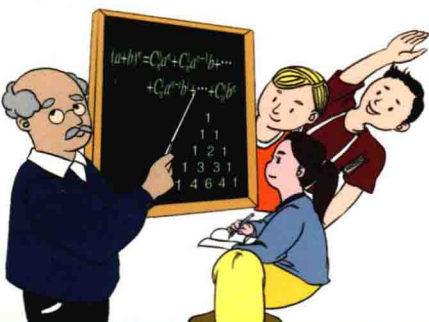




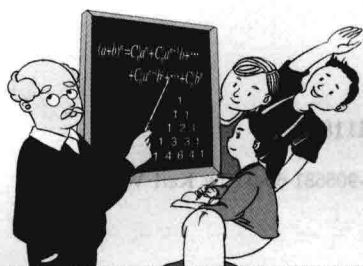
数林外传 系列

跟大学名师学中学数学

向量几何

◎ 卡尔·沃思(瑞士) 著
◎ 弗里兹·赛格里斯特(瑞士)
◎ 余生 译

中国科学技术大学出版社



数林外传 系列

跟大学名师学中学数学

All rights reserved.

向量几何

◎ 卡尔·沃思(瑞士)

著

◎ 弗里兹·赛格里斯特(瑞士)

◎ 余生 译



中国科学技术大学出版社

安徽省版权局著作权合同登记号:第 12121189 号

Vector Geometry, First Edition (ISBN 978-3-905681-68-0) by Karl Wirth, Fritz Siegerist.

All rights reserved.

This simplified Chinese edition for the People's Republic of China is published by arrangement with Karl Wirth.

© Karl Wirth & University of Science and Technology of China Press 2013

This book is in copyright. No reproduction of any part may take place without the written permission of Karl Wirth and University of Science and Technology of China Press.

This edition is for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong SAR, Macau SAR and Taiwan Province) only.

此版本仅限在中华人民共和国境内(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)销售。

图书在版编目(CIP)数据

向量几何/(瑞士)卡尔·沃思,(瑞士)弗里兹·赛格里斯特著;余生译. —合肥:中国科学技术大学出版社,2013.2

(数林外传系列:跟大学名师学中学数学)

ISBN 978-7-312-03139-7

I. ①向… II. ①卡… ②弗… ③余… III. 几何课—中学—教学参考资料 IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 276146 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

安徽省瑞隆印务有限公司

全国新华书店经销

*

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:4.5 字数:90 千

2013 年 2 月第 1 版 2013 年 2 月第 1 次印刷

定价:12.00 元

序

这次出版的是《向量几何》英文第 1 版,它相应于同名的德文原版.

非常感谢 Magdalena Fröhlich-Zbinden 仔细校阅英文稿. Barbara Flütsch 女士在网上公布了全部练习的解答(用德文给出,见 http://sos-mathe.ch/verz_v.html),在此向她致以诚挚的感谢.

本书内容

本书包含了通常在大学预科(德国九年制高中)的基础课中有关空间向量几何的内容,并追求下列理念:

——理论结构清晰.

——练习都附有解答,而且大部分解答有解题过程.

理论部分包括目录中列出的 7 章内容.理论试图迅速直达论题的核心,只限于讨论根本性内容.例如,理论部分没有论及平面的参数方程.

练习部分包括相应于理论部分各章的共 100 道练习题;另外还有面向全书内容的 27 道总练习题,其难度相当于期末考试;最后面还有一些附加练习题,它们涉及理论部分没有论述的问题,其中有上面提到的平面参数方程,还有球面方程和向量混合积等.

本书使用方法

除第 1 章外,理论部分的每一章中都留有一些待填的空

白(用实线标出或给出空白方框),目的是让读者在阅读时保持积极状态,通常从理论内容中很清楚地知道该填写什么. 填空内容的正确答案可查看最后面的附录 1.

从第 3 章起,每一章最后都附有一些练习. 这些练习一方面促使读者去翻查理论,另一方面则可以帮助读者熟悉在后面的练习部分中出现的一些练习. 因此这些练习都要仔细解答,其答案已在最后面的附录 2 中给出.

按照我的理解,这本书在很大程度上适用于任何一种教和学的方法.

卡尔·沃思

2011 年 4 月

目 次

序	(i)
---------	-------

理 论 部 分

1 引论	(3)
1.1 向量几何是什么?	(3)
1.2 历史(费马,笛卡儿)	(4)
2 向量	(9)
2.1 定义	(9)
2.2 基本运算	(10)
2.3 向量算术	(11)
2.4 共线向量、共面向量和基	(12)
3 坐标系中的向量和点	(14)
3.1 坐标系	(14)
3.2 向量的分量表示	(15)
3.3 分量计算	(16)
3.4 点的坐标表示	(19)
3.5 向量的基本问题	(21)
练习 1	(23)

4 标量积	(25)
4.1 定义	(25)
4.2 计算法则	(27)
4.3 分量表示	(29)
4.4 夹角公式	(30)
练习 2	(31)
5 向量积	(32)
5.1 定义	(32)
5.2 几何性质	(35)
5.3 面积公式	(37)
练习 3	(37)
6 直线方程	(39)
6.1 直线的参数方程	(39)
6.2 直线方程讨论(迹点)	(41)
6.3 两条直线的相互位置	(43)
6.4 点到直线的距离	(46)
练习 4	(46)
7 平面方程	(48)
7.1 平面的坐标方程	(48)
7.2 平面方程讨论(平行平面和迹)	(50)
7.3 平面在坐标系的特殊位置	(52)
7.4 直线与平面(倾角和交点)	(54)
7.5 两平面(交角和交线)	(56)

7.6 点到平面的距离	(58)
练习 5	(60)

练 习 部 分

8 各章练习题	(65)
9 总练习题	(102)
10 附加题	(120)
附录	(127)
附录 1 理论部分中填空内容	(127)
附录 2 理论部分中练习答案	(133)



理论部分

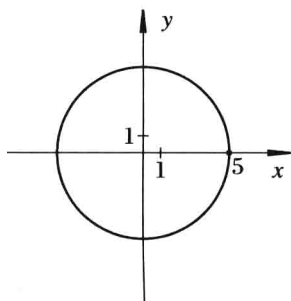
1 引 论

1.1 向量几何是什么？

向量几何的主要内容是几何状况的代数描述. 为此需要一个坐标系. 下面是平面几何中的两个例子:

例 1 圆周.

几何状况



代数状况

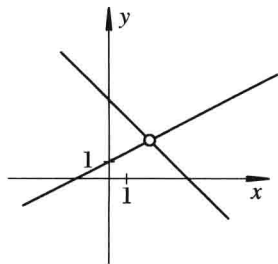
圆周的方程

$$x^2 + y^2 = 25.$$

(从毕达哥拉斯定理得到.)

例 2 两条直线的交点.

几何状况



代数状况

线性方程组

$$y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = -x + 4,$$

其解 $(2, 2)$ 是两直线交点的坐标.

通常把这种对几何状况的代数描述称为解析几何. 近代解析几何基于向量, 这就是**向量几何**名称的由来. 这本书主要讨论了 3 维的向量几何, 也就是说, 所有几何对象都设想在 3 维空间中.

向量几何的常用方法是要经常在代数和几何之间转换, 不要一味地埋头运算. 有时(用手或计算机勾画的)几何图形会很有帮助. 当然, 也没必要对每一步运算都去设想其相应的几何图像, 这样做往往会事与愿违.

这里所呈现的有关向量结构的一般形式在数学上称为**向量空间**. 这是大学“线性代数”课程的内容, 不仅数学专业和自然科学及工程技术专业的学生要学习这门课程, 有些社会科学专业的学生也要学习这门课程.

1.2 历史(费马, 笛卡儿)

几何概念在日常生活中不可或缺. 孩童总是想以一种有趣的方式去发现和弄明白他们所处环境中的几何方面的问题. 此处, “几何”(geometry)一词的原意是“大地测量”, 这也表明它和我们的实际生活密切相关.

因此, 几何方面的知识可以追溯到古埃及和古巴比伦时代就不足为怪了. 不过那时的知识还是经验性的, 几乎没有什么逻辑关联. 几何最先在古希腊成为一门真正的科学, 它通过欧几里得(公元前 300 年)写就的书——《原理》, 还有泰勒斯、毕达哥拉斯、阿基米德、阿波罗尼乌斯等人的著作传承下来. 后来印度人(大约 4 世纪)和阿拉伯人(9~13 世纪)发

展了几何知识,尤其在三角学方面.

近代初期,现代自然科学和技术的开创给予几何学决定性的推动力.这时彼埃尔·费马(Pierre Fermat, 1607~1665)在试图恢复希腊数学,特别是阿波罗尼乌斯的思想时,迈出了解析几何的第一步.费马分别用一次方程和二次方程来描述直线和圆锥曲线.对后世影响更大的是勒内·笛卡儿(René Descartes, 1596~1650)的工作.他引进了坐标,并用其代数地描述曲线和区域,还把微分学方法应用于几何.在他最重要的著作——《谈谈方法》中,有标题为“几何”的长达百页的附录,这个附录包含了笛卡儿关于解析几何的基本思想.在他身后得名的**笛卡儿坐标系**提供了建立几何和代数之间联系的新可能性.

笛卡儿坐标系的重要性在他去世几个世纪后才显现出来.在17世纪,代数的一些必需的高级方法已经失传,即使是留存下来的中世纪后期的一些代数知识,也要归功于意大利比萨的里奥纳多(Leonardo, 约1180~1250).他自喻是希腊、印度和阿拉伯数学间的中介.在笛卡儿的时代,已能用字符替代数字,也就是说,已知晓用字符做演算,这一点可以追溯到法国数学家韦达(F. Viète, 用拉丁字母拼写是 Vieta, 1540~1603).因此有时称韦达为代数之父.因为韦达把他的技巧称作“解析技艺(ars analytica)”,从而人们把它在几何上的应用说成是**解析几何**.

在1.1节中已经提到,向量概念在近代解析几何中扮演着重要角色.向量最早被卡尔·F·高斯(1777~1855)用来

表示复数.与此同时,在 19 世纪中叶,W·哈密顿和 H·格拉斯曼更详细地阐明了其他数学家几乎毫无认识的关于向量的知识.随后几十年中,只有物理学家使用向量,并发展了向量运算,不过在物理学家中也不乏反对者,如开尔文勋爵在 19 世纪末仍说,完全可以对向量概念置之不理.现今向量在不同的数学领域,同样也在物理和其他科学中非常重要.用向量来阐述的解析几何尤其清晰优美.解析几何在费马和笛卡儿之后的发展(在 20 世纪前没有用向量)与自然科学和技术以及很多数学领域的快速进步密切相关.要是没有近 300 年来这些领域的进步,无法设想会有近代文明的大部分成就.

我们用费马和笛卡儿的简短传记来结束这段历史概述.这两位学者在个性、家世、职业、科学意向和生活方式上迥然不同,但在一件事上相同:两位学者对解析几何的发展都作出了决定性的贡献.

费马



彼埃尔·费马 1607 年 8 月 20 日出生于法国图卢兹,是当地一位富有的皮革商的长子.人们对他的求学经历所知甚少.但他一定接受过极好的教育.因为他精通古文字和多种主要的欧洲语言,甚至能用拉丁文和西班牙文写诗.

费马学过法律,后来成为图卢兹的律师以及议会参议员.退休后他在当地平静地生活,很少离开.费马是一位自学的业余数学家,但他与当时的很多数学家有通信

联系,他的部分研究成果就保存在这些信件中.他的另外一些工作在他去世后由他的长子整理出版.他自己的出版物极其罕见.

尽管费马是一位业余数学家,却是他所处时代最有成就的数学家之一.除了对解析几何的诸多贡献外,费马在微分学,尤其在数论上取得了辉煌成就.他明确表述了著名的猜想,即方程

$$a^n + b^n = c^n$$

当 $n > 2$ 时没有自然数 a, b, c 的解.几代数学家和大量业余爱好者试图证明或证否这个猜想.直到 20 世纪末的 1994 年,英国数学家安德列·怀尔斯在他的同事理查德·泰勒的帮助下才成功地证明了这个“费马定理”.证明的工程浩大,运用了不少艰深的数学理论,以致最后的完全证明只有专家才能理解并研究.

费马于 1665 年 1 月 12 日在图卢兹附近的加斯特尔逝世.

笛卡儿

勒内·笛卡儿 1596 年 3 月 31 日出生于法国土伦省莱尔市的一个贵族家庭.他从小在耶稣会经办的拉夫赖公学受教育,该校校长注意到这位被监护人的天资(如早晨笛卡儿可以在自修室里思考他感兴趣的问题),并给予很多特殊照顾.



笛卡儿在 17 岁时离开这所学校,独自去巴黎学习法律,

但他很快就认识到,人文研究不能引导他发现事物的本质.这时正好三十年战争爆发,他自愿从军,几年后离开.随后他遍历欧洲中部诸国以及意大利.

最后他回到法国,开始全身心投入研究哲学、物理学和数学.随后他移民到荷兰,并经常更换住处.他的著作《谈谈方法》在莱顿出版.他还钻研过化学、医学(解剖学、胚胎学)、天文学和气象学.他结识专业圈子的杰出学者.他和费马曾经就 n 次方程的求解问题进行过辩论.

1649 年笛卡儿应瑞典女王克里斯蒂娜邀请访问瑞典,不久即于 1650 年 2 月 11 日因肺炎在斯德哥尔摩病故.

2 向 量

2.1 定义

我们假定“向量”一词已在平面几何中讨论平移时,或者在物理中介绍过.通常在介绍向量时,还会提到一个向量的模(或长度、大小),向量的加法、减法以及向量与数的乘法.不过现在与平面几何不同的是,所有事情都发生在3维空间.

空间的一个直线段,当规定其两个端点中的一个为始点,另一个为终点之后,这个线段就称为一个矢.

定义 2.1 具有同样长度和方向的矢的集合称为一个向量.单独一个矢称为向量的一个代表.记为:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \boldsymbol{v} = \dots$$

图 2.1 中的矢代表同一向量,因此用等号“=”相连接.如果不想表明一个矢的始点和终点,可以记为像 $\boldsymbol{v}$ 这样的黑斜体小写字母.

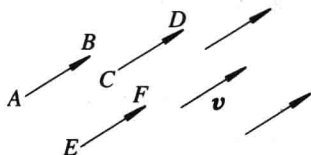


图 2.1