

考研数学

常考题型 解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著

文都考研命题研究中心◎编

数学二

文都网校® 终身学习导师

领课码:

1. 刮开涂层获取领课码，访问 <http://moni.wenduedu.com>
2. 输入领课码免费领取书配课
3. 开始学习吧！

咨询热线: 400-010-8090
扫描二维码关注文都网校



正版图书配套视频讲解（网校买课送书）

- ☑ 名师32课时导学精讲
- ☑ 数学中的超级复习全书

超值赠送：《经典常考题型同步测试题》+ 网络答疑



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

考研数学

常考题型 解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著
文都考研命题研究中心◎编

数学二

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考题型解题方法技巧归纳. 数学二 / 毛纲源编著. —— 武汉: 华中科技大学出版社, 2014. 10

(毛纲源考研数学辅导系列)

ISBN 978-7-5680-0406-0

I. ①考… II. ①毛… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219409 号

考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学二)

毛纲源 编著

策划编辑: 王汉江(QQ:14458270)

责任编辑: 王汉江

特约编辑: 陈文峰 李 焕

封面设计: 杨 安

责任监印: 朱 霞

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)81321915

录 排: 北京世纪文都教育科技有限公司

印 刷: 北京市通州运河印刷厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 28.5

字 数: 711 千字

版 次: 2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 54.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前言

本书在教育部制定的考研数学二“考试大纲”的指导下,经过多年的教学实践精心编写而成,完整的知识体系,更加符合当前考生复习备考的需求.全书共分为两篇:第1篇为高等数学,第2篇为线性代数.

书中重点讲述与考纲中基本概念、基本理论、基本方法有关的经典试题,内容丰富,题型广泛、全面,任何一年的真题均可在本书中找到对应的题型;同时作者还对各类重点常考题型的解题思路、方法和技巧进行归纳、总结,对容易出错的地方以“注意”的形式作了详尽的注解加以强调.讲解的方法通俗易懂,由浅入深,富于启发,是一本广度、深度及难度均适合广大考生使用的考研辅导书.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学二的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,并尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,久销不衰.很多已考取理工类硕士研究

生都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛书结合起来学习,必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

毛纲源

2014年10月于武汉理工大学

目 录

第 1 篇 高等数学

1.1 函 数	(2)
1.1.1 求两类函数的表达式	(2)
题型 1.1.1.1 已知一函数求其反函数的表达式	(2)
题型 1.1.1.2 求与复合函数有关的函数表达式	(2)
1.1.2 函数的奇偶性	(3)
题型 1.1.2.1 判别(证明)几类函数的奇偶性	(3)
题型 1.1.2.2 奇、偶函数性质的应用	(6)
1.1.3 判别(证明)函数的周期性	(7)
1.1.4 判定函数的有界性	(9)
题型 1.1.4.1 判定在有限开区间内连续函数的有界性	(9)
题型 1.1.4.2 判定无穷区间内连续函数的有界性	(10)
题型 1.1.4.3 判定分段连续函数的有界性	(10)
1.2 极限、连续	(12)
1.2.1 极限的概念与基本性质	(12)
题型 1.2.1.1 正确理解极限定义中的“ $\epsilon-N$ ”、“ $\epsilon-\delta$ ”、“ $\epsilon-X$ ”语言的含义	(12)
题型 1.2.1.2 正确区别无穷大量与无界变量	(12)
题型 1.2.1.3 正确运用极限的保序性、保号性	(14)
题型 1.2.1.4 正确运用极限的四则运算法则及夹逼准则求极限	(15)
题型 1.2.1.5 正确理解乘积极限的存在性	(16)
题型 1.2.1.6 正确理解复合函数极限的存在性	(16)
1.2.2 求未定式极限	(17)
题型 1.2.2.1 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(17)
题型 1.2.2.2 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(21)
题型 1.2.2.3 求 $\infty - \infty$ 型极限	(22)
题型 1.2.2.4 求幂指函数型(0^0 型、 ∞^0 型、 1^∞ 型)极限	(22)
1.2.3 求数列极限	(25)
题型 1.2.3.1 求数列通项为 n 项和的极限	(25)
题型 1.2.3.2 求无穷多项积的极限	(28)
题型 1.2.3.3 求有限项之和或之积的数列极限	(28)
题型 1.2.3.4 求由递推关系式给出的数列的极限	(29)
1.2.4 求几类子函数形式特殊的函数极限	(31)
题型 1.2.4.1 求需先考察左、右极限的函数极限	(31)
题型 1.2.4.2 求含根式差的函数极限	(33)
题型 1.2.4.3 求含或可化为含指数函数差的函数极限	(33)
题型 1.2.4.4 求含 $\ln f(x)$ 的函数极限,其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$	(34)
题型 1.2.4.5 求含有界变量因式的函数极限	(35)

题型 1.2.4.6 求含取整函数的函数极限	(35)
1.2.5 求含参变量 x 的函数极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$	(36)
题型 1.2.5.1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$, 其中 $\varphi(n, x)$ 或可化为指数函数型 $F(x)^{g(n)}$	(36)
题型 1.2.5.2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$, 其中 $\varphi(n, x)$ 或可化为幂函数型 $g(n)^{F(x)}$	(37)
题型 1.2.5.3 求 $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t, x)$, 其中 $\varphi(t, x)$ 或可化为 $F(x)^{g(t)}$ 型或 $g(t)^{F(x)}$ 型	(37)
题型 1.2.5.4 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n, x)^{g(x, n)}$ 或 $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t, x) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t, x)^{g(x, t)}$	(38)
1.2.6 已知一极限求其待定常数或另一极限	(38)
题型 1.2.6.1 已知极限式的极限, 求其待定常数	(38)
题型 1.2.6.2 由含未知函数的一些极限, 求含该函数的另一极限	(44)
1.2.7 比较和确定无穷小量的阶	(45)
题型 1.2.7.1 比较无穷小量的阶	(47)
题型 1.2.7.2 确定无穷小量的阶数	(48)
题型 1.2.7.3 正确运用无穷小量阶的运算法则	(49)
1.2.8 讨论函数的连续性及其间断点的类型	(50)
题型 1.2.8.1 判断函数的连续性	(50)
题型 1.2.8.2 求函数的间断点并判断其类型	(54)
1.2.9 连续函数性质的两点应用	(56)
题型 1.2.9.1 证明中值等式命题	(56)
题型 1.2.9.2 证明方程实根的存在性	(58)
1.3 一元函数微分学	(61)
1.3.1 导数定义的两点应用	(61)
题型 1.3.1.1 判断函数在某点的可导性	(61)
题型 1.3.1.2 求分式函数的极限	(65)
题型 1.3.1.3 讨论函数性质	(67)
1.3.2 讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性	(68)
题型 1.3.2.1 讨论分段函数的可导性	(68)
题型 1.3.2.2 讨论分段函数导函数的连续性	(70)
题型 1.3.2.3 讨论某类特殊分段函数的连续性、可导性及其导函数的连续性	(71)
1.3.3 讨论含绝对值函数的可导性	(72)
题型 1.3.3.1 讨论 $ f(x) $ 的可导性	(72)
题型 1.3.3.2 讨论 $f(x) = \varphi(x) g(x)$ 的可导性	(73)
1.3.4 求一元函数的导数和微分	(74)
题型 1.3.4.1 求复合函数的导数	(74)
题型 1.3.4.2 求反函数的导数	(75)
题型 1.3.4.3 求隐函数的导数	(76)
题型 1.3.4.4 求由参数式确定的函数的导数	(78)
题型 1.3.4.5 求分段函数的导数	(79)
题型 1.3.4.6 求幂指函数及含多个因子连乘积的函数的导数	(80)
题型 1.3.4.7 求某些简单函数的高阶导数	(81)

题型 1.3.4.8 求一元函数的微分	(83)
1.3.5 利用连续性、可导性确定待定常数	(85)
题型 1.3.5.1 利用连续性确定待定常数	(85)
题型 1.3.5.2 利用可导性确定待定常数	(87)
1.3.6 利用微分中值定理的条件及其结论解题	(88)
1.3.7 利用罗尔定理证明中值等式	(90)
题型 1.3.7.1 证明中值等式 $f'(\xi) = 0$ 或 $f''(\xi) = 0$	(90)
题型 1.3.7.2 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, 其中 c, b 为常数	(91)
题型 1.3.7.3 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $g(\xi)f'(\xi) + h(\xi)f(\xi) = Q(\xi)$ (1.3.7.1)	(92)
题型 1.3.7.4 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$	(93)
题型 1.3.7.5 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$	(93)
题型 1.3.7.6 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$	(94)
题型 1.3.7.7 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	(94)
题型 1.3.7.8 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ (n 为正整数)	(94)
题型 1.3.7.9 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b\xi] = b$	(95)
题型 1.3.7.10 证明含两端点(及其函数值)的中值等式	(96)
题型 1.3.7.11 证明与定积分有关的中值等式	(97)
1.3.8 拉格朗日中值定理的应用	(99)
题型 1.3.8.1 证明与函数差值(改变量)有关的中值(不)等式	(99)
题型 1.3.8.2 证明函数与其导函数的关系	(100)
题型 1.3.8.3 求解与函数差值有关的问题	(103)
题型 1.3.8.4 求中值的极限位置	(103)
1.3.9 利用柯西中值定理证明中值等式	(105)
题型 1.3.9.1 证明两函数差值(增量)比的中值等式	(105)
题型 1.3.9.2 证明两函数导数比的中值等式	(106)
1.3.10 证明多个中值所满足的中值等式	(107)
1.3.11 泰勒定理的几点应用	(109)
题型 1.3.11.1 求函数的泰勒展开式	(109)
题型 1.3.11.2 应用泰勒公式(麦克劳林公式)求极限	(110)
题型 1.3.11.3 证明含高阶导函数的中值命题	(111)
题型 1.3.11.4 应用泰勒公式(或麦克劳林公式)证明不等式	(112)
题型 1.3.11.5 求函数在某点处的高阶导数值	(114)
1.3.12 利用导数证明不等式	(115)
题型 1.3.12.1 证明与函数改变量有关的不等式	(116)
题型 1.3.12.2 利用函数的导数不等式证明函数不等式	(117)
题型 1.3.12.3 证明含有或可化为含有均值变量(自变量或函数)的不等式	(117)
题型 1.3.12.4 已知 $F(a) \geq 0$ (或 $F(b) \geq 0$), 证明 $x > a$ (或 $x < b$) 时 $F(x) > 0$	(118)
题型 1.3.12.5 证明含常数加项的不等式	(120)
题型 1.3.12.6 证明含两个变量(常数)的函数(数值)不等式	(121)
题型 1.3.12.7 利用函数和导数的几何意义证明函数不等式	(121)
1.3.13 讨论函数性态	(123)

(88)	题型 1.3.13.1	证明函数在某区间上是常数	(123)
(88)	题型 1.3.13.2	证明(判别)函数的单调性	(123)
(78)	题型 1.3.13.3	利用极限式讨论函数是否取得极值	(125)
(79)	题型 1.3.13.4	利用方程讨论函数是否取极值,其曲线是否有拐点	(126)
(88)	题型 1.3.13.5	利用导数不等式讨论函数是否取极值,其曲线是否有拐点	(127)
(06)	题型 1.3.13.6	利用极值点或拐点讨论函数性质	(128)
(00)	题型 1.3.13.7	求曲线的凹凸区间与拐点	(128)
(16)	题型 1.3.13.8	求函数的单调区间、极值、最值	(131)
(20)	题型 1.3.13.9	求曲线的渐近线	(134)
(8)	1.3.14	函数性质与函数图形	(136)
(8)	题型 1.3.14.1	利用函数性质作函数图形	(136)
(10)	题型 1.3.14.2	已知函数图形,确定函数或其导函数性质(或图形)	(137)
(10)	题型 1.3.14.3	已知导函数图形,确定原来函数的性质	(137)
(1)	1.3.15	利用函数性质讨论方程的根	(138)
(0)	题型 1.3.15.1	讨论不含参数的方程实根的存在性及其个数	(138)
(0)	题型 1.3.15.2	讨论含参数的方程实根的存在性及其个数	(139)
(30)	题型 1.3.15.3	已知方程根的个数,求其参数的取值范围	(140)
(0)	1.3.16	一元函数微分学的几何应用	(141)
(0)	题型 1.3.16.1	求平面曲线的切线方程和法线方程	(141)
(00)	题型 1.3.16.2	求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题	(144)
(80)	题型 1.3.16.3	求解与两曲线相切的有关问题	(144)
(80)	题型 1.3.16.4	求解与平面曲线的曲率有关的问题	(145)
(1)	1.4	一元函数积分学	(147)
(6)	1.4.1	原函数与不定积分的关系	(147)
(00)	题型 1.4.1.1	原函数的概念及其判定	(147)
(00)	题型 1.4.1.2	求分段函数的原函数或不定积分	(148)
(0)	题型 1.4.1.3	利用积分与微分运算的互逆关系求解与原函数有关的问题	(148)
(6)	1.4.2	各类被积函数不定积分的算法	(149)
(01)	题型 1.4.2.1	计算被积函数仅为一类函数或为两类不同函数乘积的不定积分	(149)
(10)	题型 1.4.2.2	计算简单无理函数的不定积分	(150)
(80)	题型 1.4.2.3	求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f\left[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right] dx$, 其中 $k(k \neq 1)$ 为正实数	(154)
(10)	题型 1.4.2.4	求 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$	(154)
(80)	题型 1.4.2.5	求被积函数的分母为或可化为相差常数的两函数乘积的不定积分	(156)
(80)	题型 1.4.2.6	求三角函数的不定积分	(157)
(80)	题型 1.4.2.7	求被积函数含反三角函数的积分	(159)
(05)	题型 1.4.2.8	有理分式函数的积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ (其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式) 的算法	(160)
(1)	1.4.3	利用定积分性质计算定积分	(161)
(80)	题型 1.4.3.1	利用其几何意义计算定积分	(161)
(80)	题型 1.4.3.2	计算对称区间上的定积分	(162)

题型 1.4.3.3	计算周期函数的定积分	(164)
题型 1.4.3.4	利用定积分的常用计算公式求定积分	(165)
题型 1.4.3.5	计算被积函数含函数导数或已知其导数的函数的积分	(167)
题型 1.4.3.6	比较和估计定积分的大小	(168)
题型 1.4.3.7	求解含积分值为常数的函数方程	(169)
题型 1.4.3.8	计算几类需分子区间积分的定积分	(169)
题型 1.4.3.9	计算含参数的定积分	(172)
题型 1.4.3.10	求需换元计算的定积分	(172)
题型 1.4.3.11	求由定积分表示的变量极限	(174)
1.4.4	求解与变限积分有关的问题	(175)
题型 1.4.4.1	计算含变限积分的极限	(175)
题型 1.4.4.2	求变限积分的导数	(178)
题型 1.4.4.3	求变限积分的定积分	(180)
题型 1.4.4.4	讨论变限积分函数的性态	(182)
1.4.5	证明定积分等式	(184)
题型 1.4.5.1	证明定积分的变换公式	(184)
题型 1.4.5.2	证明定积分的中值等式	(185)
1.4.6	证明积分不等式	(186)
题型 1.4.6.1	证明积分限相等时不等式两端成为零的积分不等式	(186)
题型 1.4.6.2	证明函数及其导函数所满足的积分不等式	(187)
题型 1.4.6.3	证明 $\int_a^b f(x) dx$ (或 $\left \int_a^b f(x) dx \right \leq k$ (或 $\geq k$), k 为常数	(189)
题型 1.4.6.4	证明题设中有二阶导数大(或小)于等于零的定积分不等式	(189)
1.4.7	计算反常积分	(190)
题型 1.4.7.1	计算无穷区间上的反常积分	(191)
题型 1.4.7.2	判别 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) 与 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ ($a > 0$) 的敛散性	(194)
题型 1.4.7.3	判别无界函数的反常积分的敛散性,如收敛,计算其值	(194)
题型 1.4.7.4	判别 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 与 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性,如收敛,计算其值	(197)
题型 1.4.7.5	判别混合型反常积分的敛散性,如收敛,计算其值	(197)
题型 1.4.7.6	已知反常积分的敛散性,求其待定常数或其取值范围	(198)
1.4.8	定积分的应用	(199)
题型 1.4.8.1	已知曲线方程,求其所围平面图形的面积	(199)
题型 1.4.8.2	已知曲线所围平面图形的面积(或其旋转体体积),反求该曲线	(202)
题型 1.4.8.3	计算旋转体体积	(202)
题型 1.4.8.4	计算旋转体的侧(表)面积	(205)
题型 1.4.8.5	计算平行截面面积已知的立体体积	(206)
题型 1.4.8.6	计算平面曲线的弧长	(207)
题型 1.4.8.7	求解几何应用与最值问题相结合的应用题	(208)
题型 1.4.8.8	用定积分计算质心及形心	(211)
题型 1.4.8.9	计算物体沿直线所做的功	(212)

(401)	题型 1.4.8.10 计算压力与引力	(213)
(401)	题型 1.4.8.11 求函数在区间上的平均值	(215)
1.5	多元函数微分学	(217)
(81)	1.5.1 二(多)元函数微分学中的几个概念	(217)
(00)	题型 1.5.1.1 依定义判别二元函数在某点是否连续、可偏导及可微	(218)
(00)	题型 1.5.1.2 讨论二元函数连续、可偏导及可微之间的关系	(220)
(57)	1.5.2 计算偏导数和全微分	(221)
(57)	题型 1.5.2.1 利用隐函数存在定理确定隐函数	(221)
(17)	题型 1.5.2.2 计算显函数的偏导数	(222)
(77)	题型 1.5.2.3 求抽象复合函数的偏导数	(223)
(07)	题型 1.5.2.4 计算隐函数的偏导数	(227)
(87)	题型 1.5.2.5 作变量代换将偏导数满足的方程变形	(230)
(07)	题型 1.5.2.6 求二元函数的全微分	(231)
(57)	1.5.3 多元函数微分学的应用	(232)
(42)	题型 1.5.3.1 求二元函数的极值	(232)
(42)	题型 1.5.3.2 求二(多)元函数的条件极值	(235)
(57)	题型 1.5.3.3 求二(多)元函数的最值	(237)
1.6	二重积分	(240)
(01)	1.6.1 利用二重积分性质求解与二重积分有关的问题	(240)
(57)	1.6.2 交换积分次序及转换二(累)次积分	(242)
(08)	题型 1.6.2.1 交换二(累)次积分的积分次序	(242)
(08)	题型 1.6.2.2 转换二(累)次积分	(243)
(08)	1.6.3 用直角坐标系计算二重积分	(245)
(08)	题型 1.6.3.1 计算需根据积分区域选择积分次序的二重积分	(245)
(18)	题型 1.6.3.2 计算需根据被积函数选择积分次序的二重积分	(245)
(01)	题型 1.6.3.3 计算积分区域具有对称性、被积函数具有奇偶性的二重积分	(248)
(01)	题型 1.6.3.4 计算积分区域关于直线 $y = x$ 对称的二重积分	(250)
(01)	题型 1.6.3.5 分块计算二重积分	(252)
(01)	题型 1.6.3.6 计算无界区域上较简单的二重积分	(255)
(57)	1.6.4 用极坐标系计算二重积分	(256)
(89)	题型 1.6.4.1 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq a (a > 0)$ 上的二重积分	(256)
(01)	题型 1.6.4.2 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax (a > 0)$ 上的二重积分	(257)
(00)	题型 1.6.4.3 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq -2ax (a > 0)$ 上的二重积分	(257)
(50)	题型 1.6.4.4 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2by (b > 0)$ 上的二重积分	(258)
(50)	题型 1.6.4.5 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq -2by (b > 0)$ 上的二重积分	(259)
(00)	题型 1.6.4.6 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax + 2by + c (a, b > 0)$ 上的二重积分	(259)
(00)	题型 1.6.4.7 计算两圆域公共部分上的二重积分	(261)
(57)	1.6.5 求含二重积分的极限	(261)
1.7	常微分方程	(264)
(11)	1.7.1 求解一阶线性微分方程	(264)
(15)	题型 1.7.1.1 求解可分离变量的微分方程	(264)

题型 1.7.1.2	求解齐次微分方程	(265)
题型 1.7.1.3	求解一阶线性微分方程	(266)
题型 1.7.1.4	求解几类可化为一阶线性方程的方程	(268)
题型 1.7.1.5	求解由自变量与因变量的两增量关系给出的一阶方程	(270)
题型 1.7.1.6	求满足某种性质的一阶线性方程的特解	(270)
1.7.2	求解线性微分方程	(272)
题型 1.7.2.1	利用线性微分方程解的结构和性质求解有关问题	(273)
题型 1.7.2.2	求解几类可降阶的高阶微分方程	(273)
题型 1.7.2.3	求解常系数齐次线性方程	(275)
题型 1.7.2.4	求解二阶常系数非齐次线性方程	(277)
题型 1.7.2.5	变换已知的微分方程为新的形式,并求其解	(282)
题型 1.7.2.6	求解含变限积分的方程	(283)
题型 1.7.2.7	求解可化为一阶线性微分方程的函数方程	(284)
1.7.3	已知特解反求其常系数线性方程	(284)
题型 1.7.3.1	已知其特解,反求该齐次方程	(284)
题型 1.7.3.2	已知其特解,反求该非齐次方程	(286)
1.7.4	求解微分方程在几何与物理学上的简单应用题	(287)
题型 1.7.4.1	已知某曲线所围图形的几何量所满足的关系,反求该曲线	(287)
题型 1.7.4.2	求解与物理量有关的简单应用问题	(289)

第2篇 线性代数

2.1	计算行列式	(295)
2.1.1	计算几类数字型行列式	(295)
题型 2.1.1.1	计算非零元素(主要)在一条或两条对角线上的行列式	(295)
题型 2.1.1.2	计算非零元素在三条线上的行列式	(298)
题型 2.1.1.3	计算行(列)和相等的行列式	(299)
题型 2.1.1.4	计算范德蒙行列式	(300)
题型 2.1.1.5	求代数余子式之和的值	(302)
题型 2.1.1.6	求行列式中含某因子的所有项	(304)
题型 2.1.1.7	计算三阶行列式	(304)
2.1.2	计算抽象矩阵的行列式	(305)
题型 2.1.2.1	求由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值	(305)
题型 2.1.2.2	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(306)
题型 2.1.2.3	求满足矩阵方程的某矩阵行列式之值	(306)
题型 2.1.2.4	已知某矩阵行列式的值,求相关联矩阵的行列式的值	(307)
题型 2.1.2.5	计算含零子块的四分块矩阵的行列式	(308)
题型 2.1.2.6	证明方阵的行列式等于零或不等于零	(309)
题型 2.1.2.7	利用特征值计算矩阵行列式	(310)
2.1.3	克拉默法则的应用	(310)
2.2	矩 阵	(313)
2.2.1	证明矩阵的可逆性	(313)
题型 2.2.1.1	已知一矩阵等式,证明有关矩阵可逆,并求其逆矩阵	(313)

题型 2.2.1.2	证明矩阵 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$	(315)
题型 2.2.1.3	证明和(差)矩阵可逆	(316)
题型 2.2.1.4	证明含逆矩阵的矩阵可逆, 并求其逆矩阵	(317)
题型 2.2.1.5	证明方阵为不可逆矩阵	(318)
2.2.2	矩阵元素给定, 求其逆矩阵的方法	(318)
2.2.3	求解与伴随矩阵有关的问题	(321)
题型 2.2.3.1	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式(参阅题型 2.1.2.2)	(321)
题型 2.2.3.2	求与伴随矩阵有关的矩阵的逆矩阵	(322)
题型 2.2.3.3	求与伴随矩阵有关的矩阵的秩	(323)
题型 2.2.3.4	求伴随矩阵	(323)
2.2.4	计算 n 阶矩阵的高次幂	(325)
题型 2.2.4.1	计算能分解为一列向量与一行向量相乘的矩阵的高次幂	(325)
题型 2.2.4.2	计算能相似对角化的矩阵的高次幂	(327)
题型 2.2.4.3	计算能分解为两个可交换矩阵之和的矩阵的高次幂	(328)
题型 2.2.4.4	计算其平方等于原矩阵或单位矩阵倍数的矩阵高次幂	(328)
2.2.5	求矩阵的秩	(329)
题型 2.2.5.1	求元素具体给定的矩阵的秩	(329)
题型 2.2.5.2	求抽象矩阵的秩	(329)
题型 2.2.5.3	已知矩阵的秩, 求其待定常数	(333)
2.2.6	分块矩阵乘法运算的应用举例	(333)
2.2.7	求解矩阵方程	(335)
题型 2.2.7.1	求解含单位矩阵加项的矩阵方程	(335)
题型 2.2.7.2	求解只含一个未知矩阵的矩阵方程	(337)
题型 2.2.7.3	求解含多个未知矩阵的矩阵方程	(338)
2.2.8	初等变换与初等矩阵关系的应用	(340)
题型 2.2.8.1	用初等矩阵表示相应的初等变换	(340)
题型 2.2.8.2	利用初等矩阵逆矩阵的性质计算矩阵	(341)
2.2.9	判别两同型矩阵等价的有关问题	(343)
2.3	向 量	(345)
2.3.1	判别向量组线性相关、线性无关	(345)
题型 2.3.1.1	用线性相关性定义做选择题和填空题	(345)
题型 2.3.1.2	判别分量已知的向量组的线性相关性	(346)
题型 2.3.1.3	证明几类向量组的线性相关性	(347)
题型 2.3.1.4	已知向量组的线性相关性, 求其待定常数	(352)
2.3.2	判定一向量能否由向量组线性表示	(354)
题型 2.3.2.1	判定分量已知的向量能否由向量组线性表示	(354)
题型 2.3.2.2	判定一抽象向量能否由向量组线性表示	(355)
题型 2.3.2.3	判定一向量组能否由另一向量组线性表示	(356)
2.3.3	两向量组等价的判别方法及常用证法	(357)
2.3.4	向量组的秩与极大无关组	(361)
题型 2.3.4.1	求分量给出的向量组的秩及其极大无关组	(361)

题型 2.3.4.2	将向量用极大无关组线性表示	(362)
题型 2.3.4.3	证明与抽象向量组的秩有关的问题	(363)
题型 2.3.4.4	证一向量组为一极大无关组	(365)
2.3.5	已知一向量(组)线性表示情况,求其所含待定常数	(365)
2.3.6	将线性无关向量组正交规范化	(366)
2.4	线性方程组	(368)
2.4.1	判定线性方程组解的情况	(368)
题型 2.4.1.1	判定齐次线性方程组解的情况	(368)
题型 2.4.1.2	判定非齐次线性方程组解的情况	(370)
2.4.2	由其解反求方程组或其参数	(373)
题型 2.4.2.1	已知 $AX = 0$ 的解的情况,反求 A 中参数	(373)
题型 2.4.2.2	已知 $AX = b$ 的解的情况,反求方程组中的参数	(373)
题型 2.4.2.3	已知其基础解系,求该方程组的系数矩阵	(374)
2.4.3	一组向量为基础解系的判别或证明	(376)
2.4.4	基础解系和特解的简便求法	(378)
2.4.5	求解含参数的线性方程组	(380)
题型 2.4.5.1	求解方程个数与未知数个数相等的线性方程组	(380)
题型 2.4.5.2	求解方程个数与未知数个数不等的线性方程组	(384)
题型 2.4.5.3	求解参数仅出现在常数项的线性方程组	(385)
题型 2.4.5.4	求含参数的方程组满足一定条件的通解	(386)
题型 2.4.5.5	求解有无穷多解的矩阵方程	(387)
2.4.6	求抽象线性方程组的通解	(388)
题型 2.4.6.1	A 没有具体给出,求 $AX = 0$ 的通解	(388)
题型 2.4.6.2	已知 $AX = b$ 的特解,求其通解	(390)
题型 2.4.6.3	利用线性方程组的向量形式求(证明)其解	(391)
2.4.7	求两线性方程组的非零公共解	(392)
题型 2.4.7.1	求两齐次线性方程组的非零公共解	(392)
题型 2.4.7.2	证明两齐次线性方程组有非零公共解	(394)
题型 2.4.7.3	讨论两方程组同解的有关问题	(395)
2.5	矩阵的特征值、特征向量	(397)
2.5.1	求矩阵的特征值、特征向量	(397)
题型 2.5.1.1	求元素给出的矩阵的特征值、特征向量	(397)
题型 2.5.1.2	求(证明)抽象矩阵的特征值、特征向量	(399)
2.5.2	由特征值和(或)特征向量反求其矩阵	(402)
题型 2.5.2.1	由特征值和(或)特征向量反求矩阵的待定常数	(402)
题型 2.5.2.2	已知特征值、特征向量,反求其矩阵	(404)
题型 2.5.2.3	计算 $A^m \beta$, 其中 β 为列向量, A 为方阵	(406)
2.5.3	求相关联矩阵的特征值、特征向量	(406)
2.5.4	判别同阶方阵是否相似	(408)
题型 2.5.4.1	判别方阵是否可对角化	(408)
题型 2.5.4.2	判别两同阶方阵是否相似	(411)

2.5.5	相似矩阵性质的简单应用	(412)
2.5.6	与两矩阵相似有关的计算	(414)
2.5.6.1	矩阵 A 可相似对角化, 求 A 中待定常数及可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值	(414)
2.5.6.2	A 为实对称矩阵, 求 A 中待定常数及正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值	(415)
2.5.6.3	A 为实对称矩阵, 求与其相似的对角矩阵 Λ	(416)
2.5.6.4	已知矩阵 A 和可逆矩阵 P 满足一等式, 求矩阵 B , 使 $P^{-1}AP = B$	(417)
2.6	二次型	(419)
2.6.1	求二次型的矩阵及其秩	(419)
2.6.1.1	用矩阵形式表示二次型	(419)
2.6.1.2	求二次型的秩	(420)
2.6.2	化标准形及由标准形确定二次型	(421)
2.6.2.1	化二次型为标准形	(421)
2.6.2.2	将实对称矩阵合同对角化	(426)
2.6.2.3	已知二次型的标准形, 确定该二次型	(428)
2.6.3	判别(证明) 实二次型(实对称矩阵) 的正定性	(429)
2.6.3.1	判别具体给定的二次型或其矩阵的正定性	(429)
2.6.3.2	判别或证明抽象二次型(实对称矩阵) 的正定性	(429)
2.6.3.3	确定待定常数或其取值范围使二次型或其矩阵正定	(432)
2.6.4	判别两矩阵是否合同	(432)
2.6.4.1	判别(证明) 两实对称矩阵合同	(432)
2.6.4.2	判别(证明) 两矩阵不合同	(434)
2.6.5	讨论矩阵等价、相似及合同的关系	(434)

第1篇 高等数学

高等数学无论是试题量还是分值在考研真题中都占相当大的比重,分别约为78%和75%,是复习的重中之重。现将2012—2014年的考查题型及知识点进行了整理,希望能对广大考生的备考有所帮助。

2012—2014 年考研数学二高等数学题型及知识点分布表

题型/知识点 分布		2012 年试题		2013 年试题		2014 年试题	
		试题量	分值	试题量	分值	试题量	分值
题 量 分 值	选择题	4 道	16 分	4 道	16 分	6 道	24 分
	填空题	4 道	16 分	4 道	16 分	5 道	20 分
	解答题	5 道	50 分	5 道	50 分	7 道	50 分
考 查 知 识 点	选择题	① 渐近线的条数 ② 函数在一点处的导数 ③ 单调有界数列的收敛 ④ 比较定积分的大小 ⑤ 二元函数的单调性 ⑥ 二重积分的计算		① 无穷小量 ② 隐函数求导 ③ 间断点、连续性、可导性 ④ 反常积分 ⑤ 多元函数的偏导数 ⑥ 二重积分的大小		① 高阶无穷小 ② 渐近线的计算 ③ 函数图形的凹凸性 ④ 曲率半径 ⑤ 等价无穷小、洛必达法则 ⑥ 多元函数的最值	
	填空题	① 隐函数的二阶导数 ② 无穷和式的极限 ③ 偏导数 ④ 解微分方程 ⑤ 曲率		① 重要极限公式 ② 反函数求导 ③ 平面图形的面积 ④ 参数方程 ⑤ 二阶常系数非齐次线性微分方程		① 反常积分的计算 ② 函数的周期性 ③ 多元函数的全微分 ④ 坐标系的变换、导数的几何意义 ⑤ 质心	
	解答题	① 求函数的极限 ② 二元函数的极值 ③ 旋转体的体积 ④ 用极坐标系计算二重积分 ⑤ 微分方程、拐点 ⑥ 不等式的证明 ⑦ 根的个数、数列极限		① 等价无穷小 ② 旋转体的体积 ③ 二重积分的计算 ④ 微分中值定理 ⑤ 点到点的距离 ⑥ 最值、数列极限 ⑦ 弧长、形心坐标		① 等价无穷小代换求极限 ② 函数的极值 ③ 二重积分的计算(轮换对称性) ④ 二阶偏导数、二阶常系数非齐次线性微分方程 ⑤ 函数单调性的判别 ⑥ 平面图形的面积 ⑦ 旋转体的体积	

1.1 函 数

1.1.1 求两类函数的表达式

题型 1.1.1.1 已知一函数求其反函数的表达式

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x , 再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$, 同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数, 且在各分段区间上都是单调函数, 则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数, 且 $f(x)$ 的每段的值域就是其对应分段区间上反函数的定义域.

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1\leq x\leq 2, \\ 12x-16, & x>2, \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

解 (1) 当 $x<-1$ 时, $y=1-2x^2<-1$, 从 $y=1-2x^2$ 中解出 x 得到 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=-\sqrt{(1-x)/2}, x<-1$.

(2) 当 $-1\leq x\leq 2$ 时, $-1\leq y=x^3\leq 8$. 从 $y=x^3$ 中解出 x , 得到 $x=\sqrt[3]{y}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=\sqrt[3]{x}, -1\leq x\leq 8$.

(3) 当 $x>2$ 时, $y=12x-16>8$, 从 $y=12x-16$ 中解出 x 得到 $x=(y+16)/12$, 交换 x 与 y 的位置得反函数 $y=(x+16)/12, x>8$.

综上得到 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式为

$$g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{(1-x)/2}, & x<-1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1\leq x\leq 8, \\ (x+16)/12, & x>8. \end{cases}$$

题型 1.1.1.2 求与复合函数有关的函数表达式

定义 1.1.1.1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 且当 x 在某一区间 I 取值时, 相应的 u 值要使 y 有定义, 则称 y 是 x 的定义于 I 的复合函数, 记为

$$y=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)],$$

u 称为中间变量, $\varphi(x)$ 称为内层函数, $f(x)$ 称为外层函数,

$$I=D_{f\circ\varphi}=\{x|\varphi(x)\in D_f, x\in D_\varphi\}\neq\emptyset.$$

由上述定义可知, 复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义区间 $D_{f\circ\varphi}$ 或者与 $\varphi(x)$ 的定义区间一致, 或者只是 $\varphi(x)$ 的定义区间的一部分.

在 $f(x)$, $\varphi(x)$ 和 $f[\varphi(x)]$ 这三个函数中, 若已知其中两个, 可求得另一函数.

类型(一) 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$.

若 $f(x)$ 为分段函数, $\varphi(x)$ 为分段函数或为初等函数, 求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 时, 常用分段代入法或代入法求之. 先将内(外)层函数的表示式代入, 然后再将外(内)层函数的表