高等学校工科数学系列教材

高等数学

华东六省工科数学系列教材编委会　主编

（上册）

辽宁科学技术出版社

高等数学

高等学校工科数学系列教材

高等数学

上 册

华东六省工科数学系列教材编委会 主编

辽宁科学技术出版社

高等数学

Gaodeng Shuxue

上册

华东六省工科数学系列教材编委会　主编

辽宁科学技术出版社出版发行（沈阳市南京街6段1里2号）

朝阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：15 3/4　字数：350,000

1990年6月第1版　　1990年6月第1次印刷

责任编辑：符　宁　　责任校对：东　戈

封面设计：曹太文

印数：1—14,652

ISBN 7-5381-0862-9/O·47　　定价：6.30元

华东六省工科数学系列教材编审委员会

前　言

华东六省高等学校工科数学教学研究会应地区各省高校工科数学教研会的要求，成立了华东六省工科数学系列教材编审委员会，以组织有关院校协同编写工科数学有关课程的教材。旨在总结近年来在贯彻国家教委颁发的“关于高等学校数学课程基本要求”及数学教学改革经验的基础上，编写一套既能贯彻“基本要求”又能体现“加强基础，拓宽知识，增强适应性”精神的工科数学教材。其中，本书（“高等数学”上、下两册）与“高等数学学习指导书”（上、下两册）和“高等数学习题集”配套出版，相辅使用。

本书在以下几个方面作了较大努力：尽量注意与中学数学教材的衔接；力求渗透较新的观点与方法；在加强基础的前提下，结合相应内容拓广知识面；重视培养学生的分析问题和解决问题的能力、自学能力以及建立数学模型的能力；注意体现教学中的量力性原则，加强对于处理工程技术问题意义较大的数学工具（比如矢量等）的应用。因此，本书具有一定新意和比较鲜明的特色。

本书上册含“函数、极限与函数连续性”、“导数与微分”、“微分学中值定理”、“导数的应用”、“不定积分”、“定积分”、“定积分的应用”和“常微分方程〈一〉”等八章，下册含“空间解析几何与向量代数”、“多元函数微分学”、“重积分”、“曲线积分和曲面积分”、“无穷级数”和“常微分方程〈二〉”等六章。以章为序，它们分别由下列同志编写：

张伯生、董凡平、吴长泰、金恂、王根新、徐征、邬国根、万志远、段登云、曾华堂、李定荣、周先启、黄一萍。参加审稿的同志有：程乃栋、李火林、朱功勤、刘镇国、许有信、王文蔚、蔡又中、张彬、刘冠军、欧阳惠、潘鹊屏。本书的复审修改和统稿工作是在国家教委工科数学课程指导委员会陶永德、卢树铭主持下完成的。王文蔚、盛立刚参加了这一工作。

本书在编写过程中，得到了承担编写任务的各院校领导的大力支持，得到了所在省的高等学校数学教学研究会的热情帮助，又蒙张虹安同志为全书绘制插图，在此，一并表示衷心的感谢。

限于水平和时间，书中缺点和错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

华东六省高等学校工科

数学教学研究会

1989年10月

目　录

第一章　函数、极限与函数连续性

高等数学是一门研究变量的数学，它在自然科学与社会科学的许多领域里都有着广泛的应用。函数是变量变化关系的数学描述。极限方法是研究变量的一种基本方法。自然界中许多自然现象在数量关系上都具有连续性，连续函数是一类最基本最常见的函数，是高等数学研究的主要对象。因此，函数、极限与函数连续性是高等数学的基础。本章将介绍函数、极限与函数连续性的基本概念以及它们的一些主要性质。

第一节　函　　数

一、集合及其运算

如同几何中的点、线、面一样，集合是一种只能描述而不能定义的一个最基本的原始概念。通常可把所考察的各个确定的对象的全体称为一个集合（简称为集），而把每个考察对象称为这个集合的元素。例如，假设所考察的对象是某个班级的学生，那么就可以把这个班级的全体学生看作是一个集合，其中每个学生都是这个集合的元素。集合通常用大写字母表示，如A，B，…，集合的元素通常用小写字母表示，如a，b，…。设a是集合M的元素，记作$a\in M$（读作a属

于M）；如果a不是M的元素，则记作$a\overline{\in}M$（或$a\notin M$，读作a不属于M）。

集合的常用表示法有列举法和描述法两种。

用列举法表示集合，是将组成集合的所有元素一一列举在一个大括号内。例如，由元素 a_1，$a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合A，可记作

$$A=\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n\}。$$

集合

$$B=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\right\},$$

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\cdots,n,\cdots\}$$

都由无限个元素组成。N又叫做自然数集。

用描述法表示集合，是把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内，一般的描述方式是

$$\{x\,|\,x\text{具有性质}S\}。$$

例如，$R=\{x\,|\,x\ \text{为实数}\}$称为实数集。$A=\{(x,y)\,|\,x\in R,\ y\in R,\ x^2+y^2=1\}$，表示$xoy$平面上以原点$O$为中心，半径等于1的圆周上的点的全体组成的集合。

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合，如果没有特别声明，所提到的数都是实数。我们把全体自然数的集合记作N，全体整数的集合记作Z，全体有理数的集合记作Q，全体实数的集合记作R。

区间是用得较多的数集。数集$\{x\,|\,a<x<b\}$称为开区间，记作(a,b)。$a\overline{\in}(a,b)$，$b\overline{\in}(a,b)$。类似地数集$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，$a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$；数集$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$称为半开半闭区间。$a$，$b$称为这些区间的端点。

上述区间都叫做有限区间，还有无限区间如$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 及 $(-\infty,+\infty)$。以后如不需要严格区分是哪种区间时，就泛称为区间，并记作 I，如需区别不同区间时，可在 I 上加下标，如I_X，I_Y 等等。

邻域也是一个经常用到的概念。设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作$U(a,\delta)$（或$U_\delta(a)$）。即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

因为$|x-a|<\delta$ 相当于：$a-\delta<x<a+\delta$，因此 $U(x_0,\delta)$ 在数轴上表示以 a 为中心，长度为2δ的开区间（图 1 — 1）。

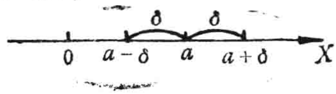

图1—1

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，称为 a 的去心 δ 邻域，记作$U^0(a,\delta)$，（或$U^0_\delta(a)$）即

$$U^0(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了适应即将提及的集合运算的需要，我们还把不含有任何元素的集合称为空集。记作 ϕ。例如

$$\{x \mid x^2+1=0,\ x\in R\}=\phi;$$

$$\{x \mid x\leqslant -1 且 2x>1,\ x\in R\}=\phi.$$

因为适合条件 $x^2+1=0$ 和 $x\leqslant-1$ 且$2x>1$ 的实数不存在。

在了解集合概念的基础上，我们进一步研究集合之间的关系以及集合的运算。

定义1.1.1（子集） 若集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称集合A是集合 B的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作A含于 B（或 B 包含A）。若集合A是集合 B的子集，而集合 B 中至少有一个元素不属于A，则称A是 B的真

子集，记作$A \subset B$。

例如，$N \subseteq Z$，$Z \subseteq Q$，$Q \subseteq R$。

又如，$\{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$，$\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$，$\{0, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$，$\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$，$\{1\}$、$\{2\}$、$\{0\} \subset \{0, 1, 2\}$。对于空集$\phi$，规定它是任何集合的子集。

由定义及上面的规定，我们说一个集合A的一切子集时，应把这个集合本身和空集包括在内。例如集合$\{1, 2, 3, 4\}$的一切子集为$\{1, 2, 3, 4\}$，ϕ，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{1, 4\}$，$\{2, 3\}$，$\{2, 4\}$，$\{3, 4\}$，$\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2, 4\}$，$\{1, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$。

定义1.1.2（集合相等） 设A、B是两个集合，若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B两个集合相等，记作$A = B$。

例如，$A = \{x \mid x(x-1) < 0\}$，$B = \{x \mid 0 < x < 1\}$都表示由一切大于零小于1的正数组成的集合，所以$A = B$。

又如，集合$\{2, 4, 6, 8\}$和$\{2, 2, 4, 4, 6, 8\}$尽管后一集合中，元素2，4各出现两次，但这两个集合都只包含2，4，6，8四个元素，而不包含其它的元素，因此，这两个集合是相等的。

定义1.1.3（集合的运算） 设A、B都是M的真子集（$A \subset M$，$B \subset M$）。由M中至少属于A、B之一的元素组成的集合，称为集合A与集合B的并，记作$A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A 或 x \in B\}。$$

由M中既属于A又属于B的元素组成的集合，称为集合A与集合B的交，记作$A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A 且 x \in B\}$$

当$A \cap B = \phi$时，称A与B不交或称A与B是分离的。

由集合M中属于A但不属于B的元素组成的集合，称为A、B的差，记作$A|B$（或$A-B$），即

$$A|B=\{x\in M|x\in A\text{但 }x\overline{\in}B\}.$$

集合M与它的子集A之差，称为A在M中的余集（或补集），记作C_MA（或$\overline{A}$）。即

$$\overline{A}=C_MA=\{x\in M|x\in M,\ x\overline{\in}A,\ A\subset M\}.$$

定义中的集合M称为全集或母集。

例如，不等式 $x^2-3x-4>0$ 的解集可表示为 $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$。不等式 $x^2-3x-4\leqslant0$ 的解集可表示为 $[-1,+\infty)\cap(-\infty,4]$。

对于不等式组

$$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x+3>0\end{cases}$$

若记 $A=\{x|x<1\},B=\{x|x>2\},C=\{x|x+3>0\}$，则它的解集可表示为 $(A\cup B)\cap C$。

又如，$\{1,2,4,5\}|\{3,4,5,7\}=\{1,2\}$

$[0,2]|[1,3]$

$=[0,1)$（图1—2）

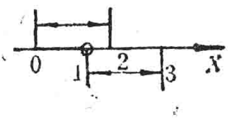

图 1 — 2

关于集合的运算，我们可用下面的文氏图来表示（图1—3）。

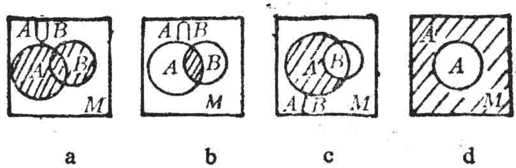

图 1 — 3

集合的并与交运算满足以下的运算律