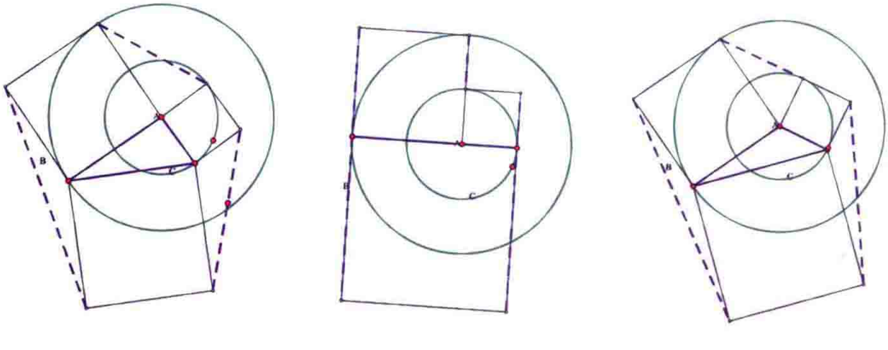
数学课堂教学艺术

傅世球 著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

数学课堂教学艺术

傅世球　著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是作者50年教学实践和教学研究成果的结晶。作者酷爱数学课堂教学艺术，并几十年如一日地进行教学艺术实践和研究，获得了一系列成果和荣誉。在数学教学艺术方面，先后著述、出版发表20多部专著和100多篇论文。

全书共五章：数学课堂教学的艺术；课堂教学中的审美教育与数学美；形式逻辑在数学教学中的应用；课堂中的解题教学；数学教学、学习方法与数学观。每章末设有针对性思考题。本书列举了设计提问、构造类比、运用幽默艺术、设计动画等方面的大量教学实例，用以启发读者。

本著作适合作为师范大学、师范学院、师专类数学与应用数学专业学生实习前的必修教材，也可作为广大高初中数学教师、教研员、大学数学教育学教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学课堂教学艺术 / 傅世球著. —北京：中国铁道出版社，2013.8

ISBN 978-7-113-16724-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①傅… Ⅲ.①中学数学课—课堂教学—教学研究 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第171162号

书　　名：数学课堂教学艺术
作　　者：傅世球　著

策　　划：李小军　　**读者热线：**400-668-0820
责任编辑：李小军　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市华丰印刷厂
版　　次：2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　**印张：**14.5　**字数：**284千
书　　号：ISBN 978-7-113-16724-0
定　　价：28.00元

序

张奠基（华东师范大学数学教育研究所）

我和傅世球先生相识，已有近20个年头了。那是在1994年初的郴州，我和傅先生都参加了一个学术年会，相谈甚欢。临别时，傅先生将他的一本著作送我，标题是《中学数学教学的艺术》，湖南教育出版社1989年版。我对傅先生把数学教学当做一种艺术加以追求，甚为感佩。在今天看来，此书的印刷质量颇为简陋，但是我一直珍藏着。

2012年，我写《数学教育的中国道路》一书，把课堂教学的"导入"，作为中国数学教育的五项特征之一。数学教学的"导入"环节，虽然原出于苏联凯洛夫的《教育学》，但是已经为中国数学教师广泛接受和普遍运用，有了重大的发展。在数学课堂设计中，为了给学生要掌握的教学内容做好铺垫，现在从欧美借鉴来的流行术语是创设情境，其实"导入"比"创设情境"的含义更广泛，运用也更灵活。这时我想起傅先生那本著作中的第一章是"课堂教学艺术"，其中的第二节便是"引入的艺术"。找出原书再读，看到其中提到的用于数学课堂教学的"引入"方式非常多，至少有类比引入、计算引入、对比引入、观察引入、推理引入、作图引入、提问引入、实验引入、联系引入等多种引入方法，琳琅满目。这些"引入"艺术，源于我国一线教师多年来的课堂教学实践，傅先生加以总结，在1989年集中推出。以我所见，这是我国研究"导入"教学环节较早的作品之一。

近20年之后的今天，我和傅先生都已退休，但是我们都在忙碌着。现在的傅先生仍在上课，并将早年的《中学数学教学的艺术》根据新的形势改写为本书，继续他的数学教学艺术的研究。

傅先生这一代人，阅历不凡。他们受小学教育于建国前，以后经历了学习苏联的时期，又亲历了1958年"大跃进"中的教育革命。接着是20世纪60年代初的恢复调整，不久则受到"文化大革命"影响。20世纪80年代改革开放以后，全方位地受到欧美数学教育的影响。进入21世纪以来，亲见课程改革的汹涌大潮，冲击着许多旧有的数学教育观念，并在争论中不断前进。几经反复，经验可贵，教训深刻。试想，有如此复杂经历，见识和实践过国内外如此不同的数学教育理念，难道不是一种宝贵的财富吗？尤其是像傅先生这样，在中学里教过书，在师范院校做

过研究，在地方上发挥着数学教学上的领导作用，兼具实践经验和理论思考，他们将不同经历中的思考记录下来，融入自己的认识，形成学术形态，可谓是一个时代的数学教育记录。

在傅先生新著出版之际，感谢他的早年著作对我的启发，也祝他不断取得新的成就。

谨以上述感想，权作为序。

2013 初春

前　言

本书是继《中学数学教学的艺术》《数学教学艺术导论》《数学解题激活策略》之后的又一部专著，是著者50年教学实践和教学研究成果的结晶。与前几部著作相比，本著作精华内容更多，科学性更强，艺术性更高。

本书主要内容如下：

第1章论述了课堂教学艺术中数学教师的语言艺术，设计提问的艺术，演示教具、使用几何画板的艺术，以及如何突出重点、如何板书、如何在数学课堂教学中充满人文氛围、如何使用比喻激发学生兴趣等。

第2章是课堂教学中的审美教育与数学美。论述了什么是审美、数学美。通过解题与开放性教学看和谐美、对称美、思维美、方法美、简洁美、奇异美、策略美，这一切的数学美都是通过教学美来实现的。

第3章讲概念、判断、推理、证明、反驳等思维形式和形式逻辑的思维规律：同一律、排中律、矛盾律与充足理由律等，都是形式逻辑在数学课堂教学中的应用。其中，类比是笔者在课堂教学中始终坚持的，离开类比就像鱼离开水一样。在这一章中有很多看点：如"三点定形法"和用类比添加辅助线的激活策略，以及几何题的开放性看等价替换等。

第4章是课堂中的解题教学。在这一章中有很多看点：其一是数学题的隐含条件的挖掘，它是解难题的放松策略；其二是"先猜后证在数学课堂教学中的应用""均值不等式求最值的五个误区"，从而提高在解题中的警惕性；其三是一个重要公式的多种证法及广泛应用，学会洞察相似之中的论证；其四是备课中如何设计题组，以提高教学质量。

第5章讲数学教学方法和学生的学习方法。尤其是"学习困难分析法"，还有数学教师要明确的"启发数学思维的教学艺术"及朱世杰恒等式在教学中的应用。让读者看到如何"古为今用""洋为中用""推陈出新"等学习方法。笔者预料，数学教学法研究若与几何画板、几何动画相结合，则会"如虎添翼"。

本著作适合作为师范大学、师范学院、师专类数学与应用数学专业学生实习前的必修教材，也可作为广大高初中数学教师、教研员、大学数学教育学教师的教学参考书。

著　者

2013年6月

目　　录

第1章 数学课堂教学的艺术

“教数学,要以思想性为准则,以科学性为基础,以趣味性为前提,以艺术性为追求”是课堂教学的名言。

课堂教学艺术应该是数学教师的基本功,也是数学教师经验的积累和教学方法的升华,还是教学共性与个性的有机结合,更是教学规律性与教师独创性的完满结合,又是选择与协调的艺术,最后还是求真求实的和谐统一。

数学课堂教学中要重视语言、导入、设问、演示教具、引导学生观察、板书、突出重点等的重要性,要对学生理解的基础、理解的关键、理解的重要方法、理解的衡量标准、理解的定义、初步理解、深刻理解、完整理解进行关注。教数学如同医生开药治病,把人治疗得怎么样都不关心,这样的医生要受罚,这样的数学教师难道不要自责吗? 数学教育学的研究要与几何画板、几何动画结合起来,即数学教育学的教师学几何动画,而几何动画教师学教学法,知识才会更全面、更直观。

为了提高教学效率,还必须在数学课堂上充满人文气息,运用幽默、引进类比、适当比喻等,以便激发学生兴趣,从而让学生理解概念,运用定理在教学设计幽默的引发喜悦、带来欢乐的一笑之中。

§1.1 数学教师的语言艺术

课堂教学的艺术,既是激发学生学习兴趣的有效方法,又是提高教学质量的手段之一。好的课堂教学,不仅目的明确、重点突出、容易理解,而且会给予学生一种舒适、和谐、愉快和美的感受,它能够激发学生思维的积极性和主动性,同时能够使学生很好地观察、想象,使学生始终保持不疲乏地学习.无论从数学教学的实际需要还是从教育心理学的要求出发,课堂教学艺术都具有很重要的意义,不能忽视.但是,也应该注意,课堂教学艺术只是一种手段,而非目的,虽不应忽视这种艺术,也不能醉心于这种艺术。

本节研究数学教学中的语言艺术、引入的艺术、设问的艺术、板书的艺术以及如何演示教具和引导观赏。马克思说:“语言是思维的直接现实。”人们都有自己的语言,都会说话,但要把话说好,却很不容易。例如,真命题:在 a,b 为非 1 正数的条件下,

“$\log_a b \cdot \log_b a = 1$”，既可以叙述成“$a$ 为底 b 的对数与 b 为底 a 的对数之乘积等于 1。”又可叙述为“其底数与真数互换位置所得的两个对数互为倒数。”由此可见，与其他教师的语言比较起来，数学教师的语言有更高的要求，研究语言艺术是数学教学的重要课题。

关于语言、说话，毛泽东同志在十大教授法中提出：说话要通俗化，说话要明白，说话要有趣味，以姿势助说话。

说话通俗化：就是要考虑到学生的知识水平和年龄特征，避免讲过分深奥的话。如实习中经常听到年轻的实习生对初一学生讲：“你这样的计算缺乏理论根据。正数与负数是互相排斥的。”“我们来探讨这个方程的解法。”对于这样的语言、术语，学生不易领会，关键在于这些术语不够通俗化。

说话要明白：指语言要清晰、准确、有条理、逻辑性强。为了把话说明白，既要求说话的速度快慢得当，又要求声调要有轻重缓急，更要求语言有节奏感，抑扬顿挫，这样的语言才有感染力。例如，数学教师不能将“非负数”与“正数”、“除”与“除以”混为一谈。数量关系的表达要贴切，把 $(x^3)^2 - y^2$ 叙述成“x 的立方的平方与 y 平方的平方差”就错了，而应该叙述成“x 的立方与 y 的平方差”。甚至于有时只是一字之差，但意义完全不同，如把“$2x^2$”说成“$2x$ 的平方”，或者将 $(2x)^2$ 说成是“$2x$ 平方”。这种只有一字之差的还有 $\lg a^2$ 与 $\lg^2 a$，$\sin^2 a$ 与 $\sin a^2$，$\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ 与 $(\sqrt{\cos x})^2 = \cos x$ $(\cos x \geqslant 0)$ 等。这种易混淆的表述，一定要说明白，可以从念法、写法、条件以及运算顺序上加以区别。有时，连语气和停顿，也会使数量关系在理解上产生错误。例如，“$x + \frac{1}{x}$”应该读成“x　加 x 分之一”，即在 x 后稍作停顿。若在后面那个 x 之后停顿，读成“x 加 x　分之一”就变成了“$\frac{1}{x+x}$”。事实上，“$x + \frac{1}{x}$”应表述为“x 与它的倒数之和”。对称轴与轴对称，立方和与和的立方，解方程与方程的解，方程的解与不等式的解都是不同的概念，不要混淆。事实上，用对比的念法、写法、读法可以区分“-2^2”与“$(-2)^2$”，前者念成“2 的平方的相反数”，后者念成“负 2 的平方”，由于二者运算顺序不同，因此二者运算结果也不同。

说话要有趣味：指教师的语言必须生动、形象、诙谐、风趣，使学生听课感到情绪高涨，轻松愉快，能够吸引学生的注意力，调动学生的积极性。同一意义，用不同的语言叙述，其趣味性大不相同。例如，在教导学生注意学习方法时，可以说：“你们学习要注意消化、理解呀！”也可以换个说法：“学而不思则罔，思而不学则殆。”更可以换个说法：“学习如同吃饭，如果出来的仍是饭，一点养分都没有吸收，其人不免要死；如果吃下去连渣滓也排不出来，好的坏的都积在里边，其人也不会活。”大家可以自行分辨，看哪种说法更有趣味性。

以姿势助说话：这是为了增强教师语言的直观性。正确运用姿势，可以增强说话的表现力和感染力。配合讲话的意思，表示出相应的举动和手势，甚至于目光的转动，面部表情的变化，运用得当都能起到辅助语言的作用。例如，讲述蜘蛛从高处落下时，以姿势助说话，用对比。

语言是教师进行教学的武器，也是组织学生学习的工具。有些教师的语言准确、鲜明、生动，富有启发性与教育性，如同磁铁一样吸引着学生，这种语言正如一个谜语所说的："它不是蜜，却要粘住一切。"相反，有些教师的语言啰嗦重复，含混不清，模棱两可，拖泥带水，语病丛生，贫乏无力，词不达意，离题过远，很容易使学生昏昏欲睡；有些教师的讲课快得像机关枪连发射击，学生毫无思考的余地，往往收效甚微。一个数学教师的语言，除了以上谈的四个方面的要求之外，还要有它的特点，这就是：

1.1.1　准确性与精炼性

"准确性"是指确切地使用概念，科学地作出判断，合乎逻辑地进行推理。这些是就思维的形式来说的。

数学教师在讲课的过程中，决不能出现含混不清的概念，模棱两可的判断，自相矛盾的推理。例如，在代数中，"两数和的平方"与"两数的平方和"，"某数大于零"与"某数不小于零"，就是不同的概念，不能把这两个概念弄得含混不清。概念模糊会导致判断的模棱两可，还会出现推理的自相矛盾。例如，有人做这样的三段论推理：

大前提：自然数中没有最大数；

小前提：9 是最大数字；

结论：所以 9 不是自然数。

这是将"数"与"数字"两者混淆不清，违背同一律，偷换了概念而造成的。

精炼性是指简洁清楚、干净利索。例如，有的数学教师讲充分条件、必要条件、充分必要条件时，由于自己没有掌握这些概念的实质，又加之语病丛生，啰嗦半天也说不清楚什么是充分条件、必要条件和充分必要条件。用《墨经》上的"有之必然，无之必不然"来解释是最精炼的："有之必然"的那种条件是充分条件，"无之必不然"的那种条件是必要条件，而"有之必然，且无之必不然"的那种条件是充分必要条件。例如，"两三角形全等是它们等积的充分条件"，"有之必然"，有两个三角形全等，必然有它们等积。"两个三角形等积是它们全等的必要条件"。"无之必不然"，无两个三角形等积，这两个三角形必然不全等。"两个三角形的三边对应相等是这两个三角形全等的充分必要条件"。"有之必然，且无之必不然"，有两个三角形的三边对应相等，必然有这两个三角形全等，且无两个三角形的三边对应相等，则无两个三角形全等。

余弦的倍角公式可叙述成"角的余弦与角的正弦的平方差"($\cos 2x=\cos^2 x-$

$\sin^2 x)$，$\cos^4 x-\sin^4 x$ 用语言信息叙述成什么呢？

例 1 把 $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x$ 分解因式。

符号信息翻译成语言信息，既可以是"把关于 $\sin x$ 的二次三项式的降幂排列分解因式"，也可以是"把关于 $\cos x$ 的二次三项式的升幂排列分解因式"。两种不同的语言信息叙述导致两种不同的解题思维的方法，说明高超的数学语言艺术可以把训练学生的语言与训练学生的数学思维紧密地结合起来。训练学生的语言本身就是非常困难之事，而训练学生的数学思维则更为困难。要双管齐下地训练学生的数学语言与训练学生的数学思维，必须以观察、分析、推敲为基础，以抓住数量关系（空间形式）的本质特征的抽象、概括为关键，以抓住事物的本质联系作为数学思维的衡量标准。

"无疑处有疑方是一种进步。"例如，要求学生将符号信息

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\Rightarrow\cos(3\alpha+3\beta+3\gamma)=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

转化为语言信息时，中等偏下的学生就有"无疑处有疑"的感觉。通过优等生回答、中等偏下的学生思考、提醒差生注意听才得出："三个角 α、β、γ 的正弦之和与这三个角的余弦之和均为零的条件下证明这三个角 α、β、γ 分别 3 倍再求和的角的余弦等于这三个角的和的余弦之 3 倍。"

为了训练语言的准确性与精炼性，教师专门设计了如下的、合情推理的思维模式要学生转化为语言信息：

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{A}_3^2=3\times 2\\ \mathrm{A}_5^3=5\times 4\times 3\\ \cdots\cdots\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)。$$

这也是"无疑处有疑"，学生回答是："最大自然数是 n 的、连续的、m 个自然数的连乘积。"这也是把训练学生的语言与训练学生的数学思维双管齐下进行到底的措施。

例 2 求 $(x^2+2x+1)^3$ 的展开式的常数项。

为了启发学生的数学思维，可设计问题串：

① 观察本题的数量关系，是求二项式的展开式吗？

② 如何将三项式的展开式转化成二项式的展开式？

③ 括号内的关于 x 的二次三项式如何转化成 x 的二项式的展开式？

④ 又将转化成二项式的几次方？

⑤ 用什么公式求 $(x+1)^6$ 的常数项？

⑥ 最后结果是什么？

例如，在 $(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中 x 的系数为（　　）。　（1992 年全国高考题）

A. 160　　B. 240　　C. 360　　D. 800

（分别用转化策略、两次转化策略、分解策略、组合策略四种方法；并注意数学语言

和数学思维双管齐下。）

将语言信息与符号信息进行互相转化，是学生理解概念、掌握知识、实现将问题系统向稳定系统转化的关键。例如，语言信息“a,b,c 三数中至少有两个数相等”。转化为符号信息是“$(a-b)(b-c)(c-a)=0$”。类比到语言信息“a,b,c 三数中至少有两个数互为相反数”，转化为符号信息是“$(a+b)(b+c)(c+a)=0$”。

请看例 3。

例 3　如果三个数的倒数和与这三个数的和的倒数相等，那么这三个数必有两个数互为相反数。

分析：语言信息“如果三个数的倒数和与这三个数的和的倒数相等”转化成符号信息是“$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$”。而结论也要将语言信息“这三个数必有两个数互为相反数”转化为符号信息“$(a+b)(b+c)(c+a)=0$”。分清已知与求证是目的性解题原则所必需的。

证明 1：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}$；

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{c-a-b-c}{c(a+b+c)}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}=\frac{a+b}{-c(a+b+c)}$$

$\Rightarrow ab=-c(a+b+c)$ 或 $a+b=0$

$\Rightarrow ab+ca+cb+c^2=0$ 或 $a+b=0$

$\Rightarrow(a+c)(b+c)=0$ 或 $a+b=0$ 从而

$\Rightarrow(a+b)(b+c)(a+c)=0$。

所以，这三个数必有两个数互为相反数。

这里用到“若一个比例式的分子相等，则推出其分母也相等”，又用分类讨论得出严谨推理。

证明 2：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

$$\Rightarrow\frac{bc+ab+ac}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$\Rightarrow(a+b+c)(bc+ab+ac)=abc$

$\Rightarrow(a+b)(ab+bc+ca)+cab+bc^2+ac^2=abc$

$\Rightarrow(a+b)(ab+bc+ca)+c^2(a+b)=0$

$\Rightarrow(a+b)(ab+bc+ca+c^2)=0$

$\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$。

所以，这三个数必有两个数互为相反数。

例 4　已知 $x+y+z=3$，且 $(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$，求证 x,y,z 中至少

有一个等于1。

分析：有公式 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)$。

令 $X=(x-1)$，$Y=y-1$，$Z=z-1$，代入上式之中有

$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)=(x+y+z-3)[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1)-(x-1)(z-1)]$。

又因 $x+y+z=3$，所以 $x+y+z-3=0$，推出

$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)=0$

$\Rightarrow 3(x-1)(y-1)(z-1)=0$。

所以 x,y,z 中至少有一个等于1。

为方便中学生，特列表如表1-1所示，以便于理解、记忆、类比、举一反三和思考。从表中可以看出各种语言信息与符号信息的互化和比较。

表1-1

语言信息	符号信息
①a,b,c 至少有一个为0	①$abc=0$
②a,b,c 至少有一个为1	②$(a-1)(b-1)(c-1)=0$
③a,b,c 至少有一个为2	③$(a-2)(b-2)(c-2)=0$
④a,b,c 至少有两个相等	④$(a-b)(b-c)(c-a)=0$
⑤a,b,c 至少有两个互为相反数	⑤$(a+b)(b+c)(c+a)=0$
⑥a,b,c 都相等	⑥$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
⑦a,b,c 都为0	⑦$a^2+b^2+c^2=0$

为了使学生举一反三，再举几个语言信息与符号信息互化和比较的例子：

⑧$a,b\in \mathbf{R}_+ \Leftrightarrow a+b>0$ 且 $ab>0$；

⑨$a,b\in \mathbf{R}_- \Leftrightarrow a+b<0$ 且 $ab>0$；

⑩$ab+bc+cd+da$ 与 $ab+cd-da-bc$ 中至少有一个为零$\Leftrightarrow(ab+bc+cd+da)(ab+cd-da-bc)=0$。

“a,b,c 都为1”的语言信息如何转化为符号信息呢？

根据⑦，它的符号信息是“$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$”。

语言的准确性与精炼性是对立统一的。准确性是基础，精炼性是目的。

1.1.2 明确性和生动性

明确性是指语言必须确切、明白，生动性是指语言必须活泼、有趣味、富于启发性。例如，讲反证法，要用排中律，“或者是甲，或者是非甲，二者必居其一”。要证明某同学