学科主编
周沛耕

国家奥林匹克集训队教练
北京大学附中数学特级教师

特别收录
最新奥赛真题

金牌奥赛

解题方法与赛前实战

高中数学

《金牌奥赛》编委会 编

课本内容概述
课外知识拓展
奥赛真题解析
助力高中奥赛

考试让你得高分！

北京出版集团公司
北京教育出版社

金牌奥赛

解题方法与赛前实战

高中数学

《金牌奥赛》编委会 编

本册主编：戴有刚　毕淑云　俞晓宏　李海军　王爱国
董寿江

编　　委：于志斌　王红娟　王美玲　尹志梅　兰俊义
孙冬梅　任延明　邵　波　苏正楷　苏孝从
苏岫云　李永哲　李英淑　李海军　陈家锐
[illegible]　[illegible]辉　林　银　周　萌　金成哲
[illegible]敏　施　恩　胡均宇　郭灵恩
[illegible]久　程晓敏　舒　秀

北京出版集团公司
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题方法与赛前实战. 高中数学/《金牌奥赛》编委会编. —北京:北京教育出版社,2014.8

(金牌奥赛)

ISBN 978-7-5522-2053-7

Ⅰ.①解… Ⅱ.①金… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第102370号

金牌奥赛·解题方法与赛前实战　高中数学

《金牌奥赛》编委会　编

*

北京出版集团公司
北京教育出版社　出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100120

网址:www.bph.com.cn

北京出版集团公司总发行

全国各地书店经销

三河市利兴印刷有限公司印刷

*

787×1 092　16开本　23.25印张　510 000字

2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5522-2053-7

定价:42.80元

前言

用最简单的方法解最难的题，这就是奥赛解题方法吸引学生眼球的最根本的原因。

多年来，许多教师、家长和学生都在苦苦思索着：哪种方法更能开阔视野、启迪思维、开发智力、提升能力？怎样才能在不断创新的竞赛中运筹帷幄？怎样才能把知识转化为能力？

这些想法其实存在着一定的误区，中医讲究把脉，奥赛也一样，只要你把住了它的“脉”，问题就会变得极其简单。

本书就是奥赛教练、部分省市教研员依据最新教材、教学大纲、考试说明和奥赛说明，结合奥赛智力训练的实际情况，经过大量细致的调研、认真分析，针对学生应具备的学科基础知识和基本技能，顺应由浅入深的脉络编写而成的。

本书具有以下特色：

一、适用于所有想学奥赛知识的同学，让学生在快乐中学习

本书涵盖了学科的全部基础知识、基本方法、基本技能和思想，并对课本内容进行了必要概述、合理变通和适当拓展。本书由浅入深的解析、重点突出的评述、竞赛习题的罗列，会使同学们在瞬间感受到游刃于课本与课外之间的快乐。

二、本书所选习题具有典型性、通透性

最简单的方法往往适用于最难的题，因此本书通过典型习题和富有启发性的解答，对于较难的习题进行详尽透彻的分析，使同学们能顺着分析的脉络，开动脑筋，悟出自己的解题方法来。

三、缩短知识与实践的距离

怎样把知识转化为能力？本书对此进行了详尽的诠释。它既考虑到内容编排的科学性，又注意到自身的可读性，层次清晰，拓展了同学们对各种题型的解题思路，提高了同学们把握关键问题的能力。最重要的是同学们会在本书中发现解题的规律技巧和解题的关键，这对消化、掌握知识有巨大的帮助。

四、高才生轻巧攻关的摇篮

本书整合了目前社会上众多奥赛训练方法的精髓，深入浅出地演示了精彩的解题方法，加上画龙点睛的归纳总结，为高才生提供了超前的、便捷的解题方法，也为同学们参加奥赛或升学考试起到相当大的指导作用。

由于时间仓促，书中难免存在谬误之处，敬请批评指正。

目 录

代 数 篇

几 何 篇

策略方法篇

真题观摩篇

代数篇

第一章 集合、映射

知识讲解

1 集合、映射

(1)集合：集合与集合的子集、真子集、等集的关系；集合间的交、并、补运算.

(2)映射与函数：函数是非空数集 A 到非空数集 B 的映射，数集 A 为函数的定义域，由数集 A 到数集 B 的映射中的象构成的集合为函数的值域.

2 有限集元素的数目

(1)有限集的阶：有限集 A 的元素数目叫做这个集合的阶，记作 $|A|$ [或 $n(A)$].

(2)集族的阶：若 M 为由一些给定的集合构成的集合，则称集合 M 为集族.

设 A 为有限集，由 A 的若干个子集构成的集合称为集合 A 的一个子集族，求满足一定条件的集族的阶是一类常见的问题.

显然，若 $|A|=n$，则由 A 的所有子集构成的子集族的阶为 2^n.

3 映射，映射法

定义 1　设 X 和 Y 是两个集合(二者可以相同). 如果按照某种对应关系 f，对于每个 $x\in X$，都有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称这个对应关系为 X 到 Y 的映射，记为 $f:X\to Y$ 或 $y=f(x):x\in X\to y\in Y$. 这时，$y=f(x)\in Y$ 称为 $x\in X$ 的象，而 x 称为 y 的原象. 特别地，当 X 和 Y 都是数集时，映射 f 称为函数.

定义 2　设 f 为从 X 到 Y 的一个映射.

(1)如果对于任何 $x_1, x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射；

(2)如果对于任何 $y\in Y$，都有 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，则称 f 为满射；

(3)如果映射 f 既为单射又为满射，则称 f 为双射；

(4)如果 f 为满射且对任何 $y\in Y$，恰有 X 中的 m 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得 $f(x_i)=y$，$i=1,2,\cdots,m$，则称 f 为倍数为 m 的倍数映射.

定理 1　设 X 和 Y 都是有限集，f 为从 X 到 Y 的一个映射.

(1)如果 f 为单射，则 $|X|\leqslant|Y|$；

(2)如果 f 为满射，则 $|X|\geqslant|Y|$；

(3)如果 f 为双射，则 $|X|=|Y|$；

(4)如果 f 为倍数为 m 的倍数映射，则 $|X|=m|Y|$.

定理 2　设有限集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$f$ 是 A 到 A 的映射，记 $f_1(x)=$

$f(x)$，$f_{r+1}(x)=f[f_r(x)]$（$x\in A$，$r\in\mathbf{N}^*$），则 f 是一一映射（即双射）的充要条件是：对任意 $a_i\in A$，存在 $m_i\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant m_i\leqslant n$，使得 $f_{m_i}(a_i)=a_i$，而 $f_s(a_i)\neq a_i$（$s\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant s\leqslant m_i-1$）.

4 容斥原理

容斥原理是一种重要而基本的计数方法.

若记有限集合 A 中的元素个数为 $|A|$，则由 Venn 图 1－1，1－2 有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,\quad ①$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.\quad ②$$

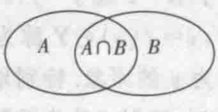

图 1－1

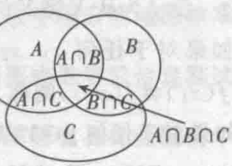

图 1－2

以上是容斥原理的两种简单形式，更一般地，我们有

定理 1　（容斥原理）设 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 是有限集，则

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\quad ③$$

证明　用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，显然成立.

假设当 $n=k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，

$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup A_{k+1}|=|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)\cup A_{k+1}|=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|+|A_{k+1}|-|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)\cap A_{k+1}|=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|+|A_{k+1}|-|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup\cdots\cup(A_k\cap A_{k+1})|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{k-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|+|A_{k+1}|-\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|(A_i\cap A_{k+1})\cap(A_j\cap A_{k+1})|-\cdots+(-1)^k|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\cap\cdots\cap(A_k\cap A_{k+1})|=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k+1}|$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

由归纳原理知，对任意正整数 n，命题成立.

容斥原理有如下的变形：

定理 2　（逐步淘汰原理）设 S 为有限集，A_i 为 S 的子集，$i=1,2,\cdots,n$，记 $\complement_S A_i$ 为 A_i 在 S 中的补集，则

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\quad ④$$

证明　因为 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|S|-|\complement_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|$，

又由集合论中的德·摩根定律，有

$\complement_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n$.

由上述两式及③式即得④式.

公式④也叫做筛法公式.

公式③和④都基于同一思想，即反复交替地使用包含与排斥，逐步增添没有计数的部分，去掉重复计数的部分，以后我们统称它们为容斥原理. 在实际应用中，公式③一般用来计算至少具有若干个性质之一的元素个数，公式④则一般用来计算不同时具有若干个性质中的任何一个性质的元素个数.

赛题精讲

例1 已知集合 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,a>0\}$，$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$. 若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则 a 的值为________.

答案：$2+\sqrt{2}$或$\sqrt{2}$

分析：可作图，用数形结合法求解.

点集 A 由顶点为 $(a,0)$，$(0,a)$，$(-a,0)$，$(0,-a)$ 的正方形的四条边构成(如图1－3).

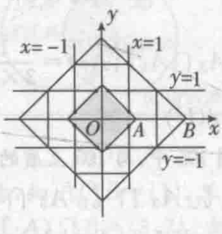

图 1－3

将 $|xy|+1=|x|+|y|$，变形为 $(|x|-1)(|y|-1)=0$，所以，集合 B 由四条直线 $x=\pm1$，$y=\pm1$ 构成.

欲使 $A\cap B$ 为正八边形的顶点所构成的集合，只有 $a>2$ 或 $1<a<2$ 这两种情况.

(1) 当 $a>2$ 时，由于正八边形的边长只能为 2，显然有 $\sqrt{2}a-2\sqrt{2}=2$，

故 $a=2+\sqrt{2}$.

(2) 当 $1<a<2$ 时，设正八边形的边长为 l，则

$l\cos45^\circ=\dfrac{2-l}{2}$，所以 $l=2\sqrt{2}-2$，

这时，$a=1+\dfrac{l}{2}=\sqrt{2}$.

综上所述，a 的值为 $2+\sqrt{2}$或$\sqrt{2}$.

例2 对于恰有 120 个元素的集合 A，问：是否存在子集 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 同时满足：

(1) $|A_i|=36$，$i=1,2,\cdots,10$？

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}=A$？

(3) $|A_i\cap A_j|=8$，$i\neq j$. 请说明理由.

解：存在.

考虑长度为 10 的 0，1 数列. 其中仅 3 项为 1 的数列恰有 $C_{10}^3=120$(个)，每个数列作为集合 A 的一个元素.

对集合 A 的子集 $Ai(i=1,2,\cdots,10)$，第 i 项为 1 的 0，1 数列恰有 $C_9^2=36$(个)，它们是子集 A_i 的 36 个元素. 对子集 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}=A$，对每对 $i,j\in\{1,2,\cdots,10\}(i<j)$，第 i 项与第 j 项均为 1 的 0，1 数列恰有 $C_8^1=8$(个)，它们是 $A_i\cap A_j$ 的元素.

综上可知，存在满足条件的 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 这样的 10 个子集.

例3 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 不能分成三个没有公共元素的非空子集，使得从两个不同子集中各任取一个正整数 x、y，而 x^2-xy+y^2 属于第三个子集. (IMO 预选题)

分析：以否定形式给出的命题适合用反证法证明.

证明：设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$，假设 $\mathbf{N}^*$ 能分成满足条件的三个子集 A、B、C，则 $\mathbf{N}^*=A\cup B\cup C$，不妨设 $1\in A$，$b\in B$，$c\in C$，其中 $b<c$，且 $1,b,c$ 分别是这三个子集中最小的数，从而有 $1,2,\cdots,b-1\in A$.

引理1 x,y 和 $x+y$ 不可能属于三个不同的子集. 设 $x\in A$，$y\in B$，$x+y\in C$，则由假设知，$Z=f(x+y,x)\in B$，又因为 $f(x+y,x)=(x+y)^2-(x+y)x+x^2=(x+y)^2-(x+y)y+y^2=f(x+y,y)\in A$，即 Z 既属于 A 又属于 B，此与 A,B,C 三个集合互不相交矛盾，故 x,y 和 $x+y$ 不可能属于三个不同的子集.

引理2 子集 C 包含一个 b 的倍数，如果子集 C 所包含的 b 的倍数中最小的一个为 kb，则 $(k-1)b\in B$. 设 r 是 c 除以 b 的余数，如是 $r=0$，则 $c=nb\in C$. 如是 $r>0$，因为 c 是 C 中最小的数，所以 $c-r\notin C$. 又因为 $r\leqslant b-1$，所以 $r\in A$. 由于 $r+(c-r)=c$，由引理1知 $c-r\notin B$，于是 $c-r\in A$. 由 $b\in B$，得 $f(c-r,b)=(c-r)^2-(c-r)b+b^2=n^2b^2-nb^2+b^2=mb\in C$，故子集 C 包含一个 b 的倍数. 若 $kb\in C$，其中 k 是满足 $nb\in C$ 的 n 的最小值，且 $b+(k-1)b=kb$，由引理1，知 $(k-1)b\notin A$. 又因为 $(k-1)b\notin C$，所以 $(k-1)b\in B$. 故引理2得证.

引理3 对于任意正整数 n，若 $(nk-1)b+1\in A$，则 $nkb+1\in A$.（数学归纳法）当 $n=1$ 时，因为 $1\in A$，$(k-1)b\in B$，由引理1知 $(k-1)b+1\notin C$. 又因为 $b-1\in A$，$kb\in C$，再由引理1，得 $(k-1)b+1\notin B$，故 $(k-1)b+1\in A$. 同理，因为 $(k-1)b+1\in A$，$b\in B$，$kb+1\notin C$. 又因为 $1\in A$，$kb\in C$，$kb+1\notin B$，所以 $kb+1\in A$. 假设若 $[(n-1)\cdot k-1]b+1\in A$，则 $(n-1)kb+1\in A$ 成立. 由于 $(n-1)kb+1\in A$，$(k-1)b\in B$，$(nk-1)b+1\notin C$，又因为 $[(n-1)k-1]\cdot b+1\in A$，$kb\in C$，所以 $(nk-1)b+1\notin B$，从而 $(nk-1)\cdot b+1\in A$. 同理，由于 $(nk-1)b+1\in A$，$b\in B$，所以 $nkb+1\notin C$，因为 $(n-1)kb+1\in A$，$kb\in C$，所以 $nkb+1\notin B$，故 $nkb+1\in A$. 综上，引理3成立.

由上述引理，知 $kb+1\in A$，$kb\in C$. 所以 $f(kb+1,kb)=(kb+1)^2-(kb+1)kb+(kb)^2=(kb+1)kb+1$. 由引理3知 $f(kb+1,kb)\in A$，而由假设，知 $f(kb+1,kb)$ 应属于 B，矛盾.

故假设不成立，原命题为真.

点拨：反证法是证明以否定形式给出的命题的一般方法. 题中引理体现对集合的理解.

例4 将与105互质的所有正整数从小到大排成数列，求这个数列的第1 000项.

解：设 $U=\{1,2,\cdots,105\}$，$A_3=\{a\mid a\in U,\text{且 }3\mid a\}$，$A_5=\{a\mid a\in U,\text{且 }5\mid a\}$，$A_7=\{a\mid a\in U,\text{且 }7\mid a\}$，则

$\text{card}(A_3)=\frac{105}{3}=35$，$\text{card}(A_5)=\frac{105}{5}=21$，$\text{card}(A_7)=\frac{105}{7}=15$，

$\text{card}(A_3\cap A_5)=\frac{105}{3\times5}=7$，$\text{card}(A_5\cap A_7)=\frac{105}{5\times7}=3$，$\text{card}(A_7\cap A_3)=\frac{105}{3\times7}=5$，

$\text{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=\frac{105}{3\times5\times7}=1$，

而 $\text{card}(U)=105$.

在1到105中，与105互质的数的个数为 $\text{card}(\complement_U A_3\cap\complement_U A_5\cap\complement_U A_7)=\text{card}(U)-\text{card}(A_3\cup A_5\cup A_7)=\text{card}(U)-[\text{card}(A_3)+\text{card}(A_5)+\text{card}(A_7)]+[\text{card}(A_3\cap A_5)+\text{card}(A_5\cap A_7)+\text{card}(A_7\cap A_3)]-\text{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=105-(35+21+15)+(7+3+5)-1=48$.

设与105互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，则 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$\cdots$，$a_{48}=104$，$a_{49}=105+1$，$a_{50}=105+2$，$a_{51}=105+4$，$\cdots$，$a_{96}=105+104$，$\cdots$.

因为 $1\,000=48\times20+40$，所以 $a_{1\,000}=105\times20+a_{40}$.

由于 $a_{48}=104$，$a_{47}=103$，$a_{46}=101$，$a_{45}=97$，$a_{44}=94$，$a_{43}=92$，$a_{42}=89$，$a_{41}=88$，$a_{40}=86$，

所以 $a_{1\,000}=105\times20+86=2\,186$.

点拨：此题要用到容斥原理. 利用容斥原理解决问题时要注意如何设计题中基本的集合，如本题中的 A_3，A_5，A_7.

例5 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$(\complement_I A)\cap B=\{3,7\}$，$A\cap(\complement_I B)=\{2,8\}$，$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\{2,3,4,5,6,7,8\}$，求 A、B、$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$.

分析：当集合中元素数目比较少时常利用 Venn 图解决问题.

解：用 Venn 图表示集合 I、A、B 的关系，表示集合 A、B 的两个相交圆将表示全集 I 的矩形分成互不相交的四个部分，它们分别表示 $A\cap(\complement_I B)$，$A\cap B$，$(\complement_I A)\cap B$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$，如图 1－4.

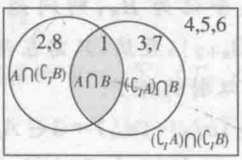

图 1－4

依题意，知 $A\cap B=\{1\}$. 又 $A\cap(\complement_I B)=\{2,8\}$，$(\complement_I A)\cap B=\{3,7\}$，由 Venn 图知 $A=\{1,2,8\}$，$B=\{1,3,7\}$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I(A\cup B)=\{4,5,6\}$.

点拨：借助集合的 Venn 图表示是解决集合问题的常用方法. 在集合运算中，直接运用集合运算律 $\complement_I(A\cap B)=(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$，$\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$ 可以使解题简便.

例6 已知集合 $A=\{x|5x-a\leqslant 0\}$，$B=\{x|6x-b>0\}$，$a,b\in\mathbf{N}$ 且 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$，则整数对 (a,b) 的个数为（ ）

A. 20 B. 25 C. 30 D. 35

答案：C

分析：$5x-a\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant\dfrac{a}{5}$；$6x-b>0\Rightarrow x>\dfrac{b}{6}$. 要使 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$，则 $\begin{cases}1\leqslant\dfrac{b}{6}<2,\\4\leqslant\dfrac{a}{5}<5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6\leqslant b<12,\\20\leqslant a<25.\end{cases}$ 所以数对 (a,b) 共有 $C_6^1C_5^1=30$（个）. 故选 C.

例7 给定整数 $n(n\geqslant 3)$，记 $f(n)$ 为集合 $\{1,2,\cdots,2^n-1\}$ 满足如下两个条件的子集 A 的元素个数的最小值.

(a) $1\in A$，$2^n-1\in A$；

(b) A 中的元素（除 1 外）均为 A 中的另两个（可以相同）元素的和.

(1) 求 $f(3)$ 的值；

(2) 求证：$f(100)\leqslant 108$.

解：(1) 设集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2^3-1\}$，且 A 满足 (a)，(b)，则 $1\in A$，$7\in A$. 由于 $\{1,m,7\}$ $(m=2,3,\cdots,6)$ 不满足 (b)，故 $|A|>3$.

又 $\{1,2,3,7\}$，$\{1,2,4,7\}$，$\{1,2,5,7\}$，$\{1,2,6,7\}$，$\{1,3,4,7\}$，$\{1,3,5,7\}$，$\{1,3,6,7\}$，$\{1,4,5,7\}$，$\{1,4,6,7\}$，$\{1,5,6,7\}$ 都不满足 (b)，故 $|A|>4$.

而集合 $\{1,2,4,6,7\}$ 满足 (a)，(b)，所以 $f(3)=5$.

(2) 首先证明

$$f(n+1)\leqslant f(n)+2,\ n=3,4,\cdots. \quad ①$$

设 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2^n-1\}$，$A$ 满足 (a)，(b)，且 A 的元素个数的最小值为 $f(n)$. 令 $B=A\cup\{2^{n+1}-2,2^{n+1}-1\}$，由于 $2^{n+1}-2>2^n-1$，故 $|B|=f(n)+2$.

又 $2^{n+1}-2=2(2^n-1)$，$2^{n+1}-1=1+(2^{n+1}-2)$，所以集合 $B\subseteq\{1,2,\cdots,2^{n+1}-1\}$，且 B 满足 (a)，(b). 从而 $f(n+1)\leqslant|B|=f(n)+2$.

其次证明

$$f(2n)\leqslant f(n)+n+1,\ n=3,4,\cdots. \quad ②$$

设 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2^n-1\}$，$A$ 满足 (a)，(b)，且 A 的元素个数的最小值为 $f(n)$.

令 $C=A\cup\{2(2^n-1),2^2(2^n-1),\cdots,2^n(2^n-1),2^{2n}-1\}$，由于 $2(2^n-1)<2^2(2^n-1)<\cdots<2^n(2^n-1)<2^{2n}-1$，故 $C\subseteq\{1,2,\cdots,2^{2n}-1\}$，且 $|C|=f(n)+n+$

1. 而 $2^{k+1}(2^n-1)=2^k(2^n-1)+2^k(2^n-1)$，$k=0,1,\cdots,n-1$，$2^{2n}-1=2^n(2^n-1)+(2^n-1)$，从而 C 满足(a)，(b)，于是 $f(2n)\leqslant|C|=f(n)+n+1$.

由①②得　$f(2n+1)\leqslant f(n)+n+3$. ③

反复利用②③可得 $f(100)\leqslant f(50)+50+1\leqslant f(25)+25+1+51\leqslant f(12)+12+3+77\leqslant f(6)+6+1+92\leqslant f(3)+3+1+99=108$.

例8 对 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有非空子集，定义一个唯一正确的"交替和"如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数(例如 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交替和是 $9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$ 的交替和就是 5). 当 $n=7$ 时，求所有这种"交替和"的总和.

解：记 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$，$M=\{1,2,\cdots,n-1\}$，

$N'=\{\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\mid a_1,a_2,\cdots,a_k\in M\}$，

$M'=\{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\mid a_1,a_2,\cdots,a_k\in M\}$，

再证 N' 中元素 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 与 M' 中元素 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 对应，显见这是 N' 到 M' 的一一对应.

因为 $|N'|$ 与 $|M'|$ 均为 2^{n-1}，且两数组 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 与 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 的"交替和"恰为 n，因此所有"交替和"的总和为 $n\cdot 2^{n-1}$.

特别地，当 $n=7$ 时，得"交替和"为 448.

点拨：应用映射还可以证明某些与计数相关的不等式和等式. 这时可以通过分别计数来证明等或不等，也可以不计数而直接通过适当的映射来解决问题.

例9 将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法种数记为 $\alpha(n)$. 将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法的种数记为 $\beta(n)$. 求证对每个 n，都有 $\alpha(n)=\beta(n+2)$.

证明：将每项都是 1 或 2，各项之和为 n 的所有数列的集合记为 A_n，每项都是大于 1 的正整数，各项之和为 n 的所有数列的集合记为 B_n，则问题就是证明 $|A_n|=|B_{n+2}|$，显然，只需在两集合之间建立一个双射就行了.

设 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)=a\in A_n$，其中 $a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots=a_{i_k}=2$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$，其余的 a_i 均为 1 且 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$.

令

$b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{i_1}$，

$b_2=a_{i_1+1}+a_{i_1+2}+\cdots+a_{i_2}$，

……

$b_k=a_{i_{k-1}+1}+a_{i_{k-1}+2}+\cdots+a_{i_k}$，

$b_{k+1}=a_{i_k+1}+a_{i_k+2}+\cdots+a_{m+2}$，

$b=(b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1})$，　①

则 $b\in B_{n+2}$.

定义

$A_n\ni a\xrightarrow{f}b\in B_{n+2}$，　②

则 f 为双射. 事实上，若 $a,a'\in A_n$，且 $a\neq a'$，则或者数列 a 和 a' 中 2 的个数不同，或者 2 的个数相同但位置不全相同. 无论哪种情形，由①和②知 $b=f(a)$ 与 $b'=f(a')$ 不同，即 f 为单射. 另一方面，对任何 $b\in B_{n+2}$，利用①式又可确定 $a\in A_n$，使得 $f(a)=b$，即 f 为满射，从而 f 为由 A_n 到 B_{n+2} 的双射. 即原命题得证.

例 10　设 $O-xyz$ 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个有限点集，S_x, S_y, S_z 分别是 S 中所有点在坐标平面 yOz, xOz, xOy 上的正投影所构成的集合. 求证：$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$.（IMO 试题）

证明：对每点 $(i,j) \in S_x$，令

$$T_{ij} = \{(x,i,j) \mid (x,i,j) \in S\},$$

显然有 $S = \sum\limits_{(i,j)\in S_x} T_{ij}$.

由柯西不等式有

$$|S|^2 \leqslant \sum_{(i,j)\in S_x} 1 \cdot \sum_{(i,j)\in S_x} |T_{ij}|^2 = |S_x| \cdot \sum_{(i,j)\in S_x} |T_{ij}|^2, \quad ①$$

考虑集合 $V = \sum\limits_{(i,j)\in S_x} (T_{ij} \times T_{ij})$，其中 $T_{ij} \times T_{ij} = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in T_{ij}\}$，

显然，$|V| = \sum\limits_{(i,j)\in S_x} |T_{ij}|^2$.

定义映射 f 如下

$V \ni ((x,i,j),(x',i,j)) \to ((x,j),(x',i)) \in S_y \times S_z$，不难看出 f 为单射，因此有 $|V| \leqslant |S_y| \cdot |S_z|$.　②

由①②即得 $|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$.

例 11　把正 $\triangle ABC$ 的各边 n 等分，过各分点在 $\triangle ABC$ 内作各边的平行线，得到的图形叫做正 $\triangle ABC$ 的 n 格点阵.

(1)求其中所有边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数；

(2)求其中所有平行四边形的个数.

(国家集训队选拔考试题)

解：(1)延长 AB 至 B'，AC 至 C'，使得 $|BB'| = |CC'| = \frac{1}{n}|BC|$. 作出正 $\triangle AB'C'$ 的 $n+1$ 格点阵(图 1－5). 边 $B'C'$ 上有 $(n+2)$ 个点，依次编号为 $0,1,2,\cdots,n+1$. 在 $\triangle ABC$ 中边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形可以按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类. 容易看出，这三类菱形个数相同. 边不平行于 BC 且边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的所有菱形的集合记作 S. 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有有序数对 $(i,j)(i<j)$ 所构成的集合记作 T，很明显，$|T| = C_n^2$. 设菱形 $EFGH \in S$，延长它的两条邻边 HG 与 FG，分别交 $B'C'$ 于点 i 与 j，$1 \leqslant i < j \leqslant n$，则 $(i,j) \in T$. 令 (i,j) 是菱形 $EFGH$ 在 S 到 T 的映射 φ 下的象，这样便建立了 S 到 T 的映射 φ. 容易验证，映射 φ 是双射. 因此，$|S| = |T| = C_n^2$. 所以所求的边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数为 $3C_n^2$.

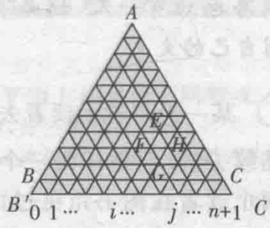

图 1－5

(2)将平行四边形按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类，这三类平行四边形个数应相同，边不平行于 BC 的所有平行四边形的集合记作 V. 非负整数 $0,1,2,\cdots,n+1$ 构成的所有有序四元数组 $(i,j,k,l)(0 \leqslant i < j < k < l \leqslant n+1)$ 构成的集合记作 W，很明显，$|W| = C_{n+2}^4$. 设 α 是 V 中的平行四边形，延长它的四条边分别交 $B'C'$ 于点 i,j,k,l，其中 $0 \leqslant i < j < k < l \leqslant n+1$，则 $\beta = (i,j,k,l) \in W$. 令 β 是 α 在 V 到 W 的映射 f 下的象，这样便定义了 V 到 W 的一个映射 f. 容易验证，f 是双射. 因此，$|V| = |W| = C_{n+2}^4$. 从而所求平行四边形的个数为 $3C_{n+2}^4$.

例 12　三兄弟在某天看望生病朋友. 同一天，三人妻子也去看望这位朋友. 三

兄弟每人在病房里都遇到了两个兄弟的妻子.证明:三兄弟中某人,在病房里遇到自己的妻子.

证明:假定A在病房里没有遇到自己的妻子,只有两种可能:

(1)A妻在丈夫去之前已离开(这时她比两妯娌先离开病房,因为A在病房遇到两妯娌),说明A妻在三女人中最先离开病房;

(2)A妻在丈夫离开后才去病房(这时她比两妯娌后去,因为A遇到两妯娌),说明A妻在三女人中最后到病房.

由于三个女人最先离开只有一人,最后到病房也只有一人,故必有一人在病房遇到自己的丈夫.

例13 某一天有若干读者去图书馆,他们是陆续去的.但是任何三个读者中,至少有两个读者在图书馆见过面.证明:可以找到这样两个时刻,对于任何一个那天来过图书馆的读者,在这两个时刻中至少有一个时刻是在图书馆里.

证明:要找的两个时刻是:第一个离馆读者离馆时刻和最后一个进馆读者进馆时刻.

我们证明这天任一读者,两个时刻中至少有一个时刻在图书馆.反之,若某读者两个时刻都不在图书馆,唯一可能是:他在第一个离馆读者离馆之后进馆,并且在最后一个进馆读者进馆之前离开图书馆.但这种情况下:此人和第一个离馆读者,最后一个进馆读者三人之间没有任何两人在图书馆见过面.这与已知条件矛盾,故结论得证.

例14 设$\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$,论证是否存在一个函数$f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$使得$f(1)=2$,$f(f(n))=f(n)+n$对一切$n\in\mathbf{N}^*$成立且$f(n)<f(n+1)$.

解:存在.首先有一条链

$$1\to2\to3\to5\to8\to13\to21\to\cdots \quad ①$$

链上每一个数n的后继是$f(n)$,f满足

$$f(f(n))=f(n)+n, \quad ②$$

即每个数是它前面两个数的和,这种链称为f链.

对于①中的数$m>n$,由①递增易知有

$$f(m)-f(n)\geqslant m-n. \quad ③$$

我们证明正整数集$\mathbf{N}^*$可以分解为若干条f链,并且对任意正整数$m>n$,③成立(从而$f(n+1)>f(n)$,并且每两条链无公共元素).

设已有若干条f链满足③,而$k+1$是第一个不在已有链中出现的数.

定义$f(k+1)=f(k)+1$, ④

这条链中其余的数由②逐一确定.

对于$m>n$,如果m、n同属于新链,③显然成立.设m、n中恰有一个属于新链.若m属于新链,在$m=k+1$时,

$f(m)-f(n)=f(k)+1-f(n)\geqslant k-n+1=m-n$,

设对于m,③成立,则

$f(f(m))-f(n)=f(m)+m-f(n)\geqslant m-n+m\geqslant f(m)-n$[由②易知$2m\geqslant f(m)$],即对新链上一切$m$,③成立.

若n属于新链,在$n=k+1$时,

$f(m)-f(n)=f(m)-f(k)-1\geqslant m-k-1=m-n$.

设对于n,③成立,在$m>n$时,m不为原有链的链首.记$m=f(s)$,则在$m>f(n)$时,

$f(m)-f(f(n))=s+m-(f(n)+n)=m-f(n)+(s-n)$.

而在$s\leqslant n$时,$f(n)-f(s)\geqslant n-s\geqslant0$,与$m>f(n)$矛盾,所以$s>n$,$f(m)-$

$f(f(n))\geqslant m-f(n)$. 即对新链上一切 n，③成立.

因而添入一条新链后，③仍成立.

这样继续添加，直到所有正整数均在链中出现，所得函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 即为所求.

知识训练

1. 在坐标平面上，横纵坐标都是整数的点为整点，试证：存在一个同心圆的集合，使得：(1) 每个整点都在此集合的某一圆周上；(2) 在此集合的每个圆周上，有且只有一个整点.
2. 以正整数为元素的集合 S 满足：如果 $x\in S$，则 $8-x\in S$. (1) 求出只有 1 个元素的集合 S；(2) 求所有含 2 个元素的集合 S；(3) 求满足条件的所有集合 S.
3. 若 m、$n\in\{x\mid x=a_2\times10^2+a_1\times10+a_0\}$，其中 $a_i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$i=0,1,2$，并且 $m+n=636$，则实数对 (m,n) 表示平面上不同点的个数为(　　)
   A. 60　B. 70　C. 90　D. 120
4. 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，若 X 是 S_n 的子集，把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集. (1) 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等. (2) 求证：当 $n\geqslant3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等. (3) 当 $n\geqslant3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.
5. 试证：对内角分别为 30°, 60°, 90° 的三角形的顶点和各边四等分点共 12 个点，染以红色或蓝色，则必存在同色的三点，以它们为顶点的三角形与原三角形相似.
6. 试求具有下述性质的最小自然数 n，使当将集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 任意分成两个不相交的子集时，必可从其中之一选出三个数，其中两个数之积等于第三数. (IMO 预选)
7. 试求所有正整数 k，使得集合 $Z=\{1\,990,1\,991,\cdots,1\,990+k\}$ 可以分解成不相交的子集 A 与 B，且使两集合中元素之和相等. (IMO 预选)
8. 从集合 $\{1,2,\cdots,1\,982\}$ 中，怎样划去最少个数，使得余下的数中，每一个数都不等于另外两数的乘积？求划去数的个数，应除去哪些数？

知识训练参考答案

1. 证明：

设坐标平面上任意两不同整点 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$，分三类情况讨论.

(1) 当 $a\neq c,b\neq d$ 时，线段 AB 的中点为 $M\left(\frac{1}{2}(a+c),\frac{1}{2}(b+d)\right)$，$AB$ 的中垂线方程为 $y-\frac{1}{2}(b+d)=\frac{c-a}{b-d}\cdot\left(x-\frac{1}{2}(a+c)\right)$.

(2) 当 $a=c,b\neq d$ 时，线段 AB 的中点为 $M\left(a,\frac{1}{2}(b+d)\right)$，$AB$ 的中垂线方程为 $y=\frac{1}{2}(b+d)$.

(3) 当 $a\neq c,b=d$ 时，线段 AB 的中点为 $M\left(\frac{1}{2}(a+c),b\right)$，$AB$ 的中垂线方程为 $x=\frac{1}{2}(a+c)$.

显然，只有在上述三类直线上的点才有可能到平面上某两整点的距离相等，若取 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$，则 P 必然不在上述三类直线上，即 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 到任意两个不同整点的距离都不相等，现将所有整点到点 P 的距离从小到大排成一列：$d_1,d_2,d_3,\cdots$. 显然，以 P 为圆心，以 $d_1,d_2,d_3,\cdots$ 为半径作的同心圆集合即为所求.

2. 解：

(1) 因 S 中只有一个元素 x，$\therefore 8-x=x$，$x=4$. 这时集合 $S=\{4\}$.

(2) 设 $S=\{x,y\}$，则 $8-x=y$，即 $x+y=8$.

所以含有 2 个元素的集合 S 有$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$共三个.

(3)同(2)法，含有三个元素的 S 有$\{1,4,7\}$，$\{2,4,6\}$，$\{3,4,5\}$. 含有四个元素的 S 有$\{1,2,6,7\}$，$\{1,3,5,7\}$，$\{2,3,5,6\}$. 含有五个元素的 S 有$\{1,2,4,6,7\}$，$\{1,3,4,5,7\}$，$\{2,3,4,5,6\}$. 含有六个元素的 S 有$\{1,2,3,5,6,7\}$. 含有七个元素的 S 有$\{1,2,3,4,5,6,7\}$，以上满足条件的 S 共 15 个.

3. C 提示：

由 $6=5+1=4+2=3+3$ 及题设知，m,n 个位数字的选择有 5 种.

因为 $3=2+1=7+6-10$，故：

(1)由 $3=2+1$ 及 $6=5+1=4+2=3+3$ 知，m,n 百位，十位数字的可能选择有 $2\times5=10$(种)；

(2)由 $3=7+6-10$ 及 $5=4+1=2+3$ 知，m,n 百位，十位数字的可能选择有 $2\times4=8$(种).

于是，符合题设的不同点的个数为 $5\times(10+8)=90$(种). 故选 C.

4. 解：

(1)S_n 的子集有 2^n 个，可分为两类：①不含元素 1 的子集(包括$\varnothing$)，②含有元素 1 的子集. 对①中任一集合 $\overline{X_1}$，对应着②中的集合 $X_1=\overline{X_1}\cup\{1\}$；反之，②的任一元素 X_1 都是①中的元素 $\overline{X_1}$ 的象，并满足 $X_1=\overline{X_1}\cup\{1\}$，且①中不同集合也对应着②中不同的集合，因此①，②的集合可建立一一对应，又若 $\overline{X_1}$ 是 S_n 的偶子集，则 $\overline{X_1}\cup\{1\}$ 是奇子集；反之，若 $\overline{X_1}$ 是奇子集，则 $\overline{X_1}\cup\{1\}$ 是偶子集，因此 S_n 的奇、偶子集均为 2^{n-1} 个.

(2)设 $A_n(B_n)$ 表示 S_n 中全体奇(偶)子集容量之和，又 $a_n(b_n)$ 表示 S_n 的奇(偶)子集的个数.

1)若 $n(n\geqslant3)$ 为奇数，S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：① S_{n-1} 的奇子集；② S_{n-1} 的每个偶子集与集合$\{n\}$的并集. 于是 $A_n=A_{n-1}+(B_{n-1}+n\cdot b_{n-1})=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot2^{n-2}$. 类似可得 $B_n=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot2^{n-2}$，因此 $A_n=B_n$.

2)若 $n(n\geqslant4)$ 为偶数，S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：① S_{n-1} 的所有奇子集；② S_{n-1} 的每个奇子集与集合$\{n\}$的并集. 于是 $A_n=A_{n-1}+(A_{n-1}+n\cdot a_{n-1})=2A_{n-1}+n\cdot2^{n-2}$. 类似地可得 $B_n=2B_{n-1}+n\cdot2^{n-2}$. 由 1)知 $A_{n-1}=B_{n-1}$，所以 $A_n=B_n$. 故对任何 $n\geqslant3$，$A_n=B_n$.

(3)设 X 在 S_n 中的补集为 $\overline{X}$，则 X 与 $\overline{X}$ 的容量之和等于 S_n 的容量，即 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，因为当 $n\geqslant3$ 时 $A_n=B_n$，故 S_n 中所有奇子集的容量之和是 $2^{n-2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n-3}\cdot n(n+1)$. $(n\geqslant3)$

5. 证明：

设$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=30^\circ$，点 A_1,A_2,A_3；B_1,B_2,B_3；C_1,C_2,C_3 分别是边 AB,BC,CA 的四等分点. 下面作三级分类讨论：

(1)点 A,B,C 同色时，结论显然成立.

(2)点 A,B,C 异色时，记 A 为红色，写作 A(红)，其余各点染色记号类同.

①A(红)，B(红)，C(蓝)时，由$\triangle ABC\backsim\triangle B_1BA\backsim\triangle C_3B_1C\backsim\triangle AC_3A_3\backsim\triangle A_3A_2B_1\backsim\triangle AA_2C_2\backsim\triangle C_2B_2C\backsim\triangle A_2AB_2$ 知，若结论不成立，则有 B_1(蓝)$\to C_3$(红)$\to A_3$(蓝)$\to A_2$(红)$\to C_2$(蓝)$\to B_2$(红)$\to A$(蓝)，这与 A(红)矛盾.

②A(红)，B(蓝)，C(红)时，由$\triangle ABC\backsim\triangle B_1AC\backsim\triangle A_3BB_1\backsim\triangle AC_3A_3\backsim\triangle C_3C_2B_1\backsim\triangle C_2B_2C\backsim\triangle A_2BB_2\backsim\triangle AA_2C_2$ 知，若结论不成立，则有 B_1(蓝)$\to A_3$(红)$\to C_3$(蓝)$\to C_2$(红)$\to B_2$(蓝)$\to A_2$(红)$\to A$(蓝)，这与 A(红)矛盾.

③A(红)，B(蓝)，C(蓝)时，又分两种情形：

(a)当 B_1(红)时，由$\triangle ABC\backsim\triangle B_1B_2A\backsim\triangle C_2B_2C\backsim\triangle AA_2C_2\backsim\triangle A_2BB_2$ 知，若结论不成立，则有 B_2(蓝)$\to C_2$(红)$\to A_2$(蓝)$\to B$(红)，这与 B(蓝)矛盾.

(b)当 B_1(蓝)时，由$\triangle ABC\backsim\triangle C_3B_1C\backsim\triangle AC_3A_3\backsim\triangle A_3BB_1$ 知，若结论不成立，则有 C_3(红)$\to A_3$(蓝)$\to B$(红)，这与 B(蓝)矛盾.

所以结论成立.

6. 解：

可先试验. 我们按从小到大分组的原则来处理.

A_1'：1，2，3，4，5，7，9，11，13，48，60，72，80，84，90，

A_2'：6，8，10，12，14，…，47，49，…，59，61，…，71，73，…，79，81，82，83，85，…，89，91，…，95.

容易看出，无论 96 属于 A_1' 还是 A_2'，都将出现三个数，其中两数之积等于第三数($2\times48=96$，$8\times12=96$). 下面用反证法证 $n=96$ 为所求.