

高等数学同步训练习题 (上)

主 编 宋介珠 郑维英

副主编 黄胜娟 于君凤

清华大学出版社

高等数学同步训练习题 (上)

主 编 宋介珠 郑维英

副主编 黄胜绢 于君凤

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步训练习题,分为上、下两册.上册内容为一元函数微积分、空间解析几何与向量代数,下册内容为多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数和微分方程.

本书是按教学大纲的要求而配备的习题,每一章后配备一套自测题,书的最后配备了四套期末模拟试题,旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容.本书适用于工科本科生.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步训练习题.上/宋介珠,郑维英主编. —北京:清华大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-302-29321-7

I. ①高… II. ①宋… ②郑… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 155603 号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

社 总 机:010-62770175

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

邮 编:100084

邮 购:010-62786544

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:260mm×185mm

印 张:6

字 数:123 千字

版 次:2012 年 8 月第 1 版

印 次:2012 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~6000

定 价:10.00 元

产品编号:048752-01

前 言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步训练习题,分为上、下两册.上册内容为一元函数微积分、空间解析几何与向量代数.

本书是以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序,与现行教学计划同步,并按教学大纲的要求而配备的习题,并且每一章后配备一套自测题,书的最后还配备了四套期末模拟试题,旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容.同时,这本书的形式为学生的作业本,比较规范,既便于学生书写、保留,又便于教师批改.书后不配备相

应的解答,有利于培养学生独立思考和解决问题的能力.

本书适用于工科本科生.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家、同仁不吝指教.

《高等数学同步训练习题》编写组

2012年4月

目 录

第一章 函数与极限	1	习题课	21
第一节 映射与函数	1	自测题	22
第二节 数列的极限	2	第三章 中值定理与导数的应用	25
第三节 函数的极限	2	第一节 微分中值定理	25
第四节 无穷小与无穷大	3	第二节 洛必达法则	27
第五节 极限运算法则	4	第三节 泰勒公式	28
第六节 极限存在准则 两个重要极限	5	第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	29
第七节 无穷小的比较	6	第五节 函数的极值与最大值、最小值	31
第八节 函数的连续性与间断点	7	第六节 函数图形的描绘	33
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	8	第七节 曲率	34
第十节 闭区间上连续函数的性质	8	习题课 1	35
习题课	9	习题课 2	36
自测题	10	自测题	37
第二章 导数与微分	13	第四章 不定积分	39
第一节 导数概念	13	第一节 不定积分的概念与性质	39
第二节 函数的求导法则	14	第二节 换元积分法	41
第三节 高阶导数	16	第三节 分部积分法	45
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	17	第四节 有理函数积分	47
第五节 函数的微分	19	习题课	49

自测题	50	第七章 空间解析几何与向量代数	73
第五章 定积分	51	第一节 向量及其线性运算	73
第一节 定积分的概念与性质	51	第二节 数量积 向量积	75
第二节 微积分的基本公式	53	第三节 曲面及其方程	76
第三节 定积分的换元法和分部积分法	55	第四节 空间曲线及其方程	78
第四节 反常积分	59	第五节 平面及其方程	78
习题课	61	第六节 空间直线及其方程	79
自测题	62	习题课	81
第六章 定积分的应用	65	自测题	81
第一节 定积分的元素法	65	模拟试题一	83
第二节 定积分在几何上的应用	65	模拟试题二	85
第三节 定积分在物理学上的应用	69	模拟试题三	87
习题课	71	模拟试题四	89
自测题	71		

第一章 函数与极限

重点：函数的概念、极限概念、连续性概念和极限的求法。

难点：复合函数、极限定义的理解，分段函数的极限与连续。

第一节 映射与函数

1. 选择题

(1) 函数 $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域为()。

(A) (0,5) (B) [1,4)

(C) (1,4] (D) [1,4]

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x| \leq 3, \\ x^2-9, & 3 < |x| < 4 \end{cases}$ 的定义域是()。

(A) [-3,4) (B) (-3,4)

(C) [-4,4) (D) (-4,4)

(3) 设函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ ($a > 0, a \neq 1$)，则函数是()。

(A) 奇函数 (B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数 (D) 既奇又偶函数

(4) 下列函数中为初等函数的是()

(A) $y = \sqrt{\cos x - 2}$ (B) $y = \sqrt{\sin x - 1}$

(C) $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ (D) $y = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y = e^{x^2}$ ；

(2) $y = \arccos \sqrt{\ln(x^2-1)}$ 。

3. 已知 $f(x+1) = x^2 + x + 3$ ，求 $f(x)$ 的表达式。

4. 欲做一容积为 300 m^3 的无盖金属圆柱筒，筒底单位造价是筒壁单位造价的 2 倍，试确定该筒的总造价与半径的函数关系。

第二节 数列的极限

1. 观察下列各数列的变化趋势,写出它们的极限.

(1) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$;

(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

(3) $x_n = \frac{n^2 + 1}{n}$;

(4) $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

第三节 函数的极限

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的
_____条件; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有
界的_____条件.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的值为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 不存在

3. 设 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 求当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 的左、

右极限,并说明 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在,同时画出 $f(x)$ 的图形.

第四节 无穷小与无穷大

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的 _____ 条件; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的 _____ 条件.

2. 下列函数在给定的变化过程中哪些是无穷小, 哪些是无穷大?

(1) 当 $x \rightarrow -2$ 时, $y = x^3 + 8$;

(2) 当 $x \rightarrow -3$ 时, $y = \frac{x-3}{x+3}$;

(3) 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = 3x + 2$;

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = 2^{10\,000}$.

3. $y = \frac{x+1}{x-1}$ 在什么过程是无穷小, 什么过程是无穷大?

第五节 极限运算法则

1. 下述运算过程正确的是().

$$(A) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)} = \infty$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(D) \text{ 已知 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1} = l$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, l = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

4. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k} \right)$ (k 为常数).

第六节 极限存在准则 两个重要极限

1. 选择题

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = (\quad).$

- (A) 0 (B) 1 (C)
- ω
- (D) 不存在

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = (\quad).$

- (A) 1 (B) 0 (C)
- ∞
- (D) 不存在

(3) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{kn} = e^{-3}$, 则 $k = (\quad).$

- (A)
- $\frac{3}{2}$
- (B)
- $\frac{2}{3}$
- (C)
- $-\frac{3}{2}$
- (D)
- $-\frac{2}{3}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = (\quad).$

- (A) 1 (B) e (C)
- e^{-1}
- (D)
- ∞

2. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x;$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1};$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^x.$

第七节 无穷小的比较

1. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 与 $A(1-x^3)$ 等价, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 + x$ 与 $x^3 + x^2$ 哪一个高阶无穷小? 说明理由.

3. $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x^2}$ 与 $\frac{1}{x^3}$ 哪一个低阶无穷小? 说明理由.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \tan^3 x}{\sin 2x^3 \cdot \tan \sqrt{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin^2 x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{3 \sin x};$$

第八节 函数的连续性与间断点

1. 填空题

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是它在该点处连续的一个 _____ 条件.

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

① 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ _____, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点;

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ _____, 则 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点;

③ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ _____, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$ 的间断点为 _____.

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ b + x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$

则① $a =$ _____, $b =$ _____ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在;

② $a =$ _____, $b =$ _____ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 研究下列函数在指定点处的连续性,若是间断点,确定其类型.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 2x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处.}$$

$$(2) y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1, \end{cases} \text{ 在 } x=1 \text{ 处.}$$

$$(3) y = x \sin \frac{1}{x}, \text{ 在 } x=0 \text{ 处.}$$

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1-x}{1+x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\sin^2 x)^{\csc^2 x}.$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

内连续.

第十节 闭区间上连续函数的性质

1. 证明: $x \cdot 5^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根.

习 题 课

1. 填空题

(1) 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x)$ 的定义域为

_____.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \arctan \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases} \text{ 则 } x = 0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的}$$

_____点.

2. 选择题

(1) 下列各式不正确的是().

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^2$, 则 $a = (\quad)$.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

$$(3) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ 的连续区间为 } (\quad).$$

(A) $[0, 2]$

(B) $(0, 2)$

(C) $[0, 1) \cup (1, 2]$

(D) $(0, 1) \cup (1, 2]$

3. 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 5^n}{(-2)^{n+1} + 5^{n+1}};$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \sin n}{n+1};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+179}{x-2} \right)^{11x+1};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \sin x};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{\frac{1}{x}};$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right);$$

4. 求 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点并判断间断点类型.

5. 设 $f(x) = e^x - 2$, 证明: 在 $(0, 2)$ 内至少存在一点 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$.

自 测 题

一、填空题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{ax+b}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \end{cases}$ 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $a =$

_____, $b =$ _____.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(1-x)}{(x-1)^2(x+2)} =$ _____.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{2}} =$ _____.

5. $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$ 的间断点是 _____, 属于 _____ 间

断点.

二、选择题

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 下列函数中有极限的是().

(A) $\sin x$

(B) $\frac{1}{e^x}$

(C) $\frac{x+1}{x^2-1}$

(D) $\arctan x$

2. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列函数中() 为无穷小量.

(A) $x \sin \frac{1}{x}$

(B) $e^{\frac{1}{x}}$

(C) $\ln x$

(D) $\frac{1}{x} \sin x$

三、计算下列各题:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+1)^{30} (9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin 2x}{x} - \frac{x \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+x^2} - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 + x^4}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}$