数学分析解题思想研究

SHUXUEFENXIJIETISIXIANGYANJIU

李友爱　刘　梅　傅莺莺　李　阳　梁登峰　编著

原子能出版社

数学分析解题思想研究

李友爱 刘 梅 傅莺莺
李 阳 梁登峰
编著

原子能出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析解题思想研究/李友爱等编著. —北京：原子能出版社，2009.9

ISBN 978-7-5022-4702-7

Ⅰ. 数… Ⅱ. 李… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 169719 号

数学分析解题思想研究

总 编 辑 杨树录
责任编辑 张 梅 侯茸方
责任校对 冯莲凤
责任印制 丁怀兰 潘玉玲
印　　刷 中国文联印刷厂
出版发行 原子能出版社（北京市海淀区阜成路 43 号 100048）
经　　销 全国新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 27.5　　**字　　数** 800 千字
版　　次 2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5022-4702-7　　**定　　价** **68.00** 元

网址：http：//www.aep.com.cn　**E-mail：atomep123@126.com**
发行电话：010-68452845

前　　言

数学分析是高等学校数学专业重要的专业基础课，它对后续课程的学习起着至关重要的作用。本书是与华东师范大学数学系编写的《数学分析》（第三版）（高等教育出版社）相配套的参考书，全书共分 16 章。每一节含有内容提要、基本要求、例题分析、解题示范、课堂练习题及课外作业题等六部分。

本书内容丰富，分析透彻，对教师的教学与学生的学习具有一定的指导作用。

本书由曹显兵教授主审。章节编写情况如下：多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、曲面积分由李友爱编写；不定积分、定积分及其应用、反常积分、含参量积分由刘梅编写；无穷级数、重积分及其应用由傅莺莺编写；导数与微分、微分中值定理及其应用、实数的完备性、曲线积分由李阳编写；实数集与函数、数列的极限与函数的极限、函数的连续性由梁登峰编写。

本书的出版得到了北京市属高校科技创新平台项目（201098）资助。

在本书的出版过程中，曹显兵教授给予了大力支持，同时也得到了北京工商大学及原子能出版社的支持与帮助，在此对他们表示衷心的感谢。在本书的编写过程中，参阅了一些数学分析方面的资料书及网上资料，在此对作者们表示诚挚的谢意。

由于经验与学识有限，本书的错误之处在所难免，望同行和读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目 录

第一章　实数集与函数

1.1　实　　数

一、内容提要

1. 实数由有理数和无理数组成.

2. 有理数可用分数形式$\dfrac{p}{q}$（p、q 为整数，$q\neq0$）表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示.

3. 无理数：无限十进不循环小数.

4. 实数的主要性质：

（1）封闭性：实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的.

（2）有序性：任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$.

（3）传递性：若$a>b$，$b<c$，则$a>c$.

（4）阿基米德性：对任何$a,b,\in\mathbf{R}$，若$b>a>0$，则存在正整数 n，使得$na>b$.

（5）稠密性：任何两个实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

（6）实数集与数轴上的点有着一一对应关系.

5. 绝对值的定义：$|a|=\begin{cases}a,a\geqslant0,\\-a,a<0.\end{cases}$

绝对值的几何意义：从数轴上看，数 a 的绝对值$|a|$就是点 a 到原点的距离. 与此相应，$|x-a|$就是数轴上点 x 与点 a 之间的距离.

绝对值的性质：

（1）$|a|=|-a|\geqslant0$；当且仅当$a=0$时有$|a|=0$.

（2）$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

（3）$|a|<h\Leftrightarrow-h<a<h$；$|a|\leqslant h\Leftrightarrow-h\leqslant a\leqslant h(h>0)$.

（4）对任何$a,b,\in\mathbf{R}$有如下的三角不等式：

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

（5）$|ab|=|a||b|$.

（6）$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq0)$.

二、基本要求

掌握实数的概念及基本性质；理解并熟练运用实数的有序性、稠密性和封闭性； 牢记并熟练运用实数绝对值的有关性质以及几个常见的不等式（它们是分析论证的重要工具）.

三、例题分析

例 1 设 p 为正整数，证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

分析：证明一个数是无理数，可用反证法．假设为有理数，再依据有理数的分数定义（任何一个有理数都能唯一表示成一个不可约分数），得到矛盾.

证 因为 p 不是完全平方数，从而 p 的质因数中至少有一个其指数是奇数，不妨设为 q，即 $p=q^{2k+1}p_1$.

其中 q 为质数，p_1 为整数且 q 不能整除 p_1，$k\geqslant 0$ 为整数.

假设 $\sqrt{p}$ 为有理数 $\dfrac{u}{v}$，此处 u 和 v 没有公约数，则

$$q^{2k+1}p_1v^2=u^2.$$

从而 q 能整除 u，可设 $u=q^{k_1}u_1$，其中 q 与 u_1 互质，则

$$p_1v^2=q^{2k_1-2k-1}u_1^2,$$

而 $2k_1-2k-1>0$，且 $2k_1-2k-1$ 为奇数，则 $2k_1-2k-1\geqslant 1$.

故 q 能整除 p_1v^2，而 q 与 p_1 互质，所以 q 能整除 v，即 q 是 u 与 v 的公约数，这与 u,v 互质相矛盾，所以 $\sqrt{p}$ 是无理数.

例 2 （算术平均值–几何平均值不等式）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个非负实数，则成立不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt{a_1a_2\cdots a_n},$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证 一开始可以看出，如果在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中出现 0，则不等式已经成立．又可以看出，这时等号成立的充分必要条件是其中每个数为 0．因此下面只要对 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不为 0 的情况进行证明就够了.

应用数学归纳法．在 $n=1$ 时结论是平凡的．在 $n=2$ 时结论是中学数学已包含的内容．现设 $n=k$ 时不等式成立，然后讨论 $n=k+1$，将 $k+1$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 的算术平均值分解如下：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{k(k+1)}.$$

然后将上式右边的两项分别记为 A 和 B．这时条件 $A>0$，$A+B>0$ 满足，因而就可以作以下运算

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}\\&=(A+B)^{k+1}\geqslant A^{k+1}+(k+1)A^kB\\&=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\cdot a_{k+1}\\&\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}.\end{aligned}$$

在不等式中等号成立的条件也可用数学归纳法得到．在 $n=1$ 时已成立．设在 $n=k$ 时结论

为真，则在$n=k+1$时也可从上述推导看出等号成立的条件是

$ka_{k+1}=a_1+a_2+\cdots+a_k$和$a_1=a_2=\cdots=a_k$也就是$a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$.

注　几何平均值–调和平均值不等式：若$a_k>0,k=1,2,\cdots,n,$，则有

$$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$$

该不等式可直接由算术平均值–几何平均值不等式得到.

例 3　**（Bernoulli 不等式）**设$h>-1,n\in\mathbf{N}_+$，则有不等式

$$(1+h)^n\geqslant1+nh,$$

其中当$n>1$时等号成立的充分必要条件是$h=0$.

证　由于$n>1$或$h=0$时不等式明显成立（且其中等号均成立），以下只需讨论$n>1$且$h\neq0$的情况.

将$(1+h)^n-1$作因式分解，就可以得到

$$(1+h)^n-1=h[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}].$$

当$h>0$时，在右边方括号内从第二项起每项都大于1，因此就有$(1+h)^n>1+nh$．当$-1<h<0$时右边方括号内从第二项起每项都小于 1，因此方括号中表达式之和小于 n. 由于$h<0$，因此又得到$(1+h)^n-1>nh$.

注 1　令$h=A/B$，$A+B>0$，则条件$1+h>0$成立．将这个h代入 Bernoulli 不等式中，就可以得到 Bernoulli 不等式的双参数形式如下：

设有$A>0$，$A+B>0$，$n\in\mathbf{N}_+$，则成立不等式$(A+B)^n\geqslant A^n+nA^{n-1}B$，而且当$n>1$时其中等号成立的充分必要条件是$B=0$.

注 2　当$h\geqslant0$时不等式$(1+h)^n\geqslant\dfrac{n(n-1)h^2}{2}$成立．它的证明可直接由二项式定理展开得到，同样当$h\geqslant0$时不等式$(1+h)^n\geqslant\dfrac{n(n-1)(n-2)h^3}{3!}$也成立.

四、解题示范

例 4　设$a,b\in\mathbf{R}$，证明：若对任何正数ε，有$|a-b|<\varepsilon$，则$a=b$.

证　用反证法. 假设$a\neq b$，则

$|a-b|=c>0$．取$\varepsilon_0=\dfrac{c}{3}>0$，由题设知

$|a-b|<\dfrac{c}{3}$，从而$c<\dfrac{c}{3}$，即$c<0$，矛盾，所以$a=b$.

例 5　$|2x-1|<|x-1|$.

解　两边平方，即得

$$(2x-1)^2<(x-1)^2\text{，即}3x^2-2x<0\text{，}$$

解之，得

$$0<x<\frac{2}{3}.$$

例 6 $|x+3|+|x-3|\leqslant 12.$

解 令 $x-3=t$，则得

$$|t+6|+|t|\leqslant 12 \text{ 或 } |t+6|\leqslant 12-|t|.$$

两边平方，即有

$$t^2+12t+36\leqslant 144-24|t|+t^2\text{，即 } 2|t|\leqslant 9-t\text{，}$$

将上式两端再平方，化简整理得

$$t^2+6t-27\leqslant 0\text{，}$$

解之，得 $-9\leqslant t\leqslant 3$ 即 $-9\leqslant x-3\leqslant 3$，
也即 $-6\leqslant x\leqslant 6$ 或 $|x|\leqslant 6$.

五、课堂练习题

1. 证明：$\sqrt{2}$ 不是有理数.

证 用反证法来证.

假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，则它一定可写成既约分数的形式，即

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

其中 p,q 是两个没有公约数的正整数，因此

$$2=\frac{p^2}{q^2} \text{ 即 } p^2=2q^2$$

因为上式右边是偶数，所以 p 不可能是奇数，因此可设 $p=2r$，此处 r 也为一正整数．代入上式，得

$$4r^2=2q^2 \text{ 即 } q^2=2r^2 .$$

由此，q 也必是一偶数．与前面所述的 p,q 没有公约数发生矛盾．可见，$\sqrt{2}$ 不是有理数.

2. 证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\text{当} n>1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$，所以不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$，有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\text{（}k=1,2,\cdots\text{）},$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$，不等式也成立.

于是，对于任何自然数 $n(n>1)$，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

3. 设 $x>0, b>0, a \neq b$，证明：$\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

证　由题设知 $b>0, a \neq b$，所以可分两种情况讨论：

（1）$a \geqslant b$ 时，有

$$\begin{cases} ax \geqslant bx, \\ a+x \geqslant b+x, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} ab+ax \geqslant bx+ab, \\ a+x \geqslant b+x, \end{cases}$　从而 $\begin{cases} \dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{a+x}{b+x}, \\ \dfrac{a+x}{b+x} \geqslant 1. \end{cases}$

（2）$a<b$ 时，有

$$\begin{cases} ax < bx, \\ a+x < b+x, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} ab+ax < bx+ab, \\ a+x < b+x, \end{cases}$　从而 $\begin{cases} \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+x}{b+x}, \\ \dfrac{a+x}{b+x} < 1. \end{cases}$

综合上述（1）、（2），可得 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

六、课外作业题

1. 求证不等式：

（1）$|x-y| \geqslant ||x|-|y||$；

（2）$|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

2. 证明：函数 $g(x)=2x-\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的.

答案及提示：

1. **证**　（1）由 $|x-y|=|x+(-y)| \geqslant |x|-|-y|=|x|-|y|$，

及 $|x-y|=|y-x| \geqslant |y|-|x|=-(|x|-|y|)$，

即得

$$|x-y| \geqslant ||x|-|y||.$$

也可如下证明：由 $|xy| \geqslant xy$ 知 $x^2-2xy+y^2 \geqslant x^2-2|xy|+y^2$，则

$$(x-y)^2 \geqslant (|x|-|y|)^2,$$

开方即得$|x-y|\geqslant||x|-|y||$.

（2）$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-|x_1+\cdots+x_n|$

而$|x_1+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2+\cdots+x_n|\leqslant\cdots\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$,

所以$|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

2. **证** $\forall x,y\in\mathbf{R}$，且$x<y$，有

$$|\sin x-\sin y|=2\left|\sin\frac{y-x}{2}\right|\left|\cos\frac{y+x}{2}\right|\leqslant2\left|\sin\frac{y-x}{2}\right|\leqslant|y-x|,$$

即 $\quad -(y-x)\leqslant\sin y-\sin x\leqslant y-x.$

从而，$g(y)-g(x)=2(y-x)+(\sin y-\sin x)\geqslant2(y-x)-(y-x)=y-x>0.$

即函数$g(x)=2x-\sin x$在$\mathbf{R}$上是严格递增的.

1.2 数集·确界原理

一、内容提要

1. $\mathbf{R}$中的两类重要数集——区间与邻域

有限区间——设a、$b\in\mathbf{R}$，且$a<b$.

开区间：$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$.

闭区间：$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开半闭区间：$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$或$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

无限区间——$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}$，$(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\}$，

$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

邻域——设$a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，

点a的δ邻域：$U(a;\delta)=\{x\,||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$.

点a的空心δ邻域：$U^\circ(a;\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$.

点a的δ左邻域：$U_-(a)=U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$.

点a的δ右邻域：$U_+(a)=U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$.

∞邻域：$U(\infty)=\{x\,||x|>M\}$，其中M为充分大的正数（下同）.

$+\infty$邻域：$U(+\infty)=\{x\,|\,x>M\}$.

$-\infty$邻域：$U(-\infty)=\{x\,|\,x<-M\}$.

2. 有界集

定义 设S为$\mathbf{R}$中的一个数集，若存在数$M(L)$，使得对一切$x\in S$，都有$x\leqslant M(x\geqslant L)$，则称$S$为有上界（下界）的数集，数$M(L)$称为$S$的一个上界（下界）.

S无上界（下界）的定义：若对于任意$M(L)$，都存在$x_0\in S$，使得$x_0>M(x_0<L)$，则称数集S无上界（下界）.

3. 确界的定义

确界是上确界与下确界的统称.

设S是$\mathbf{R}$中的一个数集．若η满足：

（1）对一切$x \in S$，有$x \leqslant \eta$，即η 是S的上界；

（2）对任何$\alpha < \eta$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 > \alpha$，即η又是S的最小上界，则称数η为数集S的**上确界**，记作$\eta = \sup S$.

设S是$\mathbf{R}$中的一个数集．若ξ满足：

（1）对一切$x \in S$，有$x \geqslant \xi$，即ξ是S的下界；

（2）对任何$\beta > \xi$，存在$x_0 \in S$，使得$x_0 < \beta$，即ξ又是S的最大下界，则称数ξ为数集S的**下确界**，记作$\xi \leqslant \inf S$.

4. 确界的性质

唯一性：若数集S存在上（下）确界，则一定是唯一的；

若数集S存在上、下确界，则有$\inf S \leqslant \sup S$；

数集S的确界可能属于S，也可能不属于S.

5. 确界原理

设S为非空数集．若S有上界，则S必有上确界；若S有下界，则S必有下确界．

二、基本要求

知道区间与邻域的表示方法；深刻理解确界的定义与确界原理，并在有关命题的证明中正确地加以运用．

三、例题分析

例 1　数集A、$B \subset [0,+\infty)$，并令$A * B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$．则$\inf(A * B) = \inf A \cdot \inf B$．

分析：可从定义出发给出证明，证明的关键是掌握确界的定义．

证　首先，$\inf A \cdot \inf B$为集合$A * B$的下界；事实上，$\forall xy \in A * B$，有

$$x \geqslant \inf A, y \geqslant \inf B \Rightarrow xy \geqslant \inf A \cdot \inf B .$$

其次，$\inf A \cdot \inf B$为$A * B$的下确界．$\forall \varepsilon > 0$，我们要在$A * B$中寻找元素xy使得

$$xy < \inf A \cdot \inf B + \varepsilon . \tag{1}$$

由$A * B$及$\inf A \cdot \inf B$的定义，如果能找到$\varepsilon_1 > 0$，而使得

$$(\inf A + \varepsilon_1)(\inf B + \varepsilon_1) < \inf A \cdot \inf B + \varepsilon . \tag{2}$$

则问题迎刃而解，式（2）等价于

$$(\inf A + \inf B)\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < \varepsilon .$$

可令ε_1很小，比如小于 1，则

如果
$$\begin{cases} \varepsilon_1 < 1 \\ (\inf A + \inf B)\varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon \end{cases}$$

式（2）也成立．选取

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{\inf A + \inf B + 1}\varepsilon$$

即可使式（2）成立．选取

$$x \in A, x < \inf A + \varepsilon_1 ,$$

$$y \in B, y < \inf B + \varepsilon_1 .$$

则$xy < \inf A \cdot \inf B + \varepsilon$．从而证明了$\inf(A * B) = \inf A \cdot \inf B$.

例 2 设 S 是非空集，试正面陈述下列概念：

（1）数集 S 无下界；

（2）数 η 是 S 的上界，但不是 S 的上确界.

分析：陈述概念的关键是掌握上（下）界和上（下）确界的定义.

解 （1）若 $\forall L \in \mathbf{R}$，$\exists x \in S$，使得 $x < L$，则称数集 S 无下界．如：

$\forall L \in \mathbf{R}$，若 $L \geqslant 0$，则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，均有 $-n < L$；若 $L < 0$，则有 $L > [L]-1 \in \{-n \mid n \in \mathbf{N}_+\}$，故数集 $\{-n \mid n \in \mathbf{N}_+\}$ 无下界.

（2）若 $\forall x \in S$，恒有 $x \leqslant \eta$，但对 $\exists \alpha < \eta, \forall x \in S$，有 $x \leqslant \alpha$，则 η 是 S 的上界，但不是 S 的上确界．如：

由于 $\forall n \in \mathbf{N}$，有 $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+1} = 1 < 2$，且 $\dfrac{3}{2} < 2$，$\forall n \in \mathbf{N}_+$ 也有 $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{3}{2}$，故 2 是 $S = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{N}_+ \right\}$ 的上界，但不是 S 的上确界.

例 3 设 $A = \{x \mid x \in \mathbf{Q}$，且 $x > 0, x^2 < 2\}$，证明 A 在 $\mathbf{Q}$ 中没有上确界.

证 用反证法.

假设 A 在 $\mathbf{Q}$ 中有上确界，记为 $\sup A = r = \dfrac{n}{m}(m, n \in \mathbf{N}^+, \text{且} m, n \text{互质})$，由于有理数的平方不能等于 2，于是只能有以下两种可能：

（1）$1 < r^2 < 2$，可令 $t = \dfrac{2-r^2}{2r+1}$，则 $0 < t < 1$，且

$(r+t)^2 < r^2 + 2rt + t^2 = 2$.

因此 $r + t \in A$，与 r 是 A 的上确界矛盾.

（2）$r^2 > 2$，可令 $t = \dfrac{r^2-2}{2r}$，则 $0 < r-t < r$．但 $(r-t)^2 > r^2 - 2rt = 2$．也即 $r-t$ 是 A 的比 r 小的上界，与 r 是 A 的上确界矛盾.

因此，A 在 $\mathbf{Q}$ 中没有上确界.

四、解题示范

例 4 设 $M = \{x \mid x \text{为区间}(0,1)\text{中的有理数}\}$，试按上、下确界的定义验证：

$$\sup M = 1, \inf M = 0.$$

解 先验证 $\sup M = 1$，类似可验证 $\inf M = 0$.

（1）对一切 $x \in M$，显然有 $x \leqslant 1$，即 1 是 M 的上界；

（2）对任何 $a < 1$，若 $a \leqslant 0$，则 $\forall x_0 \in M$，都有 $x_0 > a$，若 $a > 0$，则由有理数在实数集中的稠密性，在 $(a,1)$ 中必有有理数 x_0，即存在 $x_0 \in M$，使得 $x_0 > a$.

例 5 设 S 为非空有下界数集，证明：$\inf S = \xi \Leftrightarrow \xi = \min S$.

证 若 $\inf S = \xi \in S$，则由下确界定义知，$\forall x \in S$ 有 $x \geqslant \xi$，又 $\xi \in S$，故 $\min S = \xi$.

若 $\xi = \min S$，则由最小值定义知，$\forall x \in S$ 有 $x \geqslant \xi$，且对 $\forall \beta > \xi, \exists \xi \in S$，使 $\xi < \beta$，故 $\inf S = \xi$.

五、课堂练习题

1. 证明有界数集的上、下确界唯一.

证　设 S 是有界数集，即 $\exists M>0$，使对 $\forall x\in S$，有 $|x|\leqslant M$，则 S 有上确界，记为 $\operatorname{sip} S=P$. 设 P' 为 S 的另一个上确界，且 $P\neq P'$.

不妨设 $P<P'$，则可令 $\varepsilon=P'-P>0$，$\exists x_0\in S$，使

$$x_0>P'-\varepsilon=P.$$

这与 P 是 S 的上确界矛盾. 所以 $P=P'$，即 S 的上确界唯一.

同理可证 S 的下确界唯一.

2. 证明：$S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$ 有上界而无下界.

证　$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^2\geqslant 0$，故 $\forall y\in S$，则有 $y=2-x^2<3$，3 即为 S 的一个上界. 但对 $\forall M>0$，取 $x=\sqrt{5+M}$，则有

$$|y|=|2-x^2|=|-3-M|=M+3>M,$$

故 S 无界，也即 S 无下界.

3. 设 f,g 为 D 上的有界函数，证明：

（1）$\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$；

（2）$\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$.

证　（1）对任何 $x\in D$，有

$$\inf_{x\in D} f(x)\leqslant f(x),\inf_{x\in D} g(x)\leqslant g(x)\Leftrightarrow\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\leqslant f(x)+g(x)$$

上式表明，数 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是函数 $f+g$ 在 D 上的一个下界，从而

$$\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\leqslant\operatorname{ing}_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$

（2）可类似证明.（略）

4. 对任一 $x\in\mathbf{R}$，存在唯一的 $n\in\mathbf{Z}$，使 $n\leqslant x<n+1$.

证　设 $x\geqslant 0$，$M=\{m\mid m\leqslant x,m\in\mathbf{Z}\}$，则 M 非空，有上界，因而有上确界，记为 n. 根据 M 的定义，有 $x\geqslant n,n+1>x$，也即 $n\leqslant x<n+1$. 因为整数集的上确界存在时必为整数，且上确界唯一，所以 n 即为所求.

若 $x<0$，由上面的证明，存在唯一的 $n_1-1<-x\leqslant n_1$，取 $n=n_1$ 即可.

六、课外作业题

1. 证明：集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x},x\in(0,1)\right\}$ 是无界数集.

2. $A=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$ 是有界集，证明：$\sup A=1,\inf A=0$.

3. 设 A,B 都为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$. 证明：

（1）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

（2）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

答案及提示：

1. **证**　对任意的 $M>0,\exists x=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，$y=\dfrac{1}{x}\in A,y=M+1>M$