# 中學新教科書

## 幾何學

### 緒　　論

幾何學者、研究物之形狀,大小,位置之學科也。

凡占有宇宙間位置者、皆爲物體。舍物之性質而論其形狀,大小,位置時、則名之曰**立體** Solid。立體之界爲**面** Surface。面之界爲**線** Line。線之界爲**點** Point。

幾何學所研究者、即體,面,及面上之圖形也。然面之最簡單者爲平面、故平面幾何學所研究者、即平面上之圖形。初等平面幾何學所研究者、以點直線,圓所成之圖形爲限。

幾何學爲推理之學科、故學幾何學者、於論理學之言語、當略知其一二。

以語言表示一事、曰**命題** Proposition。

例如「中國爲亞洲最大之國」卽一個命題也。

如僅曰「爲亞洲最大之國」則何國爲亞洲最大之國、其意未全、不能表示一事、卽不得謂之命題。故所謂命題者、卽一完全之語言也。

幾何學之命題其種類如下。

a. 表示一事物之特性、以別於他事物者、曰**定義** Definition。

b. 就吾人經驗所能確定、而據之以爲推理之基礎者、曰**公理** Axiom。

## 普通公理

甲　全量大於其分。

乙　全量等於各分之和。

丙　等於同量之量互等。

丁　於等量上各加等量、其和亦等。

戊　於等量上各減等量、其差亦等。

己　於不等量上各加等量、其大者之方仍大。

庚　於不等量上各減等量、其大者之方仍大。

辛　等量之同倍亦等。

壬　等量之同分亦等。

c. 以既知之命題爲基礎、得證明其爲正確者、曰

**定理** Theorem。

組成定理之二部、一曰**假設** Hypothesis。二曰**終結** Conclusion。

自假設之事物、用定義,公理,或既知之定理、以表終結之事物爲應有之結果者、曰**證** Proof。

## 定理之模範

若甲爲乙、則丙爲丁。 (1)

「甲爲乙」即假設、而「丙爲丁」乃終結也。

若此定理正確。則下列之定理亦必正確。即

若丙非丁、則甲非乙。 (2)

如(1)(2)之形者、互稱爲**對定理** Opposite theorem。

若將(1)之假設與終結交換。則得定理如下

若丙爲丁、則甲爲乙。 (3)

如(1)與(3)之形者、互稱爲**逆定理** Converse theorem。

若將(2)之假設及終結交換、則得定理如下

若甲非乙、則丙非丁。 (4)

如(1)與(4)之形者、互稱爲**倒定理** Contradictory。

然(3)與(4)亦爲對定理。故(3)爲正確、則(4)亦必正確。

由是可知此四者之中、(1)(2)爲一組、(3)(4)爲一組、此二組之中、各能證明其一、則其他二者、可無俟證明而知其爲正確矣。

互爲逆定理者、通常雖各自獨立、然若

(i)遍舉各種變化之狀況、成一羣之定理、無一不正確者、則此等定理之逆定理、亦莫不正確。

例如　甲大於乙、則丙大於丁。

甲小於乙、則丙小於丁。

甲等於乙、則丙等於丁。

然甲與乙大小之比較、限於此三種、苟此三者均爲正確、則其逆定理亦必正確。即

丙大於丁、則甲大於乙。

丙小於丁、則甲小於乙。

丙等於丁、則甲等於乙。

(ii)甲與乙各爲唯一之事物、則定理「甲爲乙」爲正確時、其逆定理「乙爲甲」亦必正確。

例如中國唯一、亞洲最大之國亦唯一、故「中國爲亞洲最大之國」爲正確、則其逆定理「亞洲最大之國爲中國」亦必正確。

d. 自定理直接推定者、曰**系** Corollary。

# 第一編

## 直線

**定義1.** 有位置而無長,廣,厚者、曰**點**。

**定義2.** 有位置及長而無廣,厚者、曰**線**。線之界及二線之交處爲點。

**定義3.** 有位置及長,廣而無厚者、曰**面**。面之界及二面之交處爲線。

**定義4.** 有位置而長,廣,厚兼備者、曰**體**。體之界爲面。

**定義5.** 取線中任何部分、任置於他部分上、令所取部分中之二點、落於所置之部分上、若二部分全合者、其線曰**直線** Straight line。

直線全體、其長無限。惟注目於其一部時、則名此部爲**有限直線** Segment of a straight line。

**定義6.** 取面中任何二點、結以一直線、若其線全在面中、則名其面曰**平面** Plane。

**定義7.** 體,面,線,點、及此等所集成者、曰**形** Figure。其在平面上者、曰**平面形** Plane figure。

## 幾何公理

**公理1.** 凡形、得不變其度及狀而移其位置。

**公理2.** 凡形之可使全合(重疊而相合)者除位置以外、無不相同。是曰**相等** Equal。

**公理3.** 過二點得引一直線、惟其數限於一。

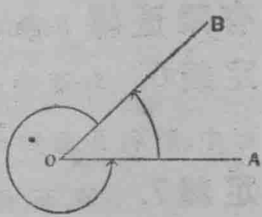
由是得斷定二事、如下

(*A*) 置一直線於他直線上、其線中任何一點、皆得使之合於他直線中之任何一點。

(*B*) 交於一點之二直線、若非全合者、不能有第二交點。

## 第一節　角

**定義8.** 自一點引二直線、其形曰**平面角** Plane angle。(通例略稱曰角)。其記號爲∠。其點曰**頂點** Vertex，其二直線曰**邊** Side。




如圖、*O* 爲頂點、*OA*, *OB* 爲二邊。

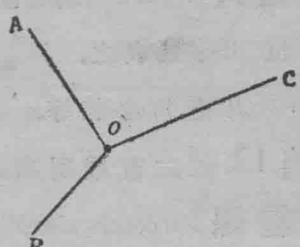
命其角、曰角*O*。或曰角*AOB*。其

記號爲$\angle O$。或$\angle AOB$。

但度$\angle AOB$之大小、其法有二、卽一則自$OA$邊度至$OB$邊、一則自$OB$邊度至$OA$邊、故自一點引二直線、所成之角有二、此同頂點同邊之二角、曰**共軛角** Conjugate angle。其大者曰**優角** Major angle。小者曰**劣角** Minor angle。如圖自$OA$邊度至$OB$者,曰劣角。自$OB$邊度至$OA$邊者曰優角、通例所謂$OA, OB$所夾之角、皆指自$OA$至$OB$之角。

**定義9.** 頂點及一邊俱爲二角所通用、則此二角互稱爲**倚角** Adjacent angles。其不通用之二邊曰**外邊** Exterior sides。二外邊所夾之角卽二倚角之和。

如圖$\angle AOB$與$\angle AOC$, $\angle COA$與$\angle COB$, $\angle BOC$與$\angle BOA$、互爲倚角。




**定義 10.** 角之二邊成一直線且在頂點之兩側者、其角曰**平角** Straight angle。二共軛角相等、則各爲平角。

**定理1.** 凡平角必相等。

設 $\angle CAB$ 與 $\angle FDE$ 俱爲平角

求證　　　$\angle CAB=\angle FDE$


證、置 $BA$ 邊於 $ED$ 邊上、得使 $A$ 點合於 $D$ 點。(公理 3$A$)

$\angle BAC$ 與 $\angle EDF$ 俱爲平角、故 $AB$ 與 $AC$ 二邊爲一直線。$DE$ 與 $DF$ 二邊亦爲一直線。　(定義10)

故 $AC$ 邊亦必合於 $DF$ 邊　(公理3·$B$)

故　$\angle BAC=\angle EDF$　(公理2)

**定義11.** 一直線爲外邊之二倚角相等、則名此二角曰**直角** Right angle。故直角等於平角之半。直角爲角之單位、以 $\angle\mathbf{R}$ 表之。

**系1.** 凡直角必相等。　(公理壬)

**定義12.** 二直綫所夾之角爲直角者、此二直綫互稱爲**垂線** Perpendicular。

**系2.** 於一直綫內之一點、止能引其綫之一垂綫。　(公理2)

**定義13.** 小於直角之角、曰**銳角** Acute angle。

**定義 14.**　大於直角、小於二直角之角、曰**鈍角** Obtuse angle。

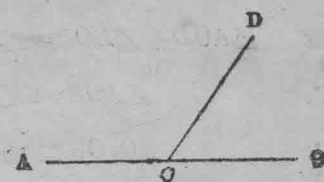
**定義 15.**　二角之和爲一直角者、此二角互稱爲**餘角** Complementary angles。

**系 3.**　相等角之餘角亦等。　(公理戊)

**定義 16.**　二角之和爲二直角者、此二角互稱爲**補角** Supplemental angles。

**系 4.**　相等角之補角亦等。　(公理戊)

**定理 2.**　一直線爲外邊之二倚角、其和必等於二直角。




設　$\angle AOD, \angle BOD$ 之外邊 $AO$ 與 $BO$ 爲一直線

求證　$\angle AOD+\angle DOB=2\angle R$

證　$\angle AOD+\angle DOB=\angle AOB$　(定義 9)

而　$\angle AOB=$平角　(定義 10)

$=2\angle R$　(定義 11)

$\therefore$　$\angle AOD+DOB=2\angle R$　(公理丙)

**系** 自一點引若干直線、各與其最近之線成角、則此各角之和爲四直角。

問題 *1.* 二直線相交、所成之四角中有一爲直角、則其他三角、亦均爲直角。

問題 *2.* 二倚角之外邊爲一直線、則二平分此二角之直線、互爲垂線。

**定理3.** 二倚角之和、若爲二直角、則二外邊成一直線。(圖同上)

設 $\angle AOD+\angle DOB=2\angle \mathrm{R}$

求證 $AO, OB$ 爲一直線。

證 $\angle AOD+\angle DOB=\angle AOB$ (定義 9)

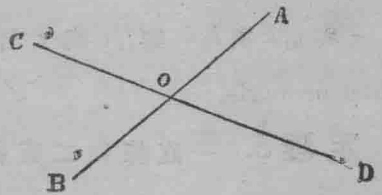
$\therefore$ $\angle AOB=2\angle R$ (公理丙)

$\therefore$ $AO, OB$ 二邊爲一直線。 (定義 10)

問題 *3.* 會於一點之四直線、若相鄰二線所夾之角俱爲直角、則此四直線合爲二直線。

**定義17.** 相交之二直線所成之四角中、其不爲倚角之角、互稱爲**對頂角** Vertical angles。

**定理4.** 對頂角相等。




設 $AB$ 與 $CD$ 相交於 $O$

求證　$\angle AOC=\angle DOB$

$\angle AOD=\angle COB$

證　$\angle AOC+\angle AOD=2\angle R$　(定理2)

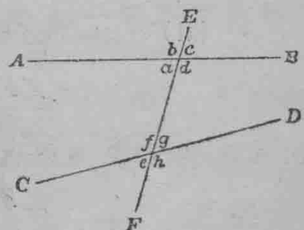
$\angle AOC+\angle COB=2\angle R$

$\angle AOC+\angle AOD=\angle AOC+\angle COB$　(公理丙)

$\therefore$　$\angle AOD=\angle COB$　(公理戊)

仿此得證　$\angle AOC=\angle DOB$

問題4. 自直線上一點向直線兩側引二直線所成之四角中、若不爲倚角之二角相等、則所引之二直線合爲一直線。




**定義18.** 一直線與兩直線相交、其所成之各角、定以特別之名稱、如下

如圖 $a, d, g, f$ 爲**內角** Interior angles。$b, c, h, e$ 爲**外角** Exterior angle。

$d$ 與 $f$, $a$ 與 $g$ 互稱爲**錯角** Alternate angle。

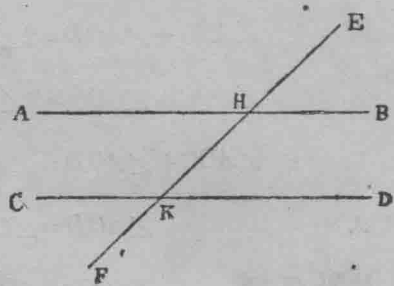
$c$ 與 $g$, $d$ 與 $h$, $b$ 與 $f$, $a$ 與 $e$ 皆互稱**同位角** Exterior-interior angle。

**定理 5.** 一直線與二直線相交、若一組錯角相等、則其結果如下

(i) 其他一組錯角亦相等。

(ii) 四組同位角相等。

(iii) 二組同側內角互爲補角.




設 $\angle AHF = \angle DKE$

求證 (i) $\angle BHF = \angle CKE$

(ii) $\angle EHB = \angle EKD$

$\angle FKD = \angle FHB$

$\angle EHA = \angle EKC$

$\angle FKC = \angle FHA$

(iii) $\angle BHF + \angle DKE = 2\angle R$

$\angle AHF + \angle CKE = 2\angle R$

證 (i) $\angle BHF$ 爲 $\angle AHF$ 之補角 (定理 2)

$\angle CKE$為$\angle DKE$之補角

∴　$\angle BHF=\angle CKE$　(定理1系4)

(ii)　$\angle EHB=\angle AHF$　(定理4)

$\angle EHB=\angle EKD$　(公理丙)

仿此得證 $\angle FKC=\angle FHA$

又　$\angle FKD$為$\angle DKE$之補角　(定理2)

$\angle FHB$為$\angle AHF$之補角

∴　$\angle FKD=\angle FHB$　(定理1系4)

仿此得證 $\angle EHA=\angle EKC$

(iii)　$\angle BHF+\angle AHE=2\angle R$　(定理2)

$\angle BHF+\angle DKE=2\angle R$　(公理丁)

仿此得證 $\angle AHF+\angle CKE=2\angle R$

**系1.**　一直線與二直線相交、若一組同位角相等、則得結果如下。

(i)　其他三組之同位角相等。

(ii)　二組錯角相等。

(iii)　二組同側之內角互為補角。

**系2.**　一直線與二直線相交、若一組同側之內角互為補角、則得結果如下

(i) 其他一組同側之內角亦互為補角。

(ii) 二組錯角相等。

(iii) 四組同位角相等。

問題 5.　六直線會於一點、成相等之六角、則各角各為一直角三分之二。

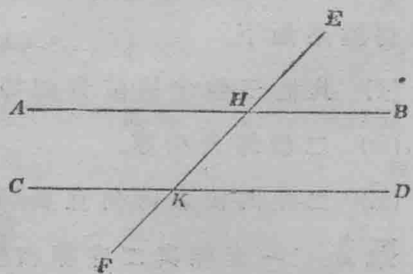
問題 6.　二對頂角之二等分線、成一直線。

## 第二節　平行直線

**定義 19.** 在一平面內之二直線、任何延長而不交者、曰**平行直線** Parallel Straight Lines。略曰**平行線** Parallel lines。以 ∥ 表之。

**公理 4.** 過所設之一點、與所設之直線平行者、必有一線且以一線為限。

**定理 6.** 一直線與二直線相交若一組錯角相等，則二直線平行。




設直線 $EF$ 與二直線 $AB, CD$ 相交

$\angle EKD = \angle FHA$

求證　$AB \parallel CD$

證　將本圖顛倒而置於原圖之上、使二圖之直線

$EF$ 相疊、而倒圖之 $H$ 點落於正圖之 $K$ 點上。則倒圖之 $K$ 點必落於正圖之 $H$ 點上。

然　$\angle EKD = \angle FHA$

故倒圖之 $KD$ 邊、必與正圖之 $HA$ 相合。　(公理2)

倒圖之 $HA$ 與正圖之 $KD$ 相合。

故 $AB, CD$ 任何方向延長、苟有交點、則倒轉時必與反對方向之交點相合、而有背於公理(2)、故 $AB$ 與 $CD$ 任何延長、無相交之點。

卽　$AB \parallel CD$　(定義19)

**系1.** 一直線與二直線相交、若其同位各相等、則此二直線平行。

**系2.** 一直線與二直線相交、若其同側內角互爲補角、則二直線平行。

問題7. 同爲一直線之各垂線、互相平行。

**定理7.** 一直線與二平行線相交、其所成之錯角相等。

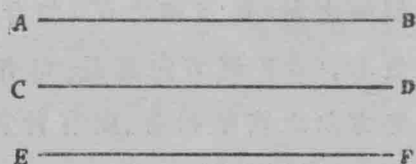
依公理4、及緒論 $C$ ii 得證之。

**系** 一直線與二平行線相交、則其同位角相等、

其同方內角互爲補角。

問題 *8.* 一直線爲平行各線中之一線之垂線、則亦爲平行各線之垂線。

**定理8.** 與同一直線平行之各直線、必互相平行




設二直線 $AB$, $CD$ 各與 $EF$ 平行。

求證　$AB \parallel CD$.

證　若 $AB$ 與 $CD$ 不平行、則二線延長、必有交點、而 $AB$ 與 $CD$ 爲過同點之二直線。然過同點之二線、俱與 $EF$ 平行、與公理4不合。故 $AB$ 與 $CD$ 任何延長、不容有交點、即互行平行。　(定義19)

問題 *9.* 二直線各與他二直線平行、則其所夾之角、與其平行之直線所夾之角相等。

問題 *10.* 一直線之垂線、與非垂線必相交。

問題 *11.* 相交之二直線、其垂線亦必相交。

問題 *12.* 二角之邊、各各平行、則二平分其角之直線、或平行、或互爲垂線。