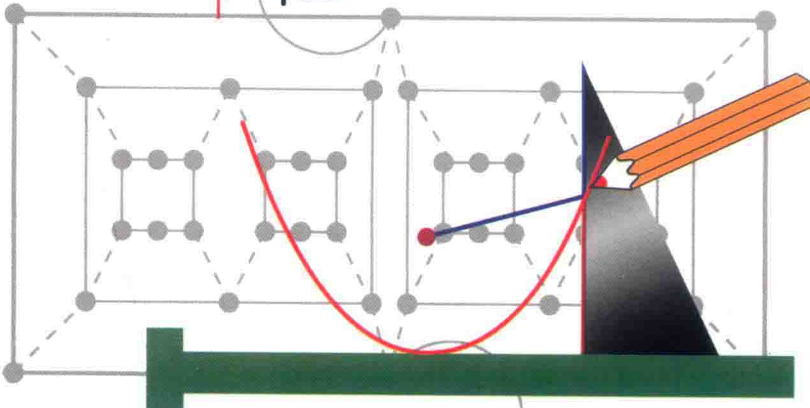
新编中学数学解题方法1000招丛书

高中版 06

三角函数

刘培杰数学工作室 编



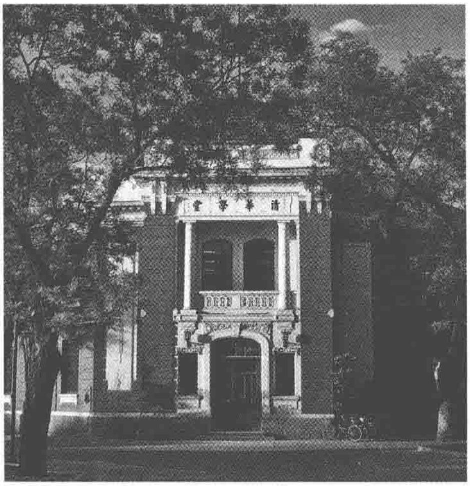
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 06

新编中学数学解题方法1000招丛书

三角函数

刘培杰数学工作室 编



一切西学皆从算学出，西人十岁外无不习算。今欲采西学，自不可不学算。或师西人，或师内地人之知算者俱可。由是而历算之术，而格致之理，而制器尚象之法，兼综条贯，轮船火器之外，正非一端。

学议》

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书以专题的形式对高中数学中三角函数的重点、难点进行了归纳、总结，全书共分两大部分，即解题方法编和试题精粹编，内容丰富，涵盖面广，可使学生深入理解三角函数的概念，灵活使用解题方法。

本书适合高中师生和广大数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书.三角函数/刘培杰数学工作室编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5603-4474-4

Ⅰ.①新… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291513号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 282千字
版 次 2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4474-4
定 价 38.00元

⊙ 总序

俗话说:“自古华山一条路”,如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作“入宝山而空返”.

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓“踏遍坎坷成大路”.

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:“解题同钓鱼术一样永远不会学会”.但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:“相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸.”

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Halmos, Paul Richard)一句“问题是数学的心脏”的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:“如果说确有一股贯穿20世纪80年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流”.

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现.光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就出版了20多种.我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并"希望各大书局大量编印中学解题参考用书".近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》(13册)，北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书.

哈尔滨工业大学出版社作为一"边陲小社"，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖.

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以"贪大求全"为原则，试图穷尽一切方法，妄称"解题精技，悉数其间".然而这实在是不可能的，也是不必要的.正所谓"有法法有尽，无法法无穷".况且即使是已有的方法也不能生搬硬套.我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能"执一而论"，死记硬背为"呆法"，"题目一变即无所用之矣"，须"兼综各法"以解之，方可有效.数学家惠特霍斯(Whitworth)说过"一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法".

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题.正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握.

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Pringsheim，Alfred)的名言.

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度.

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事.

刘培杰

2013年12月15日

于哈工大

前言

数学知识的产生有两大来源：一个是人类生产实践活动的需要催生出来；另一个来源是由数学理论体系本身的发展要求，如无理数概念的产生、虚数概念的产生．而三角学的产生明显是属于第一类，它最早是由于航海的需要，所以与人们所想象的相反．球面三角学反倒是先发展起来的，平面三角学是随后才逐渐完善的．

在中国三角学由于是和天文学连在一起的，所以三角知识一直被皇家所垄断，后来才逐渐散落民间，我们简单回顾一下它的历史：

三角学(trigonometry)以研究平面三角形和球面三角形的边和角的关系为基础，达到测量上的应用为目的的一门学科．同时还研究三角函数的性质及其应用．三角学的拉丁文拼法为 trigonometria，是三角形 triangulum 和测量 metricus 两字的合并，由德国人皮蒂斯楚斯于 1595 年创用，原意指三角形的测量，即解三角形．早期的三角学是天文学的一部分，后来研究范围逐渐扩大，变成以三角函数为主要对象的学科，一度隶属于分析学．现在一般将它归为几何学的一个分支．

早在公元前 300 年，古代埃及人已有了一定的三角学知识，主要用于测量.例如建筑金字塔、整理尼罗河泛滥后的耕地、通商航海和观测天象等.公元前 600 年左右古希腊学者泰勒斯游埃及，利用相似三角形的原理测出金字塔的高，成为西方三角测量的肇始.据中国古算书《周髀算经》记载，约与泰勒斯同时代的陈子已利用勾股定理测量太阳的高度，其方法后来称为“重差术”.公元前 2 世纪古希腊天文学家希帕霍斯为了天文观测的需要，作了一个和现在三角函数表相仿的“弦表”，即在固定的圆内，不同圆心角所对弦长的表，他成为西方三角学的最早奠基者.公元 2 世纪，希腊天文学家、数学家托勒密继承希帕霍斯的成就，加以整理发挥，著成《天文学大成》13 卷，包括从 0° 到 90° 每隔半度的弦表及若干等价于三角函数性质的关系式，被认为是西方第一本系统论述三角学理论的著作.约同时代的门纳劳斯写了一本专门论述球面三角学的著作《球面学》，内容包括球面三角形的基本概念和许多平面三角形定理在球面上的推广，以及球面三角形许多独特性质.他的工作使希腊三角学达到全盛时期.公元 6 世纪初，印度数学家阿耶波多制作了一个第一象限内间隔 $3^\circ45'$ 的正弦表，依照巴比伦人和希腊人的习惯，将圆周分为 360°，每度为 $60'$，其中用同一单位度量半径和圆周，孕育着最早的弧度制概念.他在计算正弦值的时候，取圆心角所对弧的半弦长，比起希腊人取全弦长更近于现代正弦概念.印度人还用到正矢和余弦，并给出一些三角函数的近似分数式.9 世纪末到 10 世纪初，阿拉伯天文学家、数学家巴塔尼引入了正切和余切概念，约 920 年造出从 0° 和 90° 相隔 1° 的余切表，还发现了球面三角余弦定理 $\cos A=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos A$. 10 世纪末艾布瓦法编制了每隔 $10'$ 的正弦表和正切表，发明了一种计算方法，可求出 $\sin 30'$ 精确到 9 位小数的近似值，首次引入正割和余割概念，证明了斜三角形的正弦定理，还运用正切定理解球面直角三角形.13 世纪纳西尔丁在《论完全四边形》中第一次把三角学作为独立的学科进行论述，首次清楚地论证了正弦定理.他还指出，由球面三角形的三个角，可以求得它的三个边，或由三边去求三个角.这是区别球面三角与平面三角的重要标志.至此三角学开始脱离天文学，走上独立发展的道路.

14 世纪英国学者布雷德沃丁将正切和余切引入三角计算，成为欧洲早期的三角学研究者.1464 年欧洲第一本系统的三角学著作《论各种三角形》由德国数学家雷格蒙塔努斯完成，该书对平面三角学和球面三角学都做了全面阐述，成为在欧洲传播三角学的依据.他还制造了精密的正弦表，并应用三角学解

决了一些几何问题.16世纪奥地利数学家、天文学家雷蒂库斯首次编制出六个三角函数表,包括第一张详尽的正切表和第一张印刷的正割表,重新给出三角函数的定义,用直角三角形的边长之比定义三角函数,脱离了过去必须依赖圆弧的作法.他于1562年着手编制更为精密的正弦、正切、正割表,但直到1596年才由他的学生、荷兰数学家奥托完成刊行.这一数学用表包含了每隔$10''$的6种三角量的值,并用10位小数表示出来.德国数学家皮蒂斯楚斯不仅首次引入三角学一词,还从1596年起开始校正、完善雷蒂库斯的三角函数表,经过长期努力,于1613年最后完成,他的表达到了很高的精确度,有些正弦函数值计算到22位小数.1614年英国数学家纳皮尔发明了对数,大大简化了三角计算.1615年发表了法国数学家韦达在20年前得到的$\sin n\theta$展开成$\sin\theta$的公式.1707年法国一英国数学家棣莫弗得到三角学的著名定理$(\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta$,并证明了$n$是正有理数时该公式成立.1748年欧拉证明了$n$等于实数时公式也成立.他还给出另一公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta$,这些工作都丰富了三角学的内容.

近代三角学始于欧拉的《无穷分析引论》(1748),他第一次以函数线与半径的比值作为三角函数的定义,并令圆的半径为1,使三角研究大为简化.欧拉创用a,b,c表示三角形三边,A,B,C表示对应的三个角,大大简化了三角公式,这标志着三角学从研究三角形解法进一步转变为研究三角函数及其应用的一个数学分支.我国古代没有出现角的函数概念,只用勾股定理解决了一些三角学范围内的实际问题.1631年西方三角学首次输入,以德国传教士邓玉函、汤若望和我国学者徐光启合编的《大测》为代表.同年徐光启等人还编写了《测量全义》,其中有平面三角和球面三角的论述.1653年薛凤祚与波兰传教士穆尼阁合编《三角算法》,以"三角"取代"大测",确立了"三角"名称.1877年华蘅芳与英国传教士傅兰雅合译《三角数理》,引入近代三角学内容.在此之前戴煦等人对三角级数展开式等问题有过独立的探讨.现代的三角学主要研究角的特殊函数及其在科学技术中的应用,如几何计算等,多发展于20世纪中.

特别值得指出的是阿拉伯人对三角学贡献是颇为独特的.

由于数理天文学的需要,阿拉伯人继承并推进了希腊的三角术,其学术主要来源于印度的《苏利耶历数全书》等天文历表,以及希腊托勒玫的《大成》、梅内劳斯的《球面学》等古典著作.

由于天文计算的需要,阿拉伯天文学家都致力于高精度三角函数表的编

制.9 世纪的海拜什·哈西卜(Habash al-Hasīb,约卒于 864—874)在印度人的基础上制定间隔为 15′的 60 进制正弦表,并且还编制了间隔为 1°的正切表.艾布·瓦法(Abū'l-Wafā,940—977)在哈西卜的基础上又进一步编制出间隔为 10′的正弦表和余弦表,特别是比鲁尼(Al-Bīrūnī,973—1050)利用二次插值法制定了正弦、正切函数表.

对希腊三角学加以系统化的工作是由 9 世纪天文学家阿尔·巴塔尼(Al-Battānī,858—929)作出的,而且他也是中世纪对欧洲影响最大的天文学家.其《天文论著》(又名《星的科学》)被普拉托译成拉丁文后,在欧洲广为流传,哥白尼、第谷、开普勒、伽利略等人都利用和参考了他的成果.在该书中阿尔·巴塔尼创立了系统的三角学术语,如正弦、余弦、正切、余切.他称正弦为 jī ba,来源于阿耶波多的印度语术语 jī va,拉丁语译作 sinus,后来演变为英语 sine;称正切为 umbra versa,意即反阴影;余切为 umbra recta,意即直阴影.后来演变成拉丁语分别为 tangent 和 cotangent,首见于丹麦数学家芬克(T. Fink,1561—1656)的《圆的几何》(1583)一书中,而正割、余割是阿拉伯另一天文学家艾布·瓦法最先引入的.

阿尔·巴塔尼还发现了一些等价于下列公式的三角函数的关系式

$$\frac{\cos\alpha}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\frac{\tan\alpha}{r}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\frac{\sin\alpha}{r}=\frac{r}{\csc\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{r}=\frac{r}{\sec\alpha},r\sec\alpha=\sqrt{r^2+r^2\tan^2\alpha}$$

以及球面三角形的余弦定理:$\cos A=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos A$.

艾布·瓦法和比鲁尼等人进一步丰富了三角学公式.艾布·瓦法曾在巴格达天文台工作,其重要的天文学著作《天文学大全》继承并发展了托勒玫的《大成》,尽管它在天文学方面没有什么超越托勒玫的创造,但其三角学方面的成就足以彪炳史册.书中除一些精细的三角函数表外,还证明了与两角和、差、倍角和半角的正弦公式等价的关于弦的一些定理,证明了平面和球面三角形的正弦定理.比鲁尼曾经得到马蒙(Mámun)哈里发的支持,在乌尔根奇建造天文台并从事天文观测,是一位有 146 多部著作的多产学者,其《马苏德规律》一书,在三角学方面有一些创造性的工作.他给出一种测量地球半径的方法,他的做法首先用边长带有刻度的正方形 $ABCD$(如图(1))测出一座山高,$GT=\frac{CT\cdot CE}{CD}$(其中 $CT=\frac{AD\cdot CD}{FA}$),再于山顶 T 处悬一直径 SP 可以转动的圆环

$MPNS$(图(2)). 从山顶 T 观测地平线上一点 I，测得俯角 $\angle OTI=\alpha$. 由于 $HT=\dfrac{GT}{\sin(90^\circ-\alpha)}$，$HG=\dfrac{GT}{\tan(90^\circ-\alpha)}$，$HG=HI$，得到 $IT=HT+HG$，从而算出地球半径 $IO=\dfrac{IT}{\tan(90^\circ-\alpha)}$. 比鲁尼算得 1° 子午线长为 106.4 ～ 124.2 km.

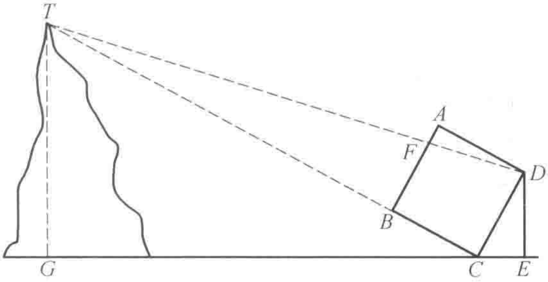


图 1

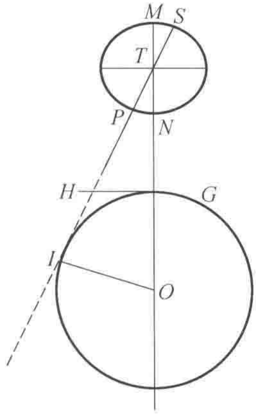


图 2

比鲁尼还证明了正弦公式、和差化积公式、倍角公式和半角公式. 后来阿尔·卡西利用这些公式计算了 $\sin 1^\circ$ 的值. 阿尔·卡西首先求出 $\sin 72^\circ$ 和 $\sin 60^\circ$ 的值，以求 $\sin 12^\circ=\sin(72^\circ-60^\circ)$ 的值，再用半角公式求 $\sin 3^\circ$ 的值，由三倍角公式得出 $\sin 3^\circ=3\sin 1^\circ-4\sin^3 1^\circ$，即 $\sin 1^\circ$ 是三次方程 $\sin 3^\circ=3x-4x^3$ 的解. 阿尔·卡西用相当于牛顿迭代法的算法：$x_n=\dfrac{\sin 3^\circ+4x_{n-1}^3}{3}$ $(x_1=\sin 3^\circ)$ 求出 $\sin 1^\circ$ 的近似值.

如果说希腊以来，三角术仅是天文学的附属的话，那么这种情况在纳西尔·丁那里发生了一些改变. 1201 年纳西尔·丁出生于伊朗的图斯，生活于十字军和蒙古人的侵占时代，是一位知识渊博的学者. 由于蒙古伊儿汗帝国的君主旭烈兀十分重视科学文化，纳西尔·丁受到他的礼遇，他建议在马拉盖建造大型天文台，得到旭烈兀的允许和支持，其后他一直在这里从事天文观测与研究. 他的天文学著作《伊儿汗天文表》(1271) 是历法史上的重要著作，其中测算出岁差 51″/ 每年. 其《天文宝库》则对托勒玫的宇宙体系加以评注，并提出新的宇宙模型. 他的《论完全四边形》是一部脱离天文学的系统的三角学专著. 所谓完全四边形，即指平面上的两两相交的四条直线或球面上的四条大圆弧所构成

的图形.该书系统阐述了平面三角学，明确给出正弦定理.讨论球面完全四边形，对球面三角形进行分类，指出球面直角三角形的6种边角关系(C为直角)

$$\cos C=\cos A\cos B;\quad \cos C=\cot A\cot B$$

$$\cos A=\cos A\sin B;\quad \cos A=\tan B\cot C$$

$$\sin B=\sin C\sin B;\quad \sin B=\tan A\cot B$$

并讨论了解平面和球面斜三角形的一些方法，引入极三角形的概念以解斜三角形.他指出在球面三角形中，由三边可以求三角，反之，由三角可以求三边，这是球面三角与平面三角相区别的一个重要标志.纳西尔·丁的《论完全四边形》对15世纪欧洲三角学的发展起着非常重要的作用.

与希腊人三角术的几何性质相比，阿拉伯人的三角术与印度人一样是算术性的.例如由正弦值求余弦值时，他们利用恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 作代数运算而求解，而不是利用几何关系来推算，这是一种进步.他们和印度人一样，用弧的正弦而不用双倍弧的正弦，正弦(或半弦)的单位取决于半径的单位.

在中国决定放弃中国古代形成的数学体系决定全面向西方学习时，三角学就作为中学数学内容的重要组成部分.它因其记号多、公式多、变化多令中学师生头疼不已.所以很多专家学者编写了大量的参考书来为中学师生答疑解惑.如烟学敏、刘玉翘等主编的《中学数学解题精典三角卷》，李遥观的《三角级数》，张运筹的《三角恒等式及应用》，车新发的《三角解题导引》.本工作室有计划大量出版此类图书，但解题方法最多最全的还属本书.

从前的数学是以方程为主线展开的，及至近代变为了函数.到现代则代之以结构，中学数学还是以古典和近代为主，所以三角函数仍是重点之一.

三角函数(trigonometric function).亦称圆函数.是正弦、余弦、正切、余切、正割、余割等函数的总称.在平面直角坐标系 xOy 中，与 x 轴正向夹角为 α 的的动径上取点 P，P 的坐标是(x,y)，$OP=r$，则正弦函数 $\sin\alpha=y/r$，余弦函数 $\cos\alpha=x/r$，正切函数 $\tan\alpha=y/x$，余切函数 $\mathrm{ctg}\,\alpha=x/y$，正割函数 $\sec\alpha=r/x$，余割函数 $\mathrm{csec}\,\alpha=r/y$ 历史上还用过正矢函数 $\mathrm{vers}\,\alpha=r-x$，余矢函数 $\mathrm{covers}\,\alpha=r-y$ 等.这8种函数在1631年徐光启等人编译的《大测》中已齐备.正弦最早被看作圆内圆心角所对的弦长，公元前2世纪古希腊天文学家希帕雷斯就制造过这种弦表，公元2世纪托勒密又造 $30^\circ\sim90^\circ$ 每隔半度的正弦表.5世纪时印度最早引入正弦概念，还给出正弦函数表，记载于《苏利耶历数书》(约400)中.该书还出现了正矢函数，现在已很少使用它了.约510年印度

数学家阿耶波多考虑了余弦概念，传到欧洲后有多种名称，17世纪后才统一. 正切和余切函数由日影的测量而引起，9世纪的阿拉伯计算家哈巴什首次编制了一个正切、余切表. 10世纪的艾布瓦法又单独编了第一个正切表. 哈巴什还首先提出正割和余割概念，艾布瓦法正式使用. 到1551年奥地利数学家、天文学家雷蒂库斯在《三角学准则》中收入正、余弦，正、余切，正、余割6种函数，并附有正割表. 他还首次用直角三角形的边长之比定义三角函数. 1748年欧拉第一次以函数线与半径的比值定义三角函数，令圆半径为1，半创用许多三角函数符号. 至此现代形式的三角函数开始通行，不断发展至今.

中学课本中的三角函数符号早期同欧美体系，到20世纪五六十年代全面学习苏联又变为苏联体系，近些年又改了回来. 所以有些符号可能不尽相同.

读好本书有助于您考上理想大学，向上流动. 晚清差一点被颠覆，一个原因就是社会向上的通道不畅，洪秀全去考公务员，考了多次没考上，就出事了.

这是我们都不希望看到的！

刘培杰

2013年12月6日

于哈工大

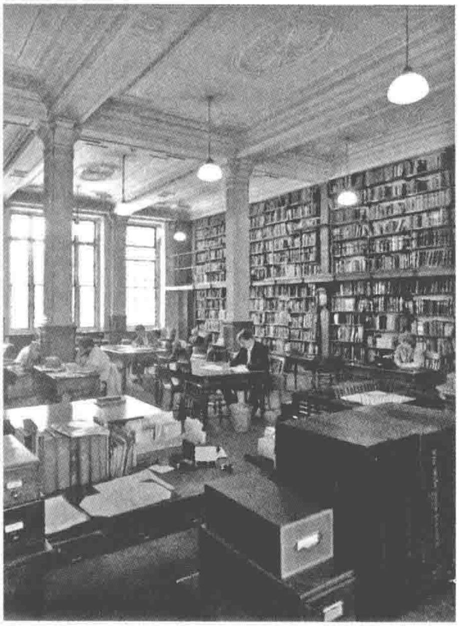
目录

第一编　解题方法编

第二编　试题精粹编

第一编

解题方法编



怎样用三角函数的定义解题

现行高中数学教材关于三角函数是用坐标定义的，至于这种定义方法的地位和作用，在教材中仅仅表现为讨论三角函数的符号，推导有同角的三角函数的八个基本关系式和 $k\cdot 360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，$180^\circ+\alpha$，$-\alpha$ 三组诱导公式.

本节将对三角函数的坐标定义在解题中的作用作一介绍.

为简化运算，不失一般性，设任意角 α 终边上与坐标原点距离为 1 的点的坐标为 (x,y)，于是，由三角函数的定义有

$$\sin\alpha=y,\cos\alpha=x,\tan\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y},\sec\alpha=\frac{1}{x},\csc\alpha=\frac{1}{y}$$

倍角、半角的三角函数用坐标可以表示为

$$\sin 2\alpha=2xy \quad ①$$

$$\cos 2\alpha=x^2-y^2=1-2y^2=2x^2-1 \quad ②$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2xy}{1-2y^2}=\frac{2xy}{2x^2-1} \quad ③$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-x}{2}} \quad ④$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+x}{2}} \quad ⑤$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{y}{1+x}=\frac{1-x}{y} \quad ⑥$$

若设 α,β 终边上与原点距离为 1 的点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则两角和与两角差的三角函数可用坐标表示为

$$\sin(\alpha+\beta)=y_1x_2+x_1y_2 \quad ⑦$$

$$\cos(\alpha+\beta)=x_1x_2-y_1y_2 \quad ⑧$$

$$\sin(\alpha-\beta)=y_1x_2-x_1y_2 \quad ⑨$$

$$\cos(\alpha-\beta)=x_1x_2+y_1y_2 \quad ⑩$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{y_1x_2+x_1y_2}{x_1x_2-y_1y_2} \quad ⑪$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_1x_2+y_1y_2} \quad ⑫$$

正因为三角函数可以用坐标定义，因此许多三角函数问题可以通过三角函数的定义化为代数问题，从而可以借助代数的方法处理三角函数问题. 从下面几例可看出，用三角函数定义解题，不仅有规可循、思路新颖，而且运算简捷、书写方便.