线性代数
概率论与数理统计
学习指导

太原理工大学数学系　编

前　　言

本书依据国家教委工科数学课程教学指导委员会编制的《线性代数基本要求》及《概率论与数理统计教学基本要求》，并与太原理工大学数学系编写的《线性代数　概率论与数理统计》一书相配合的学习指导书，旨在帮助读者更好地理解和掌握线性代数、概率论与数理统计的基本内容。

本书的编写框架按“基本要求”、“基本内容总结”、“例题分析”、“自我检测题”四项设计。“基本要求”和“基本内容总结”两项意在为读者指明该章内容的重点、难点、各部分内容以及教学应掌握的深度与广度。力图使读者掌握该章内容的全貌及层次。“例题分析”是本书的重点之一，通过对典型例题的分析、一题多解、附注、小结等多种形式，帮助读者理解概念，掌握学习方法和解题方法。最后提供的“自我检测题”是帮助读者自己检查一下是否达到本章的各项要求。

太原理工大学数学系的部分同志参加了本书的编写工作。刘丽萍编写第一章——第七章，杨茂财编写第八章——第十章，王彩贤编写第十一章——第十三章。张建国教授对全书的体系和结构安排提供了宝贵的意见，并审阅了部分原稿。王玉民副教授、李玉瑛副教授也审阅了部分原稿。本书的主编是张建文教授，刘进生教授。

太原理工大学教务处，教材管理中心对本书的出版发行给予极大的支持，编者特向他们表示由衷的感谢。

本书可作为高等工业学校工程数学课程教学的参考书，也可作为成人教育、电大、函授大学及自学考试工程数学课程的学习辅导书。

限于编者水平，书中难免有不当乃至错误，欢迎读者批评指正。

编　者

2002 年 8 月

目　　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率论与数理统计

第一章

行列式

一、基本要求

(1)理解 n 阶行列式的定义.

(2)掌握行列式的性质并能熟练地应用它们.

(3)重点掌握行列式的各种计算方法.

(4)掌握克莱姆法则.

二、基本内容总结

1.全排列及逆序数

(1)全排列

由 n 个不同的元素按照一定的次序排成一列,称为这 n 个元素的一个全排列,简称排列.

n 个元素全排列的总数为 $n!$.

(2)逆序

在一个排列中,若一对元素的先后次序和标准次序不同,则称这一对元素构成此排列的一个逆序.

(3)逆序数

一个排列中所有逆序的总数,称为该排列的逆序数.排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数用$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$或τ表示.

若τ为奇数,称对应的排列为奇排列.

若τ为偶数,称对应的排列为偶排列.

(4)对换

一个排列中,把某两个元素的位置互相调换,这种调换称为一个对换.将相邻的两个元素对换,称为相邻对换.

对换改变排列的奇偶性.

奇排列调成标准排列的对换次数是奇数,偶排列调成标准排列的对换次数是偶数.

2. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

由定义易求出对角形行列式及上(下)三角形行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

但是

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

3. **行列式的性质**

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

此性质表明,行列式中对行成立的性质,对列也成立.反之也对.

性质 2　互换行列式的其中两行(列),行列式改变符号.

推论　若行列式中两行(列)对应元素完全相同,则行列式等于零.

性质 3　将行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以数 k,等于用 k 乘此行列式.

推论　行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

性质 4　若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,那么该行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式

相同.

性质 6　将行列式某行(列)元素的 k 倍分别加到另一行(列)的对应元素上,其值不变.

注意　在利用性质6时,要防止这样的错误:将行列式的某一行(列)加到另一行(列)的 $k(k\neq0)$ 倍上,此时相当于将另一行(列)乘了 k 倍,整个行列式应乘以$\dfrac{1}{k}$才能与原行列式相等.

4. 余子式和代数余子式

设有 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

元素 a_{ij}的余子式M_{ij}是去掉a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列后所得的$n-1$ 阶行列式.

元素 a_{ij}的代数余子式$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

5. 行列式按某一行(列)展开

n 阶行列式D 等于它的任一行(列)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和.

n 阶行列式D 的某一行(列)元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.即有

$$\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D \\ a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \end{cases} \qquad (i\neq j)$$

$$\begin{cases} a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \end{cases} \qquad (i\neq j)$$

注意　行列式按行、列展开是行列式降阶的一个方法,它在行列式计算中有重要的作用.特别在行列式中零元素较多时,常用展

开法将行列式降阶化简.

6. **范德蒙行列式**

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

注意 n 阶范德蒙行列式的每一列为某一个数的不同方幂,且从上到下幂次数由零递增至 $n-1$.

7. **克莱姆法则**

n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$ 时,方程组有唯一解

$$x_i=\frac{D_i}{D}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

注意 克莱姆法则的意义在于它能用方程组的系数及常数项表出该方程组的解,形式简明易记.它的不足之处是计算量大.且当 $D=0$ 时,就不能再用克莱姆法则求解.当然,当方程的个数与未知量的个数不相等时,也不能用克莱姆法则求解.

三、例题分析

1. 排列和逆序

例 1 求下列排列的逆序数,并确定排列的奇偶性.

(1) 2143765;

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

分析 计算一个排列的逆序数,只要将排列中每个数的逆序,即比它大且排在它前面的数的总个数算出,然后将每个数的逆序相加,即得这个排列的逆序数.

解 (1)2 前面没有数,故其逆序数为 0;

1 前面比 1 大的数有 2,故其逆序数为 1;

4 前面没有比它大的数,故其逆序数为 0;

3 前面比 3 大的数有 4,故其逆序数为 1;

7 前面没有比 7 大的数,故其逆序数为 0;

6 前面比 6 大的数有 7,故其逆序数为 1;

5 前面比 5 大的数有 6,7,故其逆序数为 2.

因此排列 2143765 的逆序数为

$$\tau(2143765)=0+1+0+1+0+1+2=5.$$

因此,2143765 为奇排列.

(2)由于 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 中每个数的逆序都是 0,故只要计算其余数的逆序即可.

2 前面比 2 大的数有 $n-1$ 个,故其逆序数为 $n-1$;

……

$2(n-1)$前面比 $2(n-1)$大的数有 1 个,故其逆序数为 1;

因此,原排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，故原排列为偶排列.

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，故原排列为奇排列.

例 2 若排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为多少？

分析 由逆序数的定义计算

解 显然，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任两个不同的 x_i 与 x_j，必在排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中构成逆序，而且只能在一个中构成逆序. 因此，这两个排列的逆序数之和，即为从 n 个元素中任取两个不同元素的组合数 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. 但由于 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k.

故 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-k$.

例 3 在六阶行列式中，项

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65},\ a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$$

各带什么符号？

分析 对换项中元素的位置，使每项所对应的行标为自然顺序，然后计算列标所构成的排列的逆序数，若逆序数为偶数，则该项带正号；若逆序数为奇数，则该项带负号.

解 利用乘法交换律把所给的两项改写成

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 及 $a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$.

它们的列标所构成的排列分别为 431265 及 452316，其逆序数分别为 6 与 8，均为偶数，故所给两项均应带正号.

2. **行列式的计算**

计算行列式的关键在于根据所给行列式的特点，利用行列式的定义、性质，将行列式化为简单的形式或已知的行列式（如上

(下)三角形行列式、范德蒙行列式等)

下面归纳出计算行列式的常用方法.

(1)用定义计算

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

分析 根据行列式的定义,行列式展开后每项都是 n 个元素相乘,且这 n 个元素要位于不同的行与不同的列,因此此行列式只有一项不为零.

解 由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$ 这一项,而把这 n 个元素的行下标按自然顺序排列时,列下标的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$,这个排列的逆序数

$$\tau[(n-1)(n-2)\cdots 21n]=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

所以

$$D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

例 5 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0.$$

分析 5 阶行列式的一般项为$(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$,只要 j_3,j_4,j_5 中有一个为 1,2,3 时,对应项便为零,即该行列式每一

项均为零.

证明 这个行列式的元素满足:

$$a_{3j_3}=0,(\text{当 } j_3=1,2,3 \text{ 时}),$$

$$a_{4j_4}=0,(\text{当 } j_4=1,2,3 \text{ 时}),$$

$$a_{5j_5}=0,(\text{当 } j_5=1,2,3 \text{ 时}).$$

而 5 阶行列式的一般项为 $(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$,只要 j_3,j_4,j_5 中有一个为 1,2,3 时,对应项便为零. 又 j_3,j_4,j_5 应取 1,2,3,4,5 中各不相等的 3 个数,其中必有 1,2,3 中的某一个数,因此行列式的每一项必为零,即行列式为零.

(2)利用行列式的性质,化行列式为三角形行列式

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 4\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -2 & 3\\ 5 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

分析 为了避免分数运算,先从第二行提出公因子$\frac{1}{2}$,把行列式化成元素全是整数的行列式. 为了把行列式化为上三角行列式,需要把主对角线以下的元素全部变成零,首先把主对角线下方的第一列元素全化为零,为此先利用行列式的性质将第二行乘以(-1)加到第一行上去,将第一行第一列元素变为 1,再进行计算,或直接将第一行与第三行交换也可.

解

$$D\xlongequal[2r_2]{r_1\leftrightarrow r_3}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-5r_1}]{r_2-2r_1} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_4} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-4r_2]{r_3-2r_2} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & -35 & 31 \\ 0 & 0 & -69 & 59 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-2r_3} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & -35 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 & 31 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+35r_3} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -74 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times (-74) = -37.$$

(3)按行(列)展开计算

若行列式某行(列)有较多零元素时,可按该行(列)展开行列

式,从而得到低一阶的行列式或更简单的行列式.若行列式的行或列没有较多零元素,可以先利用行列式的性质,使得某一行或某一列变成只有一个非零元素,然后按行(列)展开.

例 7 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ -9 & 4 & -1 & -5 \\ 6 & 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

分析 因为第一行第二列的元素为 1,为此先将 1 下面的各元素化为零,然后按第二列展开.

解

$$D_4 \xlongequal[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-5r_1}]{r_2-3r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & -9 \\ -21 & 0 & -9 & -21 \\ -9 & 0 & -4 & -22 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & -4 & -9 \\ -21 & -9 & -21 \\ -9 & -4 & -22 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 21 & 9 & 21 \\ 9 & 4 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-2c_2]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 12 & 9 & 3 \\ 5 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-4c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & -39 & -9 \\ 5 & -16 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-39 & -9\\ -16 & 9\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}-55 & 0\\ -16 & 9\end{vmatrix}=(-55)\times 9=-495.$$

例 8 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}a & & & 1\\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a\end{vmatrix},$$

其中主对角线上元素都是 a,未写出的元素都是 0.

分析 由该行列式的结构可见,第一行有 $n-2$ 个元素全为零,故可按第一行展开.

解 按第一行展开

$$D_n=a\begin{vmatrix}a & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{vmatrix}_{(n-1)阶}$$

$$+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0 & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & a\end{vmatrix}_{(n-1)阶}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix}a & & \\ & \ddots & \\ & & a\end{vmatrix}_{(n-2)阶}$$

$$=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$$

注意 行列式总可以用按行(列)展开方法得到行列式的值.

(4)利用范德蒙行列式计算

有时行列式并不是范德蒙行列式,但可以用行列式的性质将