地圖投影法

J. A. Steers 原著

褚紹唐譯　李長傳校

世界書局印行

第 一 篇

第 16, 26, 32, 34、54, 55, 61, 74, 76, 77 諸圖均爲印刷上之便利起見,將縮尺略加縮小。當論述各圖時務須注意。

第一章

導言：投影圖法之性質

地圖投影法乃將地球上之經綫及緯綫表示於一平面紙上之一種方法。任何表示方法均爲一種投影。其所成之網綫常稱之曰地圖之網。

吾人之地球爲一球體，惟地圖乃一平面。因使一平面之紙平貼於球體上乃不可能之事，故欲作一正確之圖於平面紙上亦屬困難。此卽所以必須硏究投影法之理由也。若仔細考查一優良之地圖册必可示吾人數種不同之投影法。在某圖中，其緯綫及經綫爲直綫，他圖中則爲曲綫或其經綫爲直綫，緯綫爲曲綫等。由於此數種選擇，卽可獲得某種利益，由是以某種投影法表示特殊國家當較以他法爲佳也。

雖則吾人不能作一於地球各部分均能正確之圖，然在一投影法中，保持某種一定之性質，並非困難。此種性質可列舉如下：

保持面積。

保持形狀（正變形）。

保持縮尺。

保持方向。

易於繪畫。

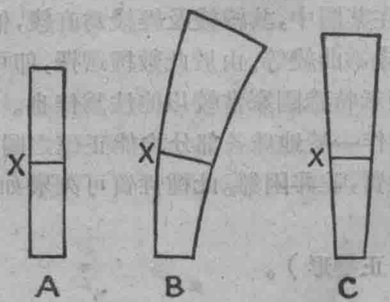
爲欲使一圖（依縮尺縮小之後）與其所代表地球上某部分之面積相等，則形狀必所忽略。同形與等積，兼而有之，實非可能。若不慮及形狀之變異，使一平面之面積相等，則此事頗爲簡單。例如，一長方形之邊爲一吋及四吋者，其面積與一每邊長二吋之正方形相等。再二平行四邊形在同底及介於相同之平行綫之間者，其面積亦相等。由簡單之計算，可作一圓，其所圍之面積可與一圓球之面積相等。相同之例，均可列舉，惟此處已足以說明僅保持面積並非難事。

正變形（orthomorphism）之性質殊較難解。苟一圖在其形狀之各方面均能正確，則此圖必爲正確之圖。但此點實不可能，故此詞殊易引起誤解。實際上，正變形僅適用於小面積之中。在理論上，此法僅能適用

於點，然苟如此精細區別，則吾人於此可毋庸討論。爲欲保持形狀起見，必須注意二點：(1)地球上之經綫及緯綫均相交成直角，故在正變形之投影地圖上，亦必如此。(2)在任何一點，其各方面之縮尺均相同，但此點與彼點間則可不同。

Hinks 君於其"地圖投影法"一書中舉正變形之例，如第一圖所示。

設 A 代表沿子午綫上之一狹條地區，由緯綫 X 分爲二等分。此狹條依正變形表示爲 B 及 C。在各圖式中，其角均仍爲直角，在任何各點如 X，其沿緯綫及經綫之縮尺均同等歪誤。但 C 式較 B 式爲佳，其中之經綫爲直綫，而 B 式中則否。



第一圖 示正變形（採自 Hinks 君）

縮尺之問題在下章中再詳爲討論。在此吾人可解釋縮尺乃地圖與實地之比例。再者，使縮尺正確於一圖之全部分，雖不可能；但使經綫正確，或緯綫正確，或某數經綫或緯綫之正確，則頗爲可能也。

保持方向或方位之正確常爲重要之事，尤於航海爲然。在此處固不能將此問題全部討論，但簡言之，卽最簡單之圖式爲保持自地圖中心之方向之正確。當地圖之中心與南北極相符合時，其方位角 (azimuths) 卽與經綫相符合。此種特殊應用之謀開托航海圖 (Mercator Chart) 在第十章中討論之。

最後，吾人必須考慮投影法之實際繪畫。同時亦須研究地圖網中所需要之計算方法。若其他之條件相等時，則所需要最少計算及最易繪畫之投影法選作特殊地圖時當較複雜者爲適宜。此種計算並非繪圖者所

研究之事，實爲數學者之工作。顯然繪畫直綫及圓弧較複雜曲綫爲易。然在實用上，此種意見之理論並不確當，因多種較複雜之投影法，繪畫時不僅美觀，同時更可適用於所描畫之國家。第七章中將進而討論之。

第二章

投影圖法之系統

由作圖學之意義言，"投影法"之字語並不必須包含透視的或"幾何學的"投影法。依吾人之目的言，此字語乃指一平面上任何事物之表示方法。吾人所研究者，卽將地球上之平行綫圈及子午綫描繪於一平面上之不同方法也。

試先由吾人討論一簡單之例式。設想於球體之中心有一光體，再設此光體可能射出子午綫及平行圈之影，或大洲及大洋之形狀於一平面紙上。爲簡單起見，吾人可假定一紙接觸於地球之北極。吾人卽可發現子午綫投射成爲直綫，平行圈則成圓圈。但在地球面上，緯度之平行圈間之距離爲相等者，在吾人之投影中，其距離則自中心向外逐漸增加。

若移動光綫或紙之位置，則圖上之影必大爲改變。例如，吾人可置光於南極，而置平面於平分球體處，卽在赤道之平面中。〔註一〕再者，此平面可使接觸於除北極之外之任何點。然則，方吾人投射地球之形狀爲陰影時，吾人卽可得在一平面上之數種透視的或幾何的投影法。

由此法作於一平面上之投影法，稱之爲方位圖法（Zenithal or Azimuthal Projection）一方位角（Azimuth）卽眞正之方向。在任何方位圖法中，自中心處之方向均係正確者。吾人已言及，平面可不必接於地球之兩極上。彼可接於赤道上之一點或在赤道與兩極之間。此三種圖式可名之爲正軸圖式（Normal 卽極圖法）赤道圖式（Equatorial）及斜軸圖式（Oblique）。

以上吾人僅論述透視方位圖法（Perspective zenithal projection）。但此僅就投影法之嚴格之字義上而言，固未能引爲滿足。爲求保持面積之正確或距離之保持，修正圖法卽以產生。關於修正圖法之性質在他處均有論及，但此處可言，此修正式或非透視式頗爲重要，亦如透視圖法之圖式然，可分正軸圖式，赤道圖式及斜軸圖式。

〔註一〕在此種圖式中，其影乃係"倒射"於平面上者。

然則,投影尚可構成他種平面。一頁之紙可捲成一圓錐,以適當之大小覆置於地球儀上。若圓錐體之頂點置於地球軸之沿長綫上時,此圓錐體即可置於一緯綫之上。此即係正軸圖式。一如方位圖法中之平面,可設想一圓錐體置於任何處所,惟僅正軸圖式始可作一有用之地圖。如方位圖法中,吾人可想像有透視及非透視二法,然在圓錐投影中,僅非透視圖法始有價值也。

投影法中之第三組可稱之爲圓柱圖法(Cylindrical Projection)。在此吾人可設想一紙捲成圓筒環覆於地球儀上。如前述二例然,吾人可得透視與非透視二法及極圖式赤道圖式及斜軸圖式。但最有用者乃非透視之赤道圖式。

除此三種普通之方法外,尚有多數重要之方法不能包入此任何式之中。吾人可稱之爲便宜圖法(Conventional Projections),其中並包括數種修正甚大之圓錐圖法。此類投影法在作法及形狀上變異甚大,但其應用則甚廣。此乃大多由於某種圖式中之修正爲欲使地圖册中獲得等積之用。再者,此類圖中包括有適用於國際百萬分之一地圖(International One-in-a-Million map)之投影法及適用於地形測量之投影法。

綜上所述,吾人可將投影圖法之普通分類作一表式,尤須注意於直接應用之諸圖法。

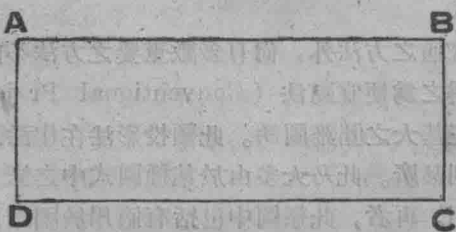
1. 方位圖法	透　視 非透視	正軸圖法 斜軸圖法 赤道圖法
2. 圓錐圖法	非透視	正軸圖法
3. 圓柱圖法	非透視	赤道圖法 橫軸圖法
4. 便宜圖法與修正圓錐圖法		

第三章

第一節　面積

在地圖投影法之研究中，吾人宜多討論面積之問題，及如何在依縮尺縮小之後，使一頁紙上之面積與地球儀，圓錐或圓柱上之面積相等。故初學者對於此問題應有若干之知識一事，殊爲重要；寫述本章之目的亦卽在此。

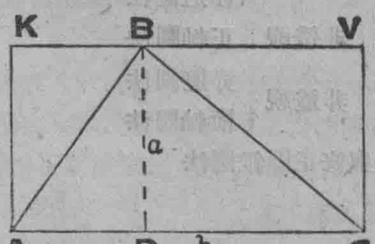
長方形之面積　最簡單之例卽爲長方形。設吾人已知二鄰邊之長，



第二圖　長方形之面積

其面積卽可由相乘之數得之。在第二圖中，其面積卽由 AB 與 AD 或 BC 之相乘。正方形乃長方形之特例。

三角形之面積　三角形之面積亦甚簡單。其面積等於同底及高之長方形之半。在第三圖中，ABC 與 AKVC 均在同底 BC 及同高 DB 之上。

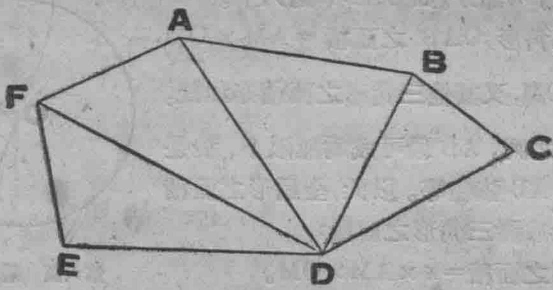


第三圖　三角形之面積

此點甚爲明瞭: $ABD=\frac{1}{2}AKBD$ 又 $DBC=\frac{1}{2}DBVC$。換言之，

$ABC=\frac{1}{2}AKVC$，或底$\times\frac{1}{2}$高 (BD)，或高 (BD)$\times\frac{1}{2}$底$=\frac{1}{2}a\times b$。

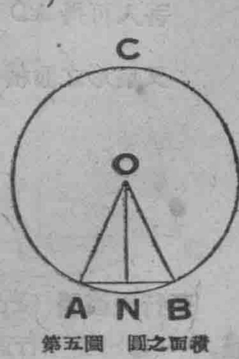
多邊形之面積　旣知三角形之面積，吾人立即可求得由直邊圍成之規則及不規則形之面積。祇須將其圖形分成多數三角形，則其全形之面積卽等於諸三角形面積之和。圖形 ABCDEF 之面積＝三角形 BCD，BDA，ADF，FDE 之總和。（第四圖）



第四圖　多邊形之面積

圓之面積　三角形之面積亦爲求圓面積之初步。設 ABC 爲一圓其圓心爲 O。將圓周等分爲任何數一n一之相等部分，AB 爲其中之一。連接 OA 及 OB。三角形 $OAB=AN\times NO\left(\frac{1}{2}底\times高\right)$故由是而成之多邊形之面積$=\frac{n}{2}AB\times ON$，或 $n\times AN\times ON$（第五圖）。

若繞圓周之各部分變成無限小，則每弦 (chord)，如 AB，最後將變成與弧 AB 同長——易言之，多邊形與圓之周邊相符合——或 $n\times AB=2\pi r$。同時垂綫 ON 最後與半徑 OA 及 OB 相符合。



第五圖　圓之面積

故圓之面積

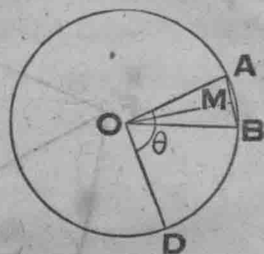
$=$無限小邊之多邊形面積

$=n\times AB\times\dfrac{ON}{2}$

$=2\pi r\times\dfrac{r}{2}$（因最後階段之ON變成半徑）

$=\pi r^2$

扇形（Sector）之面積　全圓之面積既知為 πr^2。設OAD為任何扇形，等分為 n 部分，如OAB（圖六）。



第六圖　扇形之面積

今，三角形OAB之面積 $=AM\times OM$ $=\dfrac{1}{2}AB\times OM$，又其他三角形之面積亦如此。但，一如圓之例，AB段可成為無限小，於是AB弧將與AB弦相等。以此，全扇形之面積卽等於所構成諸三角形之面積：

扇形之面積 $=n\times AM\times OM$。

又，在最後階段之OM變成等於圓之半徑 r 之長。

面積 $=n\times AM\times r$

$=r\times\dfrac{1}{2}$（弧之長）。

依三角法，設 $\theta=$AOD角之圓度，

吾人可得AD弧 $=r\theta$

又扇形之面積 $=\dfrac{1}{2}r\theta\times r$

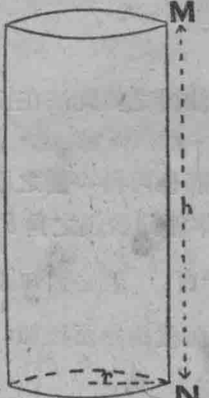
$=\dfrac{1}{2}r^2\theta$。（見附錄II.）

立體之面與面積

平行六面體（Parallelopiped）之面積　最簡單之例卽平行六面體，——卽三對平行面所圍成之形體。立方體為其特例。

立方體各面之面積由長與寬相乘得之。平行六面體各面之面積可由一邊與其對邊之垂直距離相乘得之。故欲求平行六面體之面積，即可求各面之面積，然後相加。

角錐體之面積　角錐體（Pyramid，或四面體 Tetrahedron），爲一除一面之外，其餘各面交會於一點，稱爲頂點之形體。除多數例中之底面外，其餘各面均爲三角形。其面積可求各面之面積，然後相加得之。其他由各平面圍成之複雜形體之面積亦可依同法求之。先求各面之面積，由直接之方法或分成諸三角形求之，然後再將其得數相加。



第七圖　圓柱體之面積

圓柱體之面積　設第七圖代表一圓柱體。其底之面積爲 πr^2。圓柱體之高爲 MN。設切割圓柱體而沿 MN 展開。顯然，吾人可得一長方形，其高爲 MN，即與圓柱體相同者，其長即等於底或圓柱體頂面之圓周。圓之圓周之長爲 $2\pi r$，又設圓柱體之高爲 h，則圓柱體曲面之面積爲 $2\pi rh$。

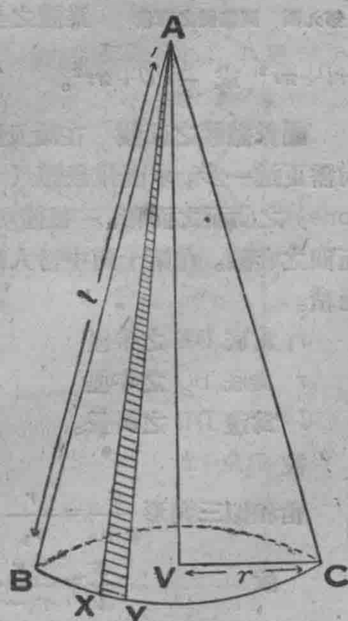
若包括兩底其面積爲

$$2\pi rh+2\pi r^2。$$

圓錐體（Cone）之面積　依據本書之目的，圓錐體之面積甚爲重要。設 ABC（圖八）爲一圓錐體。V 爲底之中心點，又 AV 爲底之垂綫。

稱 AB 爲 l，又 VC 爲 r。

假定圓錐體之表面爲無限數之三角形所構成，其中 AXY 爲一例。各三



第八圖　圓錐體之面積

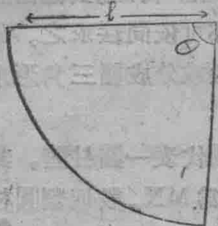
角形之共同頂點爲 A。諸三角形之高卽爲圓錐體之斜高 l。

於是此曲面卽等於諸三角形之和

$=\frac{1}{2}$含 l 及底邊之和之長方形

$=\frac{1}{2}l\times$底之圓周

$=\pi rl$，此處 r 卽底面之半徑。



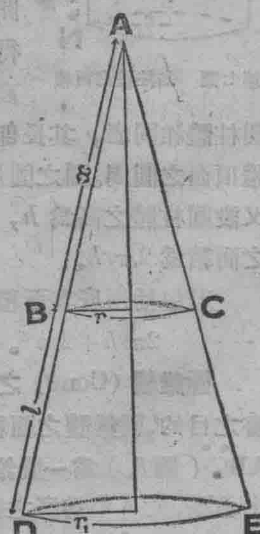
第九圖 圓錐體之面積

圓錐體之面積又可以他法得之，此法在投影法中更爲常用。

將圓錐體"解開"或展開，卽可得一圓之扇形。(圖九)〔註一〕設已知兩半徑間所成之角 θ，則其面積爲 $\frac{1}{2}l^2\theta$（見第十頁）若必需知圓錐體之全面積，則可將底之面積與曲面相加：

$\pi rl+\pi r^2$ 或 $\frac{1}{2}l^2\theta+\pi r^2$。

圓錐截體之面積 在論及圓球面積之先，尙需更進一步，求圓錐截體（Frustum of a cone）之曲面之面積。一截體可解釋爲二平行面間之容體。在第十圖中吾人欲求 BCED 之面積。



第十圖 圓錐截體之面積

r_1 爲底 DE 之半徑

r 爲底 BC 之半徑

l 爲邊 DB 之斜長。

設 BA$=x$

由相似三角形 $\frac{x}{x+l}=\frac{r}{r_1}$

故 $\frac{x}{l}=\frac{r}{r_1-r}$。

〔註一〕圓錐體可沿由頂點至底間之直線切開，然後展延之。由此而成之平面稱爲"可展面"見第四十九頁。

截體 BCED 之曲面

=圓錐體 ADE 之曲面－圓錐體 ABC 之曲面

$=\pi r_1(x+l)-\pi rx$

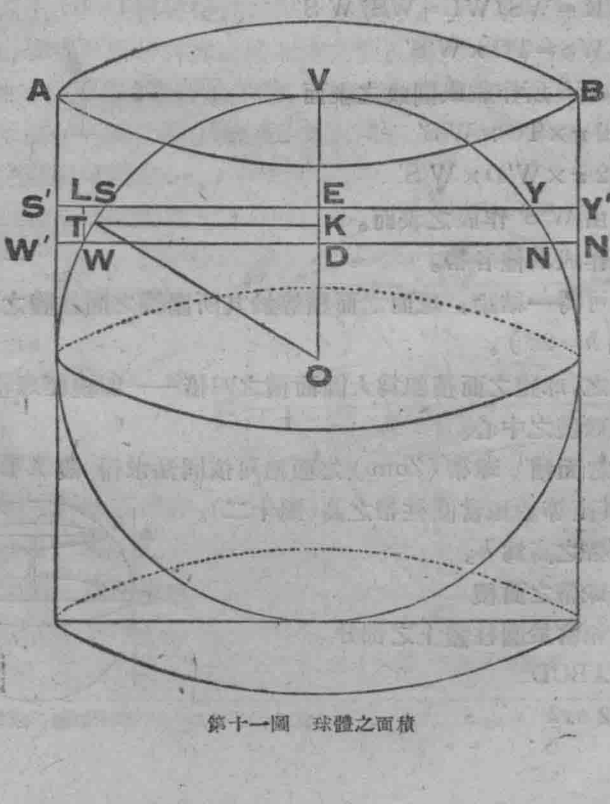
$=\pi[r_1 l+x(r_1-r)]$

$=\pi(r_1 l+rl)$

$=\pi l(r_1+r)$

球體之面積 因投影法爲研究球體 (Sphere) 在平面上之表現方法，故求球體一部或全部面積之法實異常重要。

在此，可證明球體之面積等於其圍繞之圓柱體，或 $=4\pi r^2$。在第十一圖中，VO 爲圍繞圓柱體之軸。S'Y'N'W' 及 SYNW 爲圓柱及圓球體之相當部分。



第十一圖 球體之面積

T為SW之中點，又TK垂直於OV。若WS為一直綫，吾人可視WSYN為圓錐截體，其面積等於 $\pi l(r_1+r)$，此處 l=WS，r_1=WD，又 r=SE。

因此截體之面積=$2\pi\times$TK$\times$WS，因圓錐體之曲面=$2\pi\left(\frac{r_1+r}{2}\right)l$，或 $2\pi l\times$截體兩端半徑之數學平均數——在此例中，即SE及WD，其平均數為TK。

LW平行於S'W'，又SW垂直於TO，因T為WS之中點。

同時 ∠WSL=∠STK，因 LE∥TK。

又 ∠STK=90°−∠KTO=∠TOK。

故三角形WLS與TOK相似。

故 TO/TK=WS/WL=WS/W'S'

故 TK×WS=TO×W'S'

故由WS所作成或圍成之表面

=$2\pi\times$TO×W'S'

=$2\pi\times$W'D×W'S'

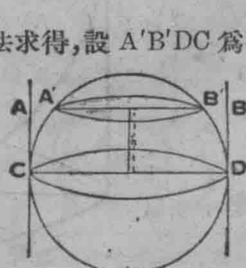
=由W'S'作成之表面。

依同法可作成其他各帶。

由是可得一結論，球面之面積等於其所圍繞之圓柱體之面積，即 $4\pi r^2$（因 $h=2r$）。

易言之，球體之面積即為大圓面積之四倍——即繞經球體之圓，其平面穿過球體之中心。

球帶之面積 球帶（Zone）之面積可依同法求得，設A'B'DC為任何球帶。其高等於相當圓柱帶之高（圖十二）。



第十二圖 球帶之面積

稱此帶之高為 h。

今此球帶之面積

=相當於圓柱體上之部分

=ABCD

=$2\pi rh$

故球帶之面積$=2\pi rh$或大圓之圓周×帶之高。參考第十四圖，說明$h=\mathrm{R}\sin\phi$

$\therefore$地球儀半徑R之球帶之面積$=2\pi\mathrm{R}\times\mathrm{R}\sin\phi=2\pi\mathrm{R}^2\sin\phi$。

第二節　緯度與經度

當吾人研究地圖及地圖投影法時，吾人卽含有緯度及經度之知識。若非先將緯綫及經綫繪成，卽不能作一地圖，因地面上之各地點均由此法決定也。

吾人試指一地在北緯50°。其意云何？吾人可繪一50°之綫，經過此地點，則卽知此綫平行於赤道，該赤道亦卽爲緯度0°之一綫。設吾人取一點在緯度50°之上，另一點在緯度0°之上，該兩點均在經過地球儀地軸之平面上〔註一〕再連接此二點以達地心，吾人卽可知其間之角爲50°。因此，緯度可解釋爲赤道南北之角距。緯度之平行圈爲一想像之綫，繪於地球之周圍，平行於赤道，並與之成一常定之角距。緯度僅有一綫——赤道——爲大圓。"經度"爲東向或西向所測得者。經度之子午綫爲全完環繞球體之一綫，並通過兩極。凡經綫均爲大圓。

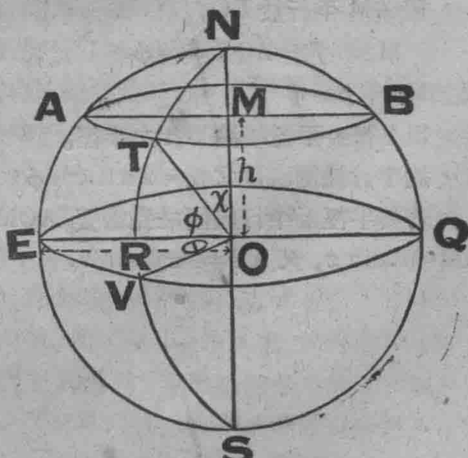
地球儀上之緯綫及經綫均相交成直角。

在第十三圖中EVQ爲赤道。

EO，球體之半徑$=\mathrm{R}$。

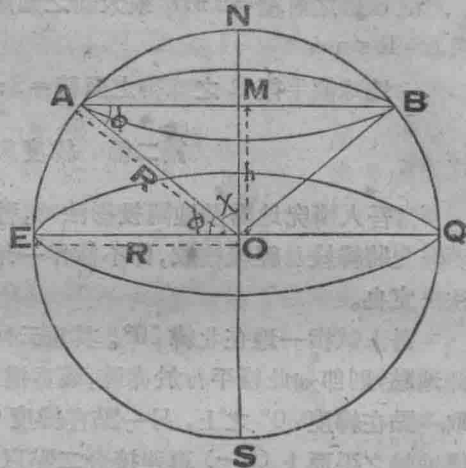
ATB爲一緯綫，其與赤道之角距爲TOV角$=\phi$。

TON角稱之爲極距或T之餘緯度$=x=(90°-\phi)$或$(90°-$緯度$)$。



第十三圖　示緯度與經度

〔註一〕易言之，其點卽在同一經度之子午線上。



第十四圖 示緯度與經度

SANQ 及 SVTN 均爲經度之子午綫圈，其分隔之角距爲角 $EOV=\theta$。

AM 爲緯綫 ATB 之半徑。

ABQE 爲一球帶，其高度爲 $MO=h$。

設吾人已知地球儀R之值，及任何平行圈之緯度，則求平行圈之長甚易。

在第十四圖中吾人有如前圖相同之字母，但後圖則更爲簡單。

平行綫圈 AB 之緯度爲 AOE 角 $=\phi$

$EO=AO=R$。

因 AM 平行於 EO，

MAO 角 $=$ AOE 角 $=\phi$

故 $AM=R\cos\phi$

但 AM = 平行綫圈 AB 之半徑。

故平行綫圈 AB 之長 $=2\pi R\cdot\cos\phi$

若其半徑及平行綫圈之長需要 AOM 角（餘緯度）解釋時，則 $AM=R\sin x$，又 $AB=2\pi R\sin x$。