高校经典教材配套考研辅导系列

数学分析题解精粹

第二版

钱吉林　等主编

众邦考试教育研究所　策划

湖北长江出版集团

崇文书局

高校经典教材配套考研辅导系列

数学分析题解精粹

（第二版）

钱吉林　等主编

崇文书局

(鄂)新登字07号

图书在版编目(CIP)数据

数学分析题解精粹/钱吉林主编.-武汉：崇文书局,2009

ISBN 978-7-5403-0652-6

Ⅰ.数学分析… Ⅱ.钱… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第068265号

出版发行:崇文书局

(武汉市黄鹂路75号 430077)

印　　刷:武汉武铁印刷厂

开　　本:850×1168 1/32

印　　张:19

版　　次:2011年11月第2版

印　　次:2011年11月第1次印刷

字　　数:476千字

定　　价:28.80元

数学分析题解精粹

编委会名单

前　　言

众所周知，任何高深的数学方法都是在把复杂的数学对象转化为数学分析与高等代数。因而打好扎实的数学基础，必将终生受益。

随着全球经济一体化的进程的加快，企业人才竞争也步入国际化，优胜劣汰将更趋明朗公开。为适应竞争，大家均需充电，以期提高素质和提升学历。本书旨在帮助学生对教材中的考点融会贯通，给考研人员以更丰富更实用的题解信息，其特点有：

1. **罕见的试题**：本书所列试题很多没对外发表过，是各院校秘而不宣的内部资料，诸多考生常常为获取这些试题而煞费苦心。本书试题涉及北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和中国科学院等近100所名牌权威院府。

2. **经典的解析**：本书的作者根据多年的经验积累，对各种考题作了双向归纳：一是对考题的题型作了归纳，二是对考题的解法作了归纳。希望达到抛砖引玉的效果，使考生能由此及彼，举一反三，从而在考试时应付裕如。

3. **便捷的结构**：全书共分10章，章下面是节，每节又分若干个考点。这对于考研人员是一本精美完整的综合复习资料。学生可通过章节，迅速找到自己所需要的内容，思路明晰，重点突出。

由于本书集知识性、资料性、方法性、应考性于一体，它不仅是考研人员的良师益友，更是理科、工科、经济类的学生学习《数学分析》与《高等数学》的参考书，也是高校数学教师的数学参考资料。本书末尾还附有两套《数学分析》考研模拟试题（含答案），一并提供参考。

在本书的编写出版过程中，武汉众邦考试教育研究所所长宋谨女士提出了良好的构想，众多同仁给予了大力支持，在此一并致谢。

本书的目标是：提供信息，帮您领先一步！

钱吉林

目　　录

第一章　函　　数

§1　函数的概念

【考点综述】

一、综述

1. 邻域(1)$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$ 称为 a 的 δ 邻域，其中 $\delta>0$.

(2)$U^{\circ}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为 a 的空心 δ 邻域，其中 $\delta>0$.

(3)$U^{\circ}_{+}(a)=(a,a+\delta)$ 和 $U^{\circ}_{-}(a)=(a-\delta,a)$ 分别称为 a 的 δ 右邻域和左邻域，其中 $\delta>0$.

2. 确界　设给定数集 S，

(1) 上确界　若存在数 η，满足 1)　$x\leqslant\eta,\forall x\in S$；2) $\forall\alpha<\eta$，都存在 $x_0\in S$，使 $x_0>\alpha$，则称 η 为 S 的上确界，记为 $\eta=\sup\limits_{x\in S}x=\sup S$.

(2) 下确界　若存在数 ξ，满足 1) $x\geqslant\xi,\forall x\in S$；2) $\forall\beta>\xi$，都存在 $y_0\in S$，使 $y_0<\beta$，则称 ξ 为 S 的下确界，记为 $\xi=\inf\limits_{x\in S}x=\inf S$.

(3) 确界原理　1) 非空有上(下)界的数集，必有上(下)确界. 2) 若数集有上(下)确界，则上(下)确界一定是唯一的.

3. 函数　(1) 函数定义　给定两个非空实数集 D 和 M，若有一个对应法则 f，使 D 内每一个数 x，都有唯一的一个数 $y\in M$ 与它对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数，记为 $y=f(x),x\in D$，并称 D 为函数的定义域，称 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数的值域.

(2) 一些重要的函数

1) 分段函数　函数在其定义域的不同部分用不同公式表达的这类函数，常称为分段函数. 例如

(ⅰ) 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(ⅱ) 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0,\text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

(ⅲ) 黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当 } x=\dfrac{p}{q},x\in(0,1),\dfrac{p}{q}\text{ 为既约分数},\\ 0,\text{当 } x=0,1 \text{ 和}(0,1)\text{ 中的无理数}.\end{cases}$$

2) 复合函数

$y=f(g(x)),x\in E^{*}$,

其中 $y=f(u),u\in D,u=g(x),x\in E,E^{*}=\{x\mid g(x)\in D,x\in E\}\neq\phi$.

3) 反函数　已知函数 $u=f(x),x\in D$,若对 $\forall y_0\in f(D)$,在 D 中有且只有一个值 x_0,使得 $f(x_0)=y_0$,则按此对应法则得到一个函数 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$. 称这个函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数.

4) 初等函数

(ⅰ) 基本初等函数　常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数称为基本初等函数.

(ⅱ) 初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数,统称为初等函数.

(ⅲ) 凡不是初等函数的函数,都称为非初等函数.

二、解题方法

1. 考点 1　求函数的定义域,它的解法如下:

(1) 已知函数表达式,求定义域. 常用方法是解不等式组.(见下面第 2 题)

(2) 已知抽象函数的定义域,求复合函数的定义域. 常用方法也是解不等式组.(见下面第 7 题和第 12 题).

2. 考点 2　求函数值及函数的值域. 它的解法如下:

(1) 求函数值. 常用方法是代入法(见下面第 2 题).

(2) 求函数表达式. 求复合函数的表达式常用方法也是代入法. 途径有两种,一种是由外向内(见下面第 3 题);另一种是由内向外(见下面第 2 题). 求函数表达式时,也可用图像法(见下面第 16 题).

(3) 求函数值域. 常用方法是求函数的最大值与最小值(见下面第 6 题).

3. 考点 3　求上下确界或证明确界的性质. 常用方法是利用确界的定义(见下面第 1 题).

【经典题解】

1. **(北京科技大学,1999 年)**　叙述数集 A 的上确界的定义,并证明:对任意有界数列 $\{x_n\},\{y_n\}$,总有 $\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.　①

解　若存在数 a 满足下面两条:

(1) $\forall x\in A$,都有 $x\leqslant a$;

(2) $\forall b<a$,一定存在 $x_0\in A,x_0>b$.

则称 a 为数集 A 的上确界，记为 $\sup A = a$.

再证 ① 式. 令 $a = \sup\{x_n\}$，$b = \sup\{y_n\}$，则 $x_n \leqslant a$，$y_n \leqslant b$，$(n = 1,2\cdots)$

$\therefore x_n + y_n \leqslant a + b$，$(n = 1,2,\cdots)$

$\therefore \sup\{x_n + y_n\} \leqslant a + b = \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$.

2.（**中国人民大学**） 设 $f(x) = \dfrac{1}{\lg(3-x)} + \sqrt{49 - x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域和 $f[f(-7)]$.

解 由 $3 - x > 0$，$3 - x \neq 1$，$49 - x^2 \geqslant 0$，解得 $x \in [-7,2) \cup (2,3)$，从而 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2) \cup (2,3)$.

$$f(-7) = \frac{1}{\lg 10} = 1, \therefore f(f(-7)) = \frac{1}{\lg 2} + 4\sqrt{3}.$$

3.（**海军工程学院**） 设 $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$，$(-\infty < x < +\infty)$，

$$g(x) = \begin{cases} x, x < 0, \\ x^2, x \geqslant 0. \end{cases}$$ 求 $f[g(x)]$.

解 $$f[g(x)] = \frac{g(x) + |g(x)|}{2} = \begin{cases} \dfrac{x + (-x)}{2} = 0, x < 0 \\ \dfrac{x^2 + x^2}{2} = x^2, x \geqslant 0. \end{cases}$$

4.（**南京邮电学院，兰州铁道学院**） 已知 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$，设 $f_n(x) = f\{f[\cdots(f(x))\cdots]\}$（$n$ 个 f），求 $f_n(x)$.

解 令 $f_1(x) = f(x)$，可用数学归纳法证明 $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}$. ①

当 $n = 1$ 时，显然 ① 式成立.

假设当 $n = k$ 时，① 式成立，当 $n = k + 1$ 时，

$$f_{k+1}(x) = f[f_k(x)] = f\left(\frac{x}{\sqrt{1 + kx^2}}\right) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1 + kx^2}}}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{1 + kx^2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1 + (k+1)x^2}},$$

即对 $n = k + 1$ ① 式也成立，即证 ① 式.

5.（**高数二，2001 年**） 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\} =$ （ ）

A. 0.　　B. 1.　　C. $\begin{cases}1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1.\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & |x| > 1.\end{cases}$

答　B. $\because |f(x)| \leqslant 1, \therefore f[f(x)] = 1, f\{f[f(x)]\} = f(1) = 1.$

6. 求函数 $y = \lg(1 - 2\cos x)$ 的定义域和值域.

解　由 $1 - 2\cos x > 0$,可得 $\cos x < \frac{1}{2}$,解得函数的定义域为

$D = \left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in Z\right\}$.

又因为$\max\limits_{x \in D}(1 - 2\cos x) = 1 - (-2) = 3, \inf\limits_{x \in D}(1 - 2\cos x) = 0$.

所以函数的值域:$f(D) = (-\infty, \lg 3]$.

7. 已知 $y = f(2^x)$ 的定义域为$[-1,1]$,求 $y = f(\log_2 x) + f(x-1)$ 的定义域.

解　$\because -1 \leqslant x \leqslant 1, \therefore \frac{1}{2} \leqslant 2^x \leqslant 2$,即 $f(x)$ 的定义域为$[\frac{1}{2}, 2]$.

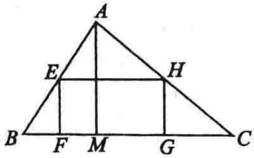
再由$\begin{cases}\frac{1}{2} \leqslant \log_2 x \leqslant 2, \\ \frac{1}{2} \leqslant x - 1 \leqslant 2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3\end{cases}$, $\therefore$ 所求定义域为$[\frac{3}{2}, 3]$.

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}, (-1 < x \leqslant 0)$,求 $f^{-1}(x)$.

解　由 $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}, (-1 < x \leqslant 0), \therefore \begin{cases}4 - x^2 = 4y^2, \\ x \leqslant 0.\end{cases}$

解得 $x = -2\sqrt{1 - y^2}$,互换 x, y 得 $y = -2\sqrt{1 - x^2}$. 当 $-1 < x \leqslant 0$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$.

$\therefore f^{-1}(x) = -2\sqrt{1 - x^2}, x \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$.



第 9 题图

9. 如图在底 $BC = b$,和高为 $AM = h$ 的三角形 ABC 中,内接一个高为 $EF = x$ 的矩形 $EFGH$,设此矩形的周长为 L,面积为 S,将 L 与 S 表成 x 的函数.

解　(1)$\because EH : b = (h - x) : h$,

$\therefore EH = b(1 - \frac{x}{h})$.

$L = 2(EH + EF) = 2(1 - \frac{b}{h})x + 2b, (0 < x < h)$.

(2)$S = EF \cdot EH = bx(1 - \frac{x}{h}), (0 < x < h)$.

10. 解不等式　$|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

解　当 $x\leqslant -2$ 时,原不等式变为

$-(x+2)+2-x\leqslant 12$, $\therefore x\geqslant -6$,此即 $-6\leqslant x\leqslant -2$.　①

当 $-2<x\leqslant 2$ 时,原不等式变为

$x+2+2-x\leqslant 12$, $\therefore -2<x\leqslant 2$.　②

当 $x>2$ 时,原不等式变为

$x+2+x-2\leqslant 12$, $\therefore x\leqslant 6$,此即 $2<x\leqslant 6$.　③

由 ①、②、③ 可得原不等式的解集为$[-6,6]$

11. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合,其中 $x\in\{x\}$, $y\in\{y\}$,且 $x\geqslant 0$ 及 $y\geqslant 0$. 证明:$\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}=\sup\{xy\}$.

证　设 $\sup\{x\}=a$, $\sup\{y\}=b$. 下证 $\sup\{xy\}=ab$.　①

$\because x\leqslant a, y\leqslant b$　$\therefore xy\leqslant ab$,　$\forall x\in\{x\}, y\in\{y\}$.　②

又 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$　$\therefore a\geqslant 0, b\geqslant 0$.

$\forall \varepsilon>0$,可取 $\varepsilon_1>0$,且使 $\varepsilon>\varepsilon_1(a+b)-\varepsilon_1^2$,

$\therefore ab-\varepsilon<ab-[\varepsilon_1(a+b)-\varepsilon_1^2]=(a-\varepsilon_1)(b-\varepsilon_1)$.　③

由 $\sup\{x\}=a$, $\sup\{x\}=b$, $\therefore$ 存在 $x_1>a-\varepsilon_1>0$, $y_1>b-\varepsilon_1>0$.

由 ③ 有 $x_1y_1>(a-\varepsilon_1)(b-\varepsilon_1)>ab-\varepsilon$.　④

由 ②,④ 得证　$\sup\{xy\}=ab$.

12. **(大连海运学院)**　设函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

解　由题设有 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}$ 当 $0\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{2}$ 时,所求定义域为 $[a,1-a]$;

当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a<0$ 时,定义域为$[-a,1+a]$;

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 或 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时,其定义域为空集.

13. **(华中科技大学)**　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试验证 $f\{f[f(f(x))]\}=x$,并求 $f[\dfrac{1}{f(x)}]$, $(x\neq 0, x\neq 1)$.

解　$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$.

$\therefore f\{f[f(f(x))]\}=f[f(x)]=x$.

又 $f(\frac{1}{f(x)}) = f(\frac{x-1}{x}) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1} = 1-x.$

14.**(同济大学)** 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, x<0, \\ 1, x \geqslant 0. \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 当 $x \geqslant 0$ 时，$f[f(x)] = f(1) = 1$.

当 $-1 \leqslant x < 0$ 时，$f[f(x)] = f(1+x) = 1$.

当 $x < -1$ 时，$f[f(x)] = f(1+x) = x+2$.

$\therefore f[f(x)] = \begin{cases} 1, \text{当 } x \geqslant -1 \text{ 时}, \\ x+2, \text{当 } x < -1 \text{ 时}. \end{cases}$

15.**(西北工业大学)** 设 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2}}$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

解 (1) $f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ \sqrt{2x}, x > 0. \end{cases}$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $f[f(x)] = \sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}}+\sqrt{(\sqrt{x+\sqrt{x^2}})^2}} = \sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}$

$= \sqrt{2f(x)}$.

$\therefore \frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2 = f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2}}$.

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{0}{x} = 0, \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x}}{x} = +\infty$,

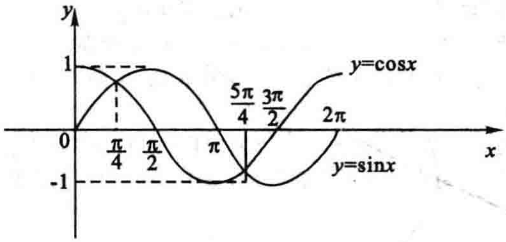
$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 不存在.

16. 设 $f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi], g(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$，令 $G(x) = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{f(x), g(x)\}, H(x) = \min\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{f(x), g(x)\}$.

求 (1) $G(x), H(x)$ 的表达式；(2) 当 $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时，求 $G(a)$ 和 $H(a)$.

解 (1) 先作出 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象（如下）

$$\therefore G(x) = \begin{cases} \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sin x, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], \\ \cos x, x \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right] \end{cases} \qquad ①$$



第 16 题图

$$H(x)=\begin{cases}\sin x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right],\\ \cos x, x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right],\\ \sin x, x\in\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right]\end{cases} \qquad ②$$

(2) 由上面 ①,② 两式可知,当 $a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时,

$G(a)=\sin a, H(a)=\cos a.$

§ 2　函数的性质

【考点综述】

一、综述

1. 有界性　设 $y=f(x), x\in D$.

(1) 若存在数 M,使 $f(x)\leqslant M, \forall x\in D$,则称 f 是有上界的函数.

(2) 若存在数 L,使 $f(x)\geqslant L, \forall x\in D$,则称 f 是有下界的函数.

(3) 若存在常数 C,使 $|f(x)|\leqslant C$,则称 f 是有界函数.

(4) 若对任意数 M,都存在 $x_0\in D$,使 $f(x_0)>M$,则称 f 是无上界函数,类似可定义无下界及无界函数.

2. 单调性　设 $y=f(x), x\in D$,若对 $\forall x_1,x_2\in D, x_1<x_2$,有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 f 在 D 上是递增函数.

(2) $f(x_1)<f(x_2)$,则称 f 在 D 上是严格递增函数.

类似可定义递减函数与严格递减函数.

3. 奇偶性　设 D 是对称于原点的数集,$y=f(x), x\in D$.

(1) 若 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 若 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 奇函数图象关于原点对称,偶函数图像关于纵轴对称.

4. 周期性(1) 设 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在正数 k，使 $f(x)=f(x\pm k)$，$\forall x\in D$. 则称 $f(x)$ 为周期函数，k 称为 f 的一个周期.

(2) 若 f 的所有周期中，存在一个最小正周期，则为 f 的基本周期.

二、解题方法

1. 考点 1　周期函数的判定与性质应用(见下面第 17、19 题)

常用方法：猜想周期 T 并加以证明(第 11 题)；用反证法证明不是周期函数(第 18 题).

2. 考点 2　函数奇偶性判定(见第 20、24 题)

常用方法：先看定义域是否关于原点对称(见第 19 题之(3))，再按定义验证等式 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$(见第 20、24 题).

3. 考点 3　单调性判定及应用(见第 23、25 题)

常用方法：按定义(第 21 题)；按图形(第 20 题)；由导数正负确定(第 25 题).

【经典题解】

17. **(清华大学)**　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$ 且对任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

(2) 问 a 取什么值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解　(1) $\because f(x+2)=f(2)+f(x)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，①

在 ① 式中，令 $x=-1$.

$a=f(1)=f(-1+2)=f(2)+f(-1)=f(2)-f(1)=f(2)-a$，

$\therefore f(2)=2a$.

$f(3)=f(1)+f(2)=3a$.

$f(5)=f(2)+f(3)=5a$.

(2) 由 ① 式知当且仅当 $f(2)=0$，即 $a=0$ 时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

18. **(高数三)**　$f(x)=|x\cdot\sin x|\,e^{\cos x}$，$(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　)

A. 有界函数.　　B. 单调函数.　　C. 周期函数.　　D. 偶函数.

答　D. $\because f(-x)=|-x\sin(-x)|\,e^{\cos(-x)}=f(x)$.

19. 有下列几个命题

(1) 任何周期函数一定存在最小正周期.

(2) $[x]$ 是周期函数.

(3) $\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数.

(4) $x\cos x$ 不是周期函数.

其中正确的命题有(　　)

A. 1.　　B. 2 个.　　C. 3 个.　　D. 4 个.

答　B. 其中

(1) 错. 比如 $f(x)=0$. 那么任何正实数都是它的周期,而无最小正实数.

(2) 错. 设 $f(x)=[x]$ 的周期为 $T>0$,并设 $[T]=m\geqslant 0$.

当 $m=0$ 时,则 $T=1-a$,其中 $0<a<1$. 那么

$[a+T]=1,[a]=0,\therefore [a+T]\neq [a]$.

这与 T 为周期矛盾. $\therefore m\neq 0$.

当 $m>0$ 时,$[T+1]=m+1,[1]=1,\therefore [1+T]\neq [1]$,也矛盾.

$\therefore [x]$ 不是周期函数.

(3) 对. $\because$ 若 $f(x)$ 是定义域 D 上周期函数,那么存在函数 T,使 $\forall x\in D$ 都有 $f(x\pm T)=f(x)$. 这必须有 $x\pm T\in D$. 而本题定义域 $D=[0,+\infty)$,若是周期函数,则 $0\in D$,必须 $-T\in D$,但 $-T\notin D$. 故不是周期函数.

(4) 对. 用反证法,设 $f(x)=x\cos x$ 的周期为 $T>0$,则

$f(0)=0=f(T)=T\cos T$.

$\therefore \cos T=0, T=n_o\pi+\dfrac{\pi}{2}, n_o\in Z$ 且 $n_o\geqslant 0$.

$f(\dfrac{\pi}{2}+T)=f(\pi+n_o\pi)=(n_o+1)\pi\cos[(n_o+1)\pi]$,

$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=0$,由 $f(\dfrac{\pi}{2}+T)=f(\dfrac{\pi}{2})$,

$\therefore \cos(n_0+1)\pi=0$,矛盾.

即证 $x\cos x$ 不是周期函数.

20. **(高数一,1999 年)** 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数.

答　A. 先证 C 错. $\because F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C_o$,其中 C_o 为某一常数. 令 $f(x)=1+\cos x$ 为周期 2π 的函数,而 $F(x)=x+\sin x+C_o$ 不是周期函数.

再证 D 错. 令 $f(x)=x$ 为单调增函数,而 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+C_o$ 不是单调增函数.

最后看 A 与 B,因为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C_o$,

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C_o=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+C_o \qquad ①$$

当 $f(x)$ 为偶函数时,取 $C_o\neq 0$,则由 ①

$F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C_o\neq -F(x)$.