龙门品牌 学子至爱

LongMen

龙门专题

解析几何

高中数学

主　　编　傅荣强
本册主编　佟志军

龍門書局
www.Longmenbooks.com

龙门专题

解析几何

高中数学

主　　编：傅荣强

本册主编：佟志军

编　　者：唐桂坤　崔淑平　王玉兰
李素琴　刘振秀　张　贤
白万德　杨伟俊　敖志伟
李美荣　石铁明　王选军
温雅华　于晓梅　陈　丽
高　波　史景辉　裴英君
王元福　邵忠厚

龍門書局

北　京

举报电话：(010)64030229;(010)64034315;13501151303
邮购电话：(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题：新课标. 高中数学. 解析几何/傅荣强主编；佟志军本册主编. —北京：龙门书局，2010.7
ISBN 978-7-5088-2509-0

Ⅰ. ①龙…　Ⅱ. ①傅…　②佟…　Ⅲ. ①解析几何课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 142260 号

责任编辑：马建丽　王　乐　刘　婷/封面设计：耕　者

龍　門　書　局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
www.longmenbooks.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销

*

2010 年 7 月第　一　版　开本：A5(890×1240)
2010 年 7 月第一次印刷　印张：7 3/4
字数：277 000

定　价：15.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

Contents

目录

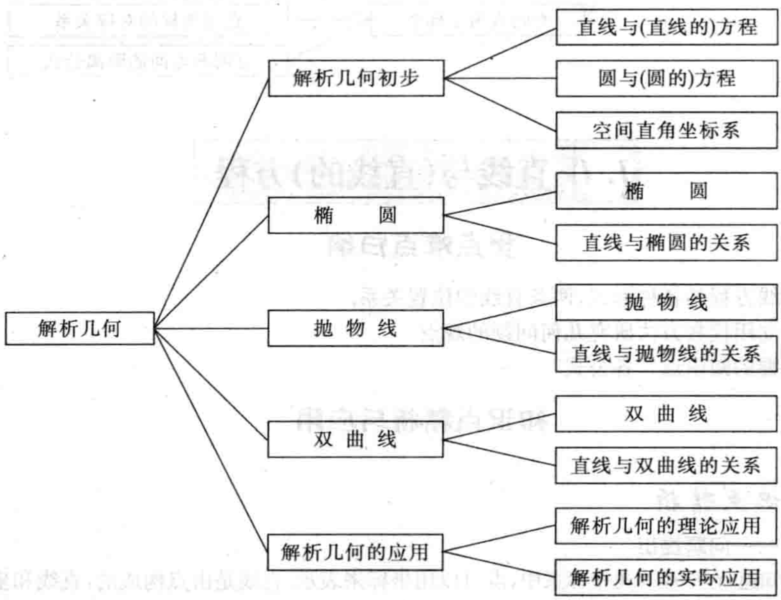
基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简单地说它是研究“数”与“形”的学科. 解析几何是用代数的方法研究几何问题的学科.

学习解析几何，最重要的是建立对应观点，从点和坐标的对应开始，向曲线和方程的对应过渡，循序渐进地提升对应观点，最终形成一种思想.

在解析几何的研究中，人们的坐标观念，绝大部分是在直线和圆的学习阶段形成的. 而椭圆、抛物线、双曲线除了延续圆在圆锥曲线中的共性外，它们各自还都有个性的一面，即它们本身的定义、方程、图形和性质. 个性也好，共性也罢，对圆锥曲线的研究仍离不开两个主要问题——根据已知条件，求出曲线的方程；通过方程，讨论曲线的性质.

本书知识框图



第一讲　平面解析几何初步

本讲知识框图

- 平面解析几何初步
  - 直线与(直线的)方程
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
    - 两条直线的位置关系
    - 直线的交点坐标与距离公式
  - 圆与(圆的)方程
    - 圆的方程
    - 圆与点、直线、圆的位置关系
  - 空间直角坐标系
    - 空间直角坐标系
    - 点与坐标的对应关系
    - 空间两点间的距离公式

1.1 直线与(直线的)方程

重点难点归纳

重点　直线方程的各种形式,两条直线的位置关系.

难点　建立用代数方法研究几何问题的观点.

本节需掌握的知识点　各公式.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

我们知道,在平面直角坐标系中,点可以用坐标来表示.直线是由点构成的,直线和坐标之间存在着怎样的关系呢?在一次函数的学习中,我们初步地体会了除平行坐标轴外的所有直线可以用一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 来表示,即直线可以用方程 $kx-y+b=0$ 来表示.

用方程表示直线,其意义在哪儿呢?意义有二:一是用代数方法研究直线问题;二是研究二元一次方程的几何背景和解决思路.

现在要解决的问题是:一条直线的位置由哪些条件来确定;如何求出它的方程;怎样用方程来研究直线的有关问题,诸如两条直线的平行与垂直,点到直线的距离,等等.

探究——抽象概括

1. 直线的倾斜角与斜率

我们知道,两点确定一条直线. 这里我们再提供一个确定直线的条件.

如图 1-1(1),直线 l 过点 P,过点 P 可以作出无数条直线 $l_1, l_2, \cdots$,这时 l 是不确定的.

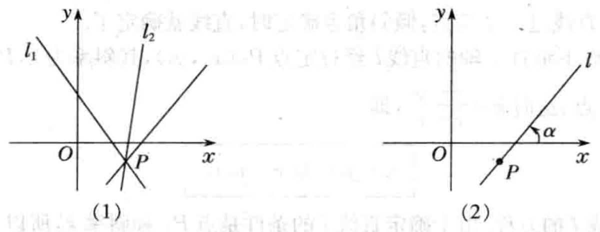


图 1-1

如图 1-1(2),直线 l 过点 P,α 是一个确定的角,这时 l 是唯一的,即 l 是确定的.

(1)直线的倾斜角

如图 1-2,在日常生活中,道路的倾斜程度,也就是坡度,常常可以表示为坡度$=\dfrac{\text{升高量}}{\text{前进量}}$,它实际上就是角 α 的正切值,这个值刻画了坡度的大小,由此我们想到了用角来刻画直线的倾斜程度.

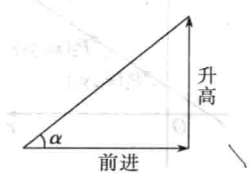


图 1-2

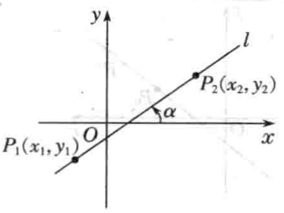


图 1-3

如图 1-3,设直线 l 与 x 轴相交. x 轴的正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.

直线的倾斜角还可表述为:把 x 轴(正方向)按逆时针方向绕着交点旋转到和直线 l 重合所成的角.

当直线 l 与 x 轴平行或重合时,规定它的倾斜角的大小为 0°.

直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$.

(2)直线的斜率

如图 1-3,直线 l 的倾斜角 α 可以表示 l 相对于 x 轴的倾斜程度,为了从数量上进一步地刻画它,把 α 的正切值叫做 l 的斜率,常用 k 来表示,即 $k=\tan\alpha$.

对于 $P_1, P_2 \in l$,k 还可以表示为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

k 可一并表示为

$$\boxed{k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

要注意，$\alpha=90^\circ$时，不存在正切值，这说明倾斜角是 90°的直线没有斜率，所以，这个公式中，$\alpha\neq 90^\circ$，$x_1\neq x_2$.

2. 直线的方程

(1)直线的点斜式方程

我们知道，直线过一个定点，倾斜角也确定时，直线就确定了.

如图 1-4，设不垂直 x 轴的直线 l 经过定点 $P_0(x_0,y_0)$，其斜率为 k，$P(x,y)$为 l 上异于点 P_0 的任一点，这时 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).}$$

这就是直线 l 的方程. 由于确定直线 l 的条件是点 P_0 和斜率 k，所以，把方程的这种形式叫做点斜式.

特别地，当直线 l 过点$(0,b)$、斜率为 k 时，由点斜式可得 $y-b=k(x-0)$，即

$$\boxed{y=kx+b.}$$

这时，称 b 是直线 l 在 y 轴上的截距，并把这种形式的方程叫做斜截式.

要注意，点斜式、斜截式都不能表示倾斜角是 90°的直线.

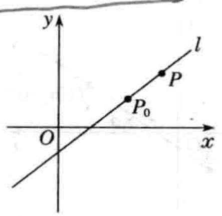


图 1-4

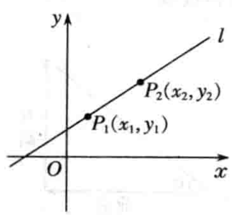


图 1-5

(2)直线的两点式方程

直线经过两个定点时，直线是确定的.

如图 1-5，设直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$. 由点斜式可得 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，当 $y_1\neq y_2$ 时，可写为

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.}$$

这就是直线的两点式方程.

特别地，l 经过点$(a,0)$、$(0,b)$，且 $ab\neq 0$(这两点都不是原点)时，由两点式可得$\dfrac{y-0}{b-0}=\dfrac{x-a}{0-a}$，即

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.}$$

其中，a、b 分别叫做直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距. 方程的这种形式叫做截距式.

要注意，两点式、截距式方程都不能表示垂直于坐标轴的直线. 当直线垂直于 x 轴、y 轴时，方程的形式分别为 $x=x_0$ 与 $y=y_0$.

(3)直线的一般式方程

在平面直角坐标系中，任意一条直线都可以用一个关于 x、y 的二元一次方程来表示；关于 x、y 的二元一次方程，它都表示一条直线.

下面的方程称为直线的一般式方程.

$$\boxed{Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0).}$$

其中，$A^2+B^2\neq0$ 的意义是 A、B 不同时为 0.

为了方便，这里我们把直线方程的五种形式归纳在一个表格内，供参考使用.

直线方程的五种形式

名称	方程的形式	常数的几何意义	适用范围
点斜式	$y-y_1=k(x-x_1)$	(x_1,y_1) 是直线上一定点，k 是斜率	直线与 x 轴不垂直
斜截式	$y=kx+b$	k 是斜率，b 是直线在 y 轴上的截距	直线与 x 轴不垂直
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	(x_1,y_1)、(x_2,y_2) 是直线上的两定点	直线与 x 轴和 y 轴都不垂直
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a 是直线在 x 轴上的非零截距，b 是直线在 y 轴上的非零截距	直线与 x 轴和 y 轴都不垂直，并且它还不经过原点
一般式	$Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq0)$	A、B、C 为系数	任何位置的直线

3. 两条直线的位置关系

(1)两条直线平行

设直线 l_1 与 l_2 都有斜率，其方程分别为 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$.

$l_1 /\!/ l_2$ 时，$k_1=k_2$；反之，$k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$ 时，$l_1 /\!/ l_2$. 这样的关系可以一并表示为

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2\text{，且 } b_1\neq b_2.}$$

要注意，$k_1=k_2$ 时，$l_1 /\!/ l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

(2)两条直线垂直

对两条都有斜率的直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与 $l_2: y=k_2x+b_2$，有

$$\boxed{l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.}$$

要注意，直线 l_1 没有斜率时，与它平行或重合的直线 l_2 也没有斜率，与它垂直的直线 l'_2 有斜率，其值为 0.

还要注意，如果约定了直线 l_1 与 l_2 不重合，那么 $l_1 /\!/ l_2$ 包括：l_1、l_2 都没有斜率；l_1、l_2

都有斜率，其值相等.

4. 直线的交点坐标与距离公式

(1)两条直线的交点坐标

对两条直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 无解、有唯一解、有无穷多个解时，l_1 与 l_2 分别平行、相交、重合.

求两条直线的交点坐标，就是求这两个直线方程的公共解.

(2)两点间的距离

两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$间的距离为

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

$|P_1P_2|$也可表示为 $d(P_1,P_2)$，或表示为 P_1P_2.

(3)点到直线的距离

点 $P_0(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

特别地，两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$的距离是 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.求两条平行直线间的距离，还可在一条直线上任取一点，再求这点到另一条直线的距离.

(4)中点坐标

已知两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，设点 $P(x,y)$是线段 P_1P_2 的中点，这时

$$\boxed{\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\[2mm] y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}}$$

解题方法指导

1. 直线的斜率与倾斜角

使用公式 $k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(\alpha\neq 90^\circ, x_1\neq x_2)$，可使一些与直线的倾斜角、斜率有关的问题获解.

在 $k=\tan\alpha$ 中，$k>0$ 时，α 是锐角，$k<0$ 时，α 是钝角，反之也正确.

解答倾斜角、斜率问题，直线与 x 轴是否垂直，是分类讨论的切入点，这是由直线有斜率与没有斜率所决定的.

［例 1］ 求经过 A、B 两点的直线的倾斜角 α 的大小.

(1) $A(1,1)$, $B(1,2)$； 90°

(2) $A(-1,2)$, $B(3,2)$； 0°

(3) $A(-2,-2)$, $B(3,3)$； 45°

(4) $A(-1,0)$, $B(0,-\sqrt{3})$； ~~60°~~ 120°

(5) $A(m, 2\sqrt{3}m+\sqrt{3})$, $B(2m-1, 3\sqrt{3}m)$，其中 $m \in \mathbf{R}$. 60°

分析 先考虑直线 AB 与 x 轴是否垂直？垂直，$\alpha=90°$；不垂直，再计算斜率 k_{AB}，根据 k_{AB} 的值就可以求出 α 的大小.

解 (1)点 $A(1,1)$、$B(1,2)$ 的横坐标相等，所以，直线 $AB \perp x$ 轴，$\alpha=90°$.

(2)点 $A(-1,2)$、$B(3,2)$ 的纵坐标相等，所以，直线 $AB \perp y$ 轴，$\alpha=0°$.

(3) $k_{AB}=\dfrac{3+2}{3+2}=1$，$\tan\alpha=k_{AB}=1$，$0° \leqslant \alpha < 180°$，

所以 $\alpha=45°$.

(4) $k_{AB}=\dfrac{-\sqrt{3}-0}{0+1}=-\sqrt{3}$，$\tan\alpha=k_{AB}=-\sqrt{3}$，$0° \leqslant \alpha < 180°$，

所以 $\alpha=120°$.

(5)当 $m=2m-1$，即 $m=1$ 时，$2\sqrt{3}m+\sqrt{3}=3\sqrt{3}m$，$A$、$B$ 重合，过一点的直线的倾斜角为任意值，故 $0° \leqslant \alpha < 180°$.

当 $m \neq 1$ 时，$k_{AB}=\dfrac{3\sqrt{3}m-(2\sqrt{3}m+\sqrt{3})}{(2m-1)-m}=\dfrac{\sqrt{3}(m-1)}{m-1}=\sqrt{3}$，$0° \leqslant \alpha < 180°$，

所以 $\alpha=60°$.

点评 本例的第(2)小题还可以这样求解：

$k_{AB}=\dfrac{2-2}{3+1}=0$，$0° \leqslant \alpha < 180°$，$\alpha=0°$. 这表明，求 α 的大小，除了垂直于 x 轴的直线以外，都可以通过先求 k_{AB} 再求 α 的大小去完成.

本例的第(4)小题还可以这样求解：

如图 1-6，根据点 $A(-1,0)$、$B(0,-\sqrt{3})$ 可知，在 Rt$\triangle OAB$ 中，$|OA|=1$，$|OB|=\sqrt{3}$，$\tan\angle OAB=\dfrac{|OB|}{|OA|}=\sqrt{3}$，$\angle OAB=60°$. 直线 AB 的倾斜角 α 是 $\angle AOB$ 的补角，所以 $\alpha=120°$. 这提醒我们，现在的知识和以往的知识是相通的. 学习数学，把知识上下贯通、左右协调、前后衔接起来，就会有立体交叉之感悟，你的思维才能得到较好的拓展.

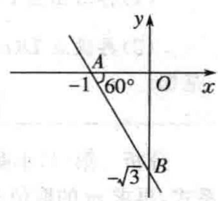
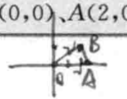


图 1-6

本例的第(5)小题，求解中对参数 m 实施了分类讨论，其中"$m=2m-1$"是从 A、B 两点的横坐标、纵坐标相等考虑的. 可以说，讨论斜率问题，直线有斜率、没有斜率是最敏感的问题，不可忽视.

［例 2］ 证明以 $O(0,0)$、$A(2,0)$、$B(1,\sqrt{3})$ 为顶点的三角形是正三角形.



分析 只需证明直线 OB、AB 的倾斜角的大小分别是 $60°$ 与 $120°$.

证明 如图 1-7,点 $O(0,0)$、$A(2,0)$ 都在 x 轴上,点 B 的坐标是 $(1,\sqrt{3})$.

直线 OB 的斜率 $k_{OB}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$,它的倾斜角的大小是 $60°$,$\angle AOB=60°$.

直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{1-2}=-\sqrt{3}$,它的倾斜角的大小是 $120°$,$\angle BAO$ 是它的补角,$\angle BAO=60°$.

综上,$\triangle OAB$ 是正三角形.

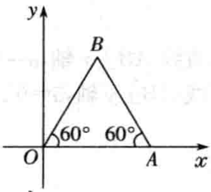


图 1-7

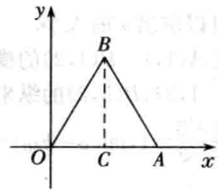


图 1-8

点评 解答一道数学题,可能有好多种方法.例如,本例还可以这样求解:

如图 1-8,取线段 OA 的中点 $C(1,0)$,连结 BC,有 $BC\perp OA$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\tan\angle BAC=\dfrac{|BC|}{|CA|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$,所以 $\angle BAC=60°$,同理 $\angle BOC=60°$.

所以,$\triangle OAB$ 是正三角形.

本例中,我们借助倾斜角,使问题获得了证明,找到了当前知识的用处,难能可贵.学习数学,最可怕的就是找不到新知识的使用方向以及运用它去解决新问题的思路,这就要求我们多思考、多探究.例如,借用斜率相等,还可以证明 P、Q、R 三点共线,只需证明 $k_{PQ}=k_{PR}$.

[例3] 给出两点 $A(3,-2)$、$B(-2,3)$.

(1)再给出点 $C\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,求证 A、B、C 三点共线;

(2)再设点 $D(m,n^2+2n-1)(m,n\in\mathbf{R})$ 是直线 AB 上异于点 A 的点,求 m 的取值范围.

分析 第(1)小题,只需证明 $k_{AB}=k_{AC}$.第(2)小题,先通过 $k_{AD}=k_{AB}$ 得到 m 与 n 的关系式,再求 m 的取值范围.

解(证) (1)直线 AB、AC 的斜率分别是 $k_{AB}=\dfrac{3+2}{-2-3}=-1$,$k_{AC}=\dfrac{\dfrac{2}{3}+2}{\dfrac{1}{3}-3}=-1$,

所以
$$k_{AB}=k_{AC},$$

所以,A、B、C 三点共线.

(2)点 D 异于点 A,$m\neq3$.

直线 AD 的斜率 $k_{AD}=\dfrac{(n^2+2n-1)-(-2)}{m-3}=\dfrac{n^2+2n+1}{m-3}$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-1$.

点 D 在直线 AB 上，$k_{AD}=k_{AB}$，即

$$\frac{n^2+2n+1}{m-3}=-1,$$

$$m=-n^2-2n+2,$$ m 是 n 的二次函数

$m\neq3$ 时，$-n^2-2n+2\neq3$，$n\neq-1$，

所以 $$m=-n^2-2n+2(n\neq-1).$$

把上式变形，得

$$m=-(n+1)^2+3(n\neq-1),$$

所以，m 的取值范围是 $(-\infty,3)$.

点评 使用新知识解答数学问题，解题过程中可能用到以往的知识，这是预料不到的，因此就要求解题者一边解一边分析，逐步找出解题思路，这才是正常的思维发展，本例由 $k_{AD}=k_{AB}$ 得到二次函数 $m=-n^2-2n+2$ 就是这样一个过程.

2. 直线的方程

与直线的方程有关的问题，使用的方程是

$$y-y_0=k(x-x_0),$$
$$y=kx+b,$$
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$
$$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0),$$

要解决的问题大体上可以分为两类：第一，直线以不同的条件确定以后，选择适当形式的方程，求出表示这条直线的方程，最终化成一般式；第二，预先给出表示直线的方程，据此去讨论直线的有关性质.

［例 4］ 设对数函数 $y=\lg x$ 的图象与 x 轴的交点是 A，指数函数 $y=2^x$ 的图象与 y 轴的交点是 B，求：

(1) 直线 AB 的方程；

(2) 直线 AB 与两坐标轴围成的三角形的面积.

分析 先求出点 A、B 的坐标，再讨论直线 AB 的方程和三角形的面积.

解 (1) 在 $y=\lg x$ 与 $y=2^x$ 中，分别令 $y=0$ 与 $x=0$，得 $x=1$，$y=1$，所以，点 A、B 的坐标分别是 $(1,0)$，$(0,1)$.

方法 1：点斜式，$k_{AB}=\dfrac{1-0}{0-1}=-1$，直线 AB 的方程为 $y-0=-(x-1)$，$x+y-1=0$.

方法 2：斜截式，$k_{AB}=-1$，在 y 轴上的截距是 1，直线 AB 的方程为 $y=-x+1$，$x+y-1=0$.

方法 3:两点式,$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-1}{0-1}$,$x+y-1=0$.

方法 4:截距式,直线 AB 在 x 轴、y 轴上的截距都是 1,方程为$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$,$x+y-1=0$.

(2)如图 1-9,直线 AB 与两坐标轴围成的三角形是$\triangle OAB$,其面积为 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

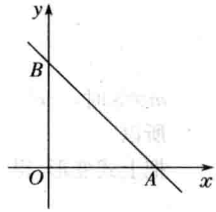


图 1-9

点评 在本例的第(1)小题的解答中,我们采用了四种方法,意在通过对比摸索经验.不难看出,方法 4 最为简单.第(2)小题,以直线的方程为主,稍微外延了一点儿.在后续的问题中,我们还将逐步地联系先前学习的有关知识点,沟通今昔,构建知识与知识之间的最佳衔接点.

[例 5] 设 $2015x_1-y_1+1=0$,$2015x_2-y_2+1=0$,求经过点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$的直线 AB 的方程. $y_1=2015x_1+1$ $y_2=2015x_2+1$ ~~$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2015(x_2-x_1)$~~

分析 两点确定一条直线.一条直线上有两点的坐标适合某个二元一次方程时,这个方程就是这条直线的方程.

解 因为 $2015x_1-y_1+1=0$,$2015x_2-y_2+1=0$,所以,点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$的坐标都适合方程 $2015x-y+1=0$,这就是直线 AB 的方程.

点评 解答本例的关键,在于正确地分析出点 A、B 的坐标都适合方程$2015x-y+1=0$,其本质是一种对应观点,即直线上每一点的坐标都是方程的解,以方程的解为坐标的点都是直线上的点.

[例 6] 已知 $2x+3y-6=0$,且 $1\leqslant x\leqslant3$,求$\frac{y}{x}$的最大值,最小值.

分析 以下给出两种解法,从方程、函数两个角度去求解,对比中,让大家初步地体会方程与函数的联系,进一步地领悟知识之间是相通的这个道理.

解法 1 如图 1-10,方程 $2x+3y-6=0$ 表示直线 AB.

把 $x_1=1$ 与 $x_2=3$ 代入 $2x+3y-6=0$,得 $y_1=\frac{4}{3}$,$y_2=0$.

$2x+3y-6=0$,且 $1\leqslant x\leqslant3$,它表示以 $A\left(1,\frac{4}{3}\right)$、$B(3,0)$为端点的线段.$\frac{y}{x}$是直线 OP 的斜率,其中,O 是坐标原点,P 是线段 AB 上的任意一点.用 k 表示斜率,$\frac{y}{x}$的最大值、最小值分别是 $k_{OA}=\frac{4}{3}$,$k_{OB}=0$.

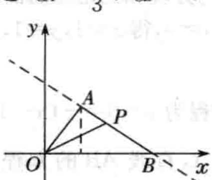


图 1-10

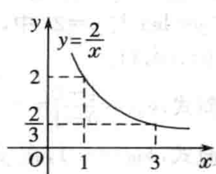


图 1-11

解法 2　$2x+3y-6=0$ 且 $1\leqslant x\leqslant 3$ 可化为

$$y=-\frac{2}{3}x+2(1\leqslant x\leqslant 3),$$

所以

$$\frac{y}{x}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{x}(1\leqslant x\leqslant 3). \qquad ①$$

如图 1-11，函数 $y=\frac{2}{x}(1\leqslant x\leqslant 3)$ 是减函数，它的最大值、最小值分别是

$$\left(\frac{2}{x}\right)_{\max}=\left(\frac{2}{x}\right)\Big|_{x=1}=2, \qquad ②$$

$$\left(\frac{2}{x}\right)_{\min}=\left(\frac{2}{x}\right)\Big|_{x=3}=\frac{2}{3}. \qquad ③$$

由①、②、③可知，$\frac{y}{x}$ 的最大值、最小值分别是

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3},$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0.$$

点评　本例给出了两种解法，意在对比. 两种解法都把一个代数问题赋予了几何背景，这是在实现曲线与方程的沟通. 数，严谨不直观；形，直观不严谨. 数、形结合起来，即数形结合，它是一种很好的思维形式，更是一种思想，大家于此应该下一点儿功夫.

3. 两条直线的位置关系

这个阶段，对有斜率的直线的位置关系的研究，要解决两个方面的问题.

第一，把直线 l_1、l_2 的斜率 k_1、k_2 的关系分成两类，即 $k_1\neq k_2$ 与 $k_1=k_2$. 当 $k_1\neq k_2$ 时，l_1 与 l_2 相交；当 $k_1=k_2$ 时，l_1 与 l_2 平行或重合. 其中，两条直线可以重合，是由用方程表示直线所致.

第二，在两条直线的位置关系中，平行与垂直又显得格外重要. 对有斜率的直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与 $l_2: y=k_2x+b_2$，讨论它们的平行与垂直，其依据是

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2，且\ b_1\neq b_2；$$

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

要注意，讨论两条直线的位置关系，直线有无斜率是分类讨论的切入点，它取决于 y 的系数是否为 0. 例如，对直线 $x+ay-1=0$，$a=0$ 时直线没有斜率和 $a\neq 0$ 时直线有斜率 $k=-\frac{1}{a}$.

［例 7］　给出两条直线 $l_1: x+my+\frac{6}{5}=0$，$l_2: (m-2)x+15y+2m=0$. 其中 $m\in\mathbf{R}$.

(1) 当 m 为何值时，l_1 与 l_2 重合？

(2) 设 $l_1 /\!/ l_2$，求 m；

(3) 设 l_1 与 l_2 相交，求 m 的取值范围；

(4) 求 m 的值，使得 $l_1\perp l_2$.

分析　在 l_1 的方程中，y 的系数是参数 m，应就 $m=0$ 与 $m\neq 0$ 分类讨论.

解 (1)①设 $m=0$.

l_1 与 l_2 的方程都具体化了，即

$$l_1: x+\frac{6}{5}=0, l_2: 2x-15y=0,$$

它们不重合.

②设 $m\neq0$.

l_1 与 l_2 的方程化为

$$l_1: y=-\frac{1}{m}x-\frac{6}{5m},$$

$$l_2: y=\frac{2-m}{15}x-\frac{2m}{15}.$$

由 l_1、l_2 的斜率 $k_{l_1}=k_{l_2}$，得

$$-\frac{1}{m}=\frac{2-m}{15},$$ $l_1 /\!/ l_2$，或 l_1 与 l_2 重合

解得 $$m=-3, \text{或 } m=5.$$

由 $-\frac{6}{5m}=-\frac{2m}{15}$，得

$$m=-3.$$

综上，$m=-3$ 时，l_1 与 l_2 重合.

(2)由第(1)小题可知，$m=-3$ 或 $m=5$ 时，l_1 与 l_2 重合或平行，而 $m=-3$ 时，l_1 与 l_2 重合.

所以，$l_1 /\!/ l_2$ 时，$m=5$.

(3)①设 $m=0$.

l_1 与 l_2 的方程分别为 $x+\frac{6}{5}=0$，$2x-15y=0$，l_1 与 l_2 相交.

②设 $m\neq0$.

由第(1)小题可知，$k_{l_1}=k_{l_2}$ 时，$m=-3$ 或 $m=5$，所以，$k_{l_1}\neq k_{l_2}$ 时，$m\neq-3$ 且 $m\neq5$.

综上，m 的取值范围是 $(-\infty,-3)\cup(-3,5)\cup(5,+\infty)$.

(4)①$m=0$ 时，l_1 与 l_2 不垂直.

②$m\neq0$ 时，由 $l_1\perp l_2$ 得

$$-\frac{1}{m}\left(\frac{2-m}{15}\right)=-1,$$

解得 $$m=\frac{1}{8}.$$ 相交的特例

综上，$l_1\perp l_2$ 时，$m=\frac{1}{8}$.

点评 对直线 $A_1x+B_1y+C_1=0(A_1^2+B_1^2\neq0)$ 和直线 $A_2x+B_2y+C_2=0(A_2^2+B_2^2\neq0)$，它们在下列条件下依次相交、平行、重合.

相交，$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$；