right)^{2}-2\cdot 2a\cdot\dfrac{a}{\cos 15^{\circ}}\cos 75^{\circ}=(2a)^{2}+a^{2}\left(\dfrac{1}{\cos^{2}15^{\circ}}-\dfrac{4\sin 15^{\circ}\cos 15^{\circ}}{\cos^{2}15^{\circ}}\right)=(2a)^{2}$，$\therefore$ $|MB|=2a$. 同理，$|MC|=2a$.

则$\triangle MBC$ 为等边三角形.

评析及正解：建立适当的坐标系是解析法的必要步骤，但只有建立坐标系，而不是用代数的方法证明几何问题，这根本不是解析法. 上述的证明过程本质是三角法，而上述“建立坐标系”仅是形式上的，各点的坐标根本没有用到.

正确的解析法证明过程如下：

如图 1-3 所示建立平面直角坐标系，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中，$\tan 15^{\circ}=\dfrac{OM}{OA}$，$\therefore$ $OM=OA\cdot\tan 15^{\circ}=(2-\sqrt{3})a$，$\therefore$ M 点的坐标是$(0,(2-\sqrt{3})a)$，$\therefore$ $|BM|=\sqrt{(0-a)^{2}+[(2-\sqrt{3})a-2a]^{2}}=2a$.

同理，$|MC|=2a$，

$\therefore$ $|BM|=|MC|=|BC|=2a$.

则$\triangle MBC$ 是等边三角形.

五、链接高考

例 (1) 已知直线 l: $x-2y+8=0$ 和两点 $A(2,0)$，$B(-2,-4)$.

① 在 l 上求一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 最小；

② 在 l 上求一点 P，使 $|PB|-|PA|$ 最大.

(2) 已知 $3x-4y+4=0$，求 $m=\sqrt{x^{2}+y^{2}+6x-10y+34}+\sqrt{x^{2}+y^{2}-4x-30y+229}$ 的最小值.

方法探究：本例是对称问题与最值问题的综合，解题的关键是运用数形结合的思想方法，即赋“数”以形，用“形”凸现出“数”的几何意义，使问题在“数”与“形”的结合中得以顺利解决，而利用求对称点的方法能巧妙地获得所求的结果.

解：(1) ① 如图 1-4 所示，设 A 关于 l 的对称点为 $A'(a,b)$，则$\begin{cases}\dfrac{b}{a-2}=-2,\\[2mm]\dfrac{a+2}{2}-2\cdot\dfrac{b}{2}+8=0,\end{cases}$

解方程，得 $a=-2$，$b=8$. $\therefore$ $A'(-2,8)$.

$\therefore$ $A'B$ 的方程是 $x=-2$，$A'B$ 与 l 的交点是$(-2,3)$，

故所求的点为 $P(-2,3)$.

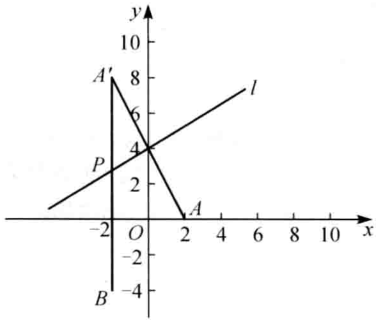


图 1-4

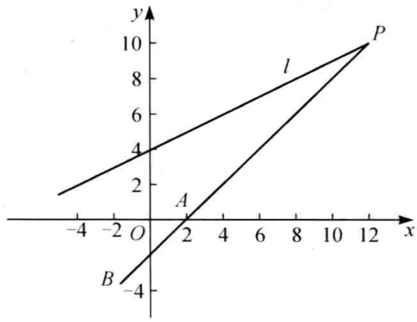


图 1-5

② 如图 1-5 所示，AB 的直线方程为 $y=x-2$，代入 l 的方程，得直线 AB 与 l 的交点为 $(12,\ 10)$，故所求的点 P 坐标为 $(12,\ 10)$.

$$(2)\ m=\sqrt{x^2+y^2+6x-10y+34}+\sqrt{x^2+y^2-4x-30y+229}$$
$$=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-15)^2},$$

可见，m 的最小值的几何意义是直线 l：$3x-4y+4=0$ 上的点 $P(x,\ y)$ 到 $A(-3,\ 5)$ 和 $B(2,\ 15)$ 两点的距离和的最小值.

如图 1-6 所示，设点 $A(-3,\ 5)$ 关于直线 l：$3x-4y+4=0$ 的对称点为 $A'(a,\ b)$，则 $\overrightarrow{AA'}=(a+3,\ b-5)$.

设 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{d}=(4,\ 3)$

$\because\ \boldsymbol{d}\perp\overrightarrow{AA'}$，$\therefore\ 4(a+3)+3(b-5)=0$，即 $4a+3b-3=0$.　①

又 AA' 的中点在直线 l 上，则可得 $3\cdot\dfrac{a-3}{2}-4\cdot\dfrac{b+5}{2}+4=0$，即 $3a-4b-21=0$.　②

由①②解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=-3,\end{cases}$ 即 A' 的坐标为 $(3,\ -3)$.

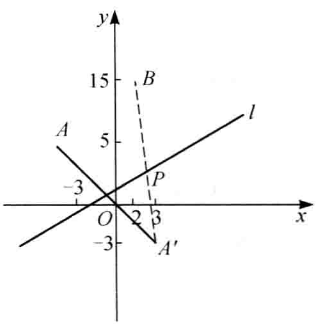


图 1-6

设直线 $A'B$ 与 l 交于点 P，则

$$|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|=|A'B|$$
$$=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}.$$

为直线 $3x-4y+4=0$ 上的点到 A，B 距离之和的最小值，即 m 的最小值为 $5\sqrt{13}$.

专项训练一：直线的点方向式方程与点法向式方程

一、填空题

1. 已知点 $A(1,\ 2)$ 和 $B(-2,\ -1)$ 是直线 l 上两点，则直线 l 的一个方向向量为________，一个法向量为________.

2. 若直线 l 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,\ 3)$，点 $A(-2,\ 1)$ 和点 $B(m,\ 4)$ 是直线 l 上的两点，则 $m=$________.

3. 若坐标原点 O 在直线 l 的射影点 H 的坐标是 $(-4,\ 2)$，则直线 l 的方程是________.

4. 直线 l 的截距为 -5，方向向量 $\boldsymbol{d}=(-4,\ 2)$，则 l 的方程为________.

5. 直线 l 的横截距为 2，法向量 $\boldsymbol{n}=(3,\ -5)$，则 l 的方程为________.

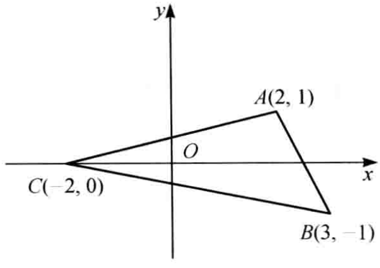
6. 若直线 l 过点$(2,-3)$，且平行于向量 $\boldsymbol{d}=(3,4)$，则 l 的点方向式方程为________.
7. 若点 $A(-3,2)$，$B(1,-4)$，则线段 AB 的垂直平分线的点法向式方程为________.
8. 若直线 l_1：$(2-m)x+my+3=0$ 的法向量恰为直线 l_2：$x-my-3=0$ 的方向向量，则实数 m 的值为________.
9. 直线 l 经过三点 $A(m,0)$，$B(0,n)$，$C(1,3)$，且 m、n 均为正整数，则 l 的方程为________.
10. 将直线 $3x-4y+9=0$ 绕其与 x 轴的交点逆时针旋转 $90°$ 后得到直线 l，则 l 的方程为________.
11. 直线 l 过点$(3,1)$，方向向量为 $\boldsymbol{d}=(5,2)$，则 l 与两坐标轴所围成三角形的面积是________.
12. 若平行四边形的两条对角线交点为$(1,1)$，一条边所在直线方程为 $3(x-3)-4(y+1)=0$，则该边的对边所在的直线方程为________.

二、选择题

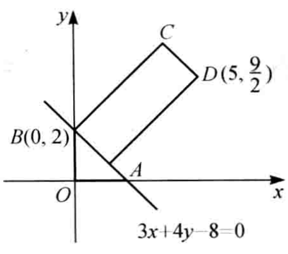
13. 直线 $3x+4y-5=0$ 的一个平行向量 $\boldsymbol{d}$ 和一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 分别是(　　).
A. $\boldsymbol{d}=(-3,4)$，$\boldsymbol{n}=(3,4)$
B. $\boldsymbol{d}=(3,-4)$，$\boldsymbol{n}=(4,3)$
C. $\boldsymbol{d}=(4,3)$，$\boldsymbol{n}=(3,4)$
D. $\boldsymbol{d}=(4,-3)$，$\boldsymbol{n}=(3,4)$
14. 已知 $P(x_0,y_0)$ 为直线 l：$ax+by+c=0$ 上一点，则直线 l 的方程也可写成(　　).
A. $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
B. $a(x-x_0)-b(y-y_0)=0$
C. $b(x-x_0)+a(y-y_0)=0$
D. $b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$
15. 已知方程 $(2m^2+m-3)x+(m^2-m)y-4m+1=0$ 表示直线，则实数 m 满足(　　).
A. $m\neq1$　　B. $m\neq-\dfrac{3}{2}$
C. $m\neq0$　　D. $m\neq1$ 且 $m\neq-\dfrac{3}{2}$ 且 $m\neq0$
16. 若点 $M(x,y)$ 在直线 $x+2y+1=0$ 上移动，则 $f(x,y)=2^x+4^y$ 的最小值是(　　).
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

三、解答题

17. 如图，若 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(2,1)$，$B(3,-1)$，$C(-2,0)$，试求：
(1) 过点 B 与边 AC 平行的直线方程；
(2) AB 边上的高所在的直线方程.



第 17 题图



第 18 题图

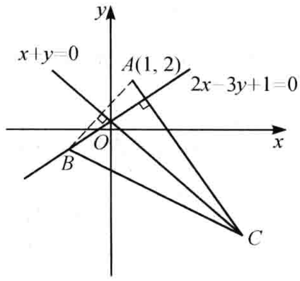
18. 如图，若矩形 $ABCD$ 的边 AB 所在直线方程为 $3x+4y-8=0$，顶点 B 的坐标为$(0,2)$，点 D 的坐标为$\left(5,\dfrac{9}{2}\right)$，求：

(1) 边 CD，BC 所在的直线方程；

(2) 对角线 AC 所在的直线方程.

19. (1) 如图，三角形的两条所在的直线方程为 $2x-3y+1=0$ 和 $x+y=0$，点 $A(1,\ 2)$是它的一个顶点，求 BC 边所在直线方程.

(2) 已知 A，B，C 的坐标分别为$(1,\ 3)$，$(b,\ 0)$，$(0,\ c)$，其中 b，c 均为正整数. 问过这三点的直线 l 是否存在，若存在，求出 l 的方程；若不存在，说明其理由.



第 19(1) 题图

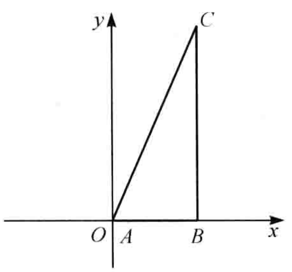
20. 过点 $P(4,\ 2)$作直线 l 交两坐标轴的正向于 A，B 两点，求：

(1) $|AP|\,|BP|$取得最小值时 l 的方程；

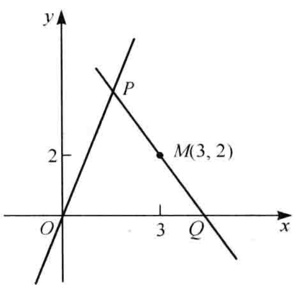
(2) $\triangle AOB$ 的面积 S 最小时，l 的方程.

21. (1) 在正方形 $ABCD$ 中，过一个顶点 D 作对角线 CA 的平行线 DE，若 $|CE|=|AC|$，且 CE 交边 AD 于 F，则$|AE|$与$|AF|$有可能相等吗？为什么？

(2) 如图，设$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|AC|}=\dfrac{1}{2}$，证明：$BC$ 边所在的直线必过定点，并求此定点.



第 21(2) 题图



第 22(3) 题图

22. (1) 分别在 x 轴和直线 $y=x$ 上各找一点 B，C，使它们与点 $A(4,\ 2)$组成的三角形的周长最短.

(2) 已知 O 为坐标原点，点 A 的坐标为$(4,\ 2)$，P 为线段 OA 的垂直平分线上一点，若$\angle OPA$ 为钝角，求点 P 的横坐标的取值范围.

(3) 如图，P 是直线 $3x-y=0$ 上位于第一象限的点，$M(3,\ 2)$为一定点，直线 PM 交 x 轴正半轴于点 Q. 求$\triangle POQ$ 面积的最小值及此时直线 PQ 的方程.

第二讲　直线的倾斜角与斜率

一、知识储备

1. 直线的倾斜角：一条直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0.

直线的倾斜角 α 的取值范围是$[0,\ \pi)$.

2. 直线的斜率：直线 l 的倾斜角 $\alpha\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的正切叫做直线 l 的斜率.

直线的斜率常用 k 表示，即 $k=\tan\alpha$.

若已知直线的方向向量 $\boldsymbol{d}=(u,\ v)$，则 $k=\dfrac{v}{u}(u\neq 0)$.

若已知直线的法向量 $\boldsymbol{n}=(a, b)$，则 $k=-\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

阐述：(1) 任何一条直线都有唯一的倾斜角，但并不是任何一条直线都有斜率.

(2) 当 $\alpha=0$ 时，$k=0$；当 $\alpha\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$k>0$；当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，k 不存在；当 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，$k<0$.

(3) 若已知直线的斜率为 k，则其倾斜角 $\alpha=\begin{cases}\arctan k, & (k>0);\\ 0, & (k=0);\\ \pi+\operatorname{arccot} k, & (k<0).\end{cases}$

(4) 直线的斜率可以用来描述直线的方向.

3. 直线的斜率公式：设直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)(x_1\neq x_2)$，则直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

当 $x_1=x_2$ 时，直线 l 垂直于 x 轴，即 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，其斜率 k 不存在.

二、双基回眸

1. 已知直线 l 过点 $P(-1, 2)$，且与以 $A(-2, -3)$，$B(3, 0)$ 为端点的线段相交，则直线 l 斜率的取值范围为________.
2. 已知 $a>0$，若平面内三点 $A(1, -a)$，$B(2, a^2)$，$C(3, a^3)$ 共线，则 $a=$________.
3. 设 $\theta\in\mathbf{R}$，则直线 $x\sin\theta-\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角的取值范围是________.
4. 已知两点 $A(-1, -5)$，$B(3, -2)$，直线 l 的倾斜角是直线 AB 倾斜角的一半，则 l 的斜率为________.
5. 求过两点 $P(1-m, 1+m)$ 和 $Q(3, 2m)$ 的直线的倾斜角.

解法导析： 1. 设 PA，PB 的倾斜角分别为 α，β. 由 P，A，B 的坐标可求得 $k_{PA}=5$，$k_{PB}=-\dfrac{1}{2}$，当直线 l 由 PA 绕点 P 旋转到与 y 轴平行时，它的倾斜角由 α 增大为 $\dfrac{\pi}{2}$，由正切函数的单调性知斜率的取值范围为 $[5, +\infty)$；

当直线 l 由与 y 轴平行旋转到 PB 时，它的倾斜角由 $\dfrac{\pi}{2}$ 增大到 β，斜率的取值范围为 $\in\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

综上可知直线 l 斜率的取值范围为 $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]\cup[5, +\infty)$.

2. 平面内三点共线，则 $k_{AB}=k_{BC}$，即 $\dfrac{a^2+a}{1}=\dfrac{a^3-a^2}{1}(a>0)$，得 $a^2-2a-1=0$，进而可求得 $a=1+\sqrt{2}$ 或 $a=1-\sqrt{2}$（舍去），故填 $1+\sqrt{2}$.

3. 直线 $x\sin\theta-\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，$\because |\sin\theta|\leqslant 1$，$\therefore |k|\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，设直线的倾斜角为 α，则 $|\tan\alpha|\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由正切函数的单调性，可得倾斜角 α 的取值范围是 $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right)$.

4. **解法一：** 设直线 l 的倾斜角为 α，则直线 AB 的倾斜角为 2α，

由题意可知 $\tan 2\alpha=\dfrac{-2-(-5)}{3-(-1)}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$.

整理，得 $3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$，解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 或 $\tan\alpha=-3$.