教育部中央教育科学研究所
基础教育课程研究中心倾力推介

"向前看"
高考复习特版丛书

中国名牌大学

自主招生

试题解析

数学

2012年
冲刺版

主　　编　章　回
本册主编　张志朝

网络合作伙伴：中国教育在线高考频道（自主招生专栏）
http://gaokao.eol.cn/zizhu

教育科学出版社
ESPH
Educational Science Publishing House

教育部中央教育科学研究所基础教育课程研究中心倾力推介

“向前看”高考复习特版丛书

中国名牌大学自主招生试题解析

数学

主　　编　章　回

本册主编　张志朝

编写人员　张志朝　徐　伟　许云峰

孙东升　袁如标　谢广喜

教育科学出版社

出 版 人　所广一
责任编辑　韩敬波　曾　凯
责任印刷　曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

中国名牌大学自主招生试题解析：2012 年冲刺版．数学／章回主编．—2 版．—北京：教育科学出版社，2011．7
(“向前看”高考复习特版丛书)
ISBN 978－7－5041－5900－7

Ⅰ．①中…　Ⅱ．①章…　Ⅲ．①中学数学课—高中—题解—升学参考资料　Ⅳ．①G632．479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131733 号

出版发行　教育科学出版社

社　址	北京・朝阳区安慧北里安园甲 9 号	市场部电话	010－64989009
邮　编	100101	编辑部电话	010－64989374
传　真	010－64891796	网　址	http：//www.esph.com.cn
经　销	各地新华书店		
印　刷	江苏凤凰盐城印刷有限公司		
开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16	版　次	2011 年 7 月第 2 版
印　张	14	印　次	2011 年 7 月第 1 次印刷
字　数	280 千	定　价	40.00 元

编写说明

（修订版）

一、缘起

自主招生是扩大高校自主权、深化高校招生录取制度改革的重要举措，也是选拔培养优秀创新人才、促进素质教育全面开展的有益探索。2003年，教育部批准在清华大学、北京大学等22所高校中进行自主选拔录取改革试点。2006年开始，上海交通大学、复旦大学自主选拔录取办法又有新突破，即部分有资格的上海考生只要通过高校组织的“申请资格测试”，就可以不用参加全国高考统考，面试决定录取结果。到2011年，全国获批参与自主招生的高校已超过80所，许多高校在录取比例上也取消了“控制在年度本科招生计划总数5%以内”的限制……越来越多的重点中学、考生和家长开始关注自主招生。但就对自主招生的认识而言，包括自主招生的相关政策、各高校自主招生的实施办法、笔试面试的考查内容和考查形式等，还没有像高考那样被广泛了解。不少中学在组织学生参加自主招生时由于缺乏系统了解，往往感觉无从下手；很多考生在准备自主招生复习时，常常无暇兼顾高考复习，很有可能顾此失彼，甚至高考“砸锅”。

针对上述状况，我们联合中国教育在线，及时了解自主招生资讯，积极搜集高校自主招生试题，并约请了部分高校和知名中学名特优教师，认真研究相关政策，深入分析各类试题，并着力打通自主招生试题和一般高考试题的各个环节，耗时数年，策划编写了这套“向前看”高考复习特版丛书。

二、丛书名介绍

相对于高考选拔录取而言，高校自主招生是一个新生事物，它是新世纪我国教育改革发展的一个构成部分。在关注一般高考的同时，了解并着力研究高校自主招生的相关内容无疑是具有前瞻性意义的。具体表述如下：

第一，目前，已经开始自主招生的高校都是在国内排名靠前、学科设置齐全、综合实力拔尖的学校，参与这些学校的自主招生考试既能促进学生特长的发展和综合能力的培养，又能减轻学生参加高考和走进名校的压力。

第二，高校自主招生考试时间在每年高考之前，高校自主招生试题与普通高考试题有相通之处；了解高校自主招生、掌握各高校自主招生试题考查内容和考查形式，能有

效地让学生明确普通高考的考查要求，一举两得。

第三，从各高校自主招生选拔考生的标准看，自主招生注重选拔综合素质高和有专项特长的学生，这一标准在一定程度上揭示了高校在人才培养方面的基本要求和目标，积极了解和参与自主招生对考生在大学的进一步深造和将来就业都是一个很好的铺垫和准备。

三、内容构成

丛书以中学课程设置的九个学科安排分册，语文、数学、英语单独成册，政治、历史、地理作为一册，物理、化学、生物作为一册，面试与相关政策资讯等作为一册，套书共6册。除面试外，其余各册均以高考复习的知识专题进行分类，每个专题包含"专题引导"、"真题解析"、"巩固练习"、"提升训练"和"仿真训练试卷"五部分内容，"专题引导"侧重整体把握，概述高校自主招生试题（笔试）对本专题内容的考查情况和涉及此专题内容的常用解题思路等。"真题解析"筛选近年来名牌高校自主招生笔试真题进行点拨和评注，用实例的方式让考生掌握解题技巧，同时精选数道近三年的高考真题，供考生对两种考试形式进行比较学习。"巩固练习"和"提升训练"则选取少量高校自主招生的真题或模拟题，让考生进一步巩固提升。"仿真训练试卷"则是为加强考生考前训练的针对性而专门设计的，试卷糅合了近年知名高校尤其是联考高校的试卷形式和内容，相信能对考生的备考训练有所帮助。不同学科在栏目名称和题目编排方式上稍有差别。

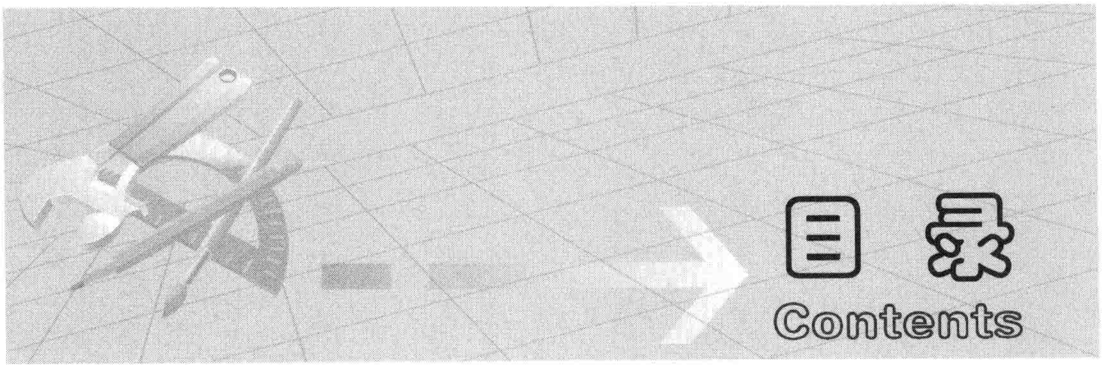
面试题的体例设计是以主题内容进行分类，将各校近几年有代表性的面试题细分为10个类别，每个类别下安排数量不等的题目，每个题目分别从"思路点拨"、"考查要点"和"应试提醒"三个方面进行解析，帮助考生掌握回答面试题的一般思路和方法。最后还设计了"提升训练"栏目，有助于考生进行巩固练习。自主招生相关政策和部分高校自主选拔录取实施办法等也分别进行归纳、整理后编入面试分册。这样，丛书内容便基本囊括了自主招生备考的各个环节，方便学校和考生使用。

此外，我们还整理、编辑了艺术考试类的各类面试题、高校面试官建议与考生经验以及艺考文学常识等内容，安排在面试分册中，希望能对参与高校自主招生面试和艺术考试类面试的考生提供一些可资借鉴的经验。

在丛书的策划编写过程中，我们通过多种渠道搜集高校近年的自主招生试题，对搜集到的试题也进行了较为细致的加工整理。当然由于编者水平有限，题目的表述和解析的文字内容仍或存在不足之处，专家和读者若有发现，还望不吝指教。

本书编写组

2011年6月



目 录
Contents

专题一 集合与函数

专题引导

在自主招生考试中，对集合与函数的考查主要是以下两个方面：一是考查学生对集合知识与数学其他知识的综合应用水平；二是考查学生对函数知识掌握水平与利用函数、方程、不等式的相互关系，对具体问题进行分析，最终解决问题的水平.

由于集合与函数是高等数学的重要基础，更是高中数学的重要内容，所以近几年来的高考与自主招生考试，在选择、填空、解答三种题型中，每年都有集合与函数的问题，并且占有较大的比例.

学习要领

1. 由于函数的观点和方法贯穿高中数学的全过程，所以对函数内容的深刻理解与灵活运用对学习高中数学的其他内容至关重要.

2. 由于集合与函数是自主招生考试的重点，复习时建议把此讲内容分成集合，函数的概念、性质、图象，函数的应用三个部分进行系统的归纳，搞清重点、难点、易错点，及时总结规律和方法，以达到事半功倍的效果.

相关法则提点

集合的运算法则

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$\complement_u(A \cup B) = (\complement_u A) \cap (\complement_u B)$$
$$\complement_u(A \cap B) = (\complement_u A) \cup (\complement_u B)$$

容斥原理

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} Card(A \cup B \cup C) = {} & Card(A) + Card(B) + Card(C) \\ & - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) \\ & - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

函数导数的四则运算法则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(uv)' = u'v + uv'$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

真题解析

例 1　(2011 年清华大学等七校联考)

已知 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$，它的一条切线过点$(-1, 1)$，切点不是$(-1, 1)$，求切线的斜率.

解: $\because$ 切点在函数图象上，$\therefore$ 可设切点坐标为：$(x_0,\ x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1)$

又 $\because$ 切点不是$(-1, 1)$，$\therefore$ $x_0 \neq -1$.

$\because$ 切线的斜率为：$f'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 - 2$，

$\therefore$ 切线方程为：$y - (x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\because$ 切线过点$(-1, 1)$，$\therefore$ $1 - (x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1) = (3x_0^2 - 2x_0 - 2)(-1 - x_0)$.

整理可得：$2x_0^3 + 2x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0$，$\therefore$ $x_0^3 + x_0^2 - x_0 - 1 = 0$

$\therefore$ $(x_0 - 1)(x_0 + 1)^2 = 0$. $\because$ $x_0 \neq -1$.

$\therefore$ $x_0 = 1$.

$\therefore$ 所求的切线的斜率为：$f'(1) = -1$.

评注: 这类函数曲线上一点的切线问题(但切点坐标未知的情形)已在高考题中多次出现(如 2009 年全国卷 Ⅰ 第 21 题、2008 年江苏卷第 8 题等)，值得注意.

例 2　(2011 年同济大学等九校联考)

(1) 设 $f(x) = x\ln x$，求 $f'(x)$；

(2) 设 $0 < a < b$，求常数 C，使得 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |\ln x - C|\, dx$ 取得最小值；

(3) 记(2)中的最小值为 m_{ab}，证明 $m_{ab} < \ln 2$.

解： (1) $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

(2) 由 $\ln t$ 的单调性，易知使上式取最小值的 C 必须满足 $\ln a < C < \ln b$，故可定义函数 $g(u)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b|\ln x-\ln u|dx\ (a<u<b)$，

$$\begin{aligned}\text{则 } g(u)&=\frac{1}{b-a}\int_a^u(\ln u-\ln x)dx+\frac{1}{b-a}\int_u^b(\ln x-\ln u)dx\\&=\frac{2u}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}\ln u+\frac{b\ln b+a\ln a}{b-a}-\frac{b+a}{b-a},(*)\end{aligned}$$

令 $g'(u)=0$，得 $u=\dfrac{a+b}{2}$，即当 $C=\ln\dfrac{a+b}{2}$ 时取最小值.

注：此处要用到不定积分公式 $\int\ln xdx=x\ln x-x+C$. 但试题中并未直接给出它，而是将其隐含在问题(1)的结果之中.

(3) 将(2)中得到的 $u=\dfrac{a+b}{2}$ 代回，即有

$$\begin{aligned}m_{ab}=g\left(\frac{a+b}{2}\right)&=\frac{b+a}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}\ln\frac{b+a}{2}+\frac{b\ln b+a\ln a}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}\\&=\frac{b\ln b+a\ln a}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}\ln\frac{a+b}{2},\ (0<a<b)\text{，下面我们用分析法证明：}\end{aligned}$$

$$\frac{b\ln b+a\ln a}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}\ln\frac{a+b}{2}<\ln 2\ (0<a<b)$$

$$\Leftrightarrow b\ln b+a\ln a-(b+a)\ln\frac{a+b}{2}<(b-a)\ln 2$$

$$\Leftrightarrow b\ln b+a\ln a-(b+a)\ln(a+b)<(b-a)\ln 2-(b+a)\ln 2=-2a\ln 2$$

$$\Leftrightarrow b\ln\frac{b}{a+b}+a\ln\frac{a}{a+b}<-2a\ln 2$$

$$\Leftrightarrow t\ln\frac{t}{1+t}+\ln\frac{1}{1+t}<-2\ln 2\ \left(t=\frac{b}{a}>1\right),$$

即 $t\ln t-(t+1)\ln(t+1)+2\ln 2<0\ (t>1)$.

于是构造函数 $h(t)=t\ln t-(t+1)\ln(t+1)+2\ln 2\ (t>1)$，显然 $h(1)=0$，且 $h'(t)=\ln t+t\cdot\dfrac{1}{t}-\ln(t+1)-(t+1)\cdot\dfrac{1}{t+1}=\ln\dfrac{t}{t+1}$，而已知 $t>1$，故 $h'(t)<0$，即 $h(t)$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 单调递减，于是 $h(t)=t\ln t-(t+1)\ln(t+1)+2\ln 2<h(1)=0\ (t>1)$ 成立，于是，原要证的不等式也成立.

评注： 这是一道具有高等数学背景的问题，想到构造积分背景下的函数是解决问题的关键所在. 第(3)问证明的最后部分，充分注意到字母 a, b 在表达式中的齐次性，从而实现了降元(将二元函数问题转化为一元函数问题).

例 3 (2011 年北京大学等十三校联考)

求 $f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\cdots+|2011x-1|$ 的最小值.

解: 引理① 对任意的实数 x，有 $|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$ 成立，不等式取等号条件为 $a\leqslant x\leqslant b$；

引理② 对任意的实数 x，且 $a<c<b$ 有 $|x-a|+|x-b|+|x-c|\geqslant|a-b|$ 成立，不等式取等号条件为 $x=c$；

引理③ 更一般地有，对任意的实数 x，若有 $2n$ 个实数 $x_i(i=1, 2, 3\cdots, 2n)$，且 $x_1<x_2<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}$，当 $x\in[x_n, x_{n+1}]$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{2n}|x-x_i|$ 取得最小值；又若有 $2n+1$ 个实数 $x_i(i=1, 2, 3\cdots, 2n, 2n+1)$，且 $x_1<x_2<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}<x_{2n+1}$，当 $x=x_{n+1}$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{2n+1}|x-x_i|$ 取得最小值.

$f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\cdots+|2011x-1|$，将其改写为

$f(x)=|x-1|+2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+3\left|x-\dfrac{1}{3}\right|+\cdots+2011\left|x-\dfrac{1}{2011}\right|=\sum\limits_{i=1}^{2011}i\left|x-\dfrac{1}{i}\right|$，注意到 $g(x)=\left|x-\dfrac{1}{i}\right|$ 的零点为 $x=\dfrac{1}{i}$，则

$|x-1|+\left|x-\dfrac{1}{2011}\right|\geqslant\left|1-\dfrac{1}{2011}\right|$，当 $x\in\left[\dfrac{1}{2011}, 1\right]$ 时取最小值(不等式取等号，下略)；

$2\left(\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x-\dfrac{1}{2011}\right|\right)\geqslant2\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2011}\right|$，当 $x\in\left[\dfrac{1}{2011},\dfrac{1}{2}\right]$ 时取最小值；

$3\left(\left|x-\dfrac{1}{3}\right|+\left|x-\dfrac{1}{2011}\right|\right)\geqslant3\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2011}\right|$，当 $x\in\left[\dfrac{1}{2011}, \dfrac{1}{3}\right]$ 时取最小值；

……

为了确定函数 $f(x)$ 取最小值的公共区间，需要试探寻找正整数 j(或最接近的较小正整数)，使得 $1+2+3+\cdots+j=(j+1)+(j+2)+\cdots+2010+2011$，即

$1+2+3+\cdots+j=\dfrac{2011\times2012}{2\times2}$，即 $j(j+1)=2011\times1006=2023066$，注意到

$\sqrt{2023066}\approx1422$ (此工作及下面的试探计算最好有计算器!)，记 $g(j)=j(j+1)$，发现 $g(1422)=2023506>2023066$，$g(1421)=2020662<2023066$. 则

$\dfrac{g(1421)}{2}=1010331$，而 $\dfrac{2023066}{2}=1011533$，小于一半，二者之差为 1 202，即将原来函数表达式按照上面的思路两两配对后，最后剩下的单独一项为 $1202\left|x-\dfrac{1}{1422}\right|\geqslant0$，显然，若取 $x=\dfrac{1}{1422}$，则上面的所有不等式都能取等号，将 $x=\dfrac{1}{1422}$ 代入原始函数式，对应

$[f(x)]_{\min}=\left[1-\dfrac{1}{1422}+1-\dfrac{2}{1422}+\cdots+\left(1-\dfrac{1422}{1422}\right)\right]+\left[\left(\dfrac{1423}{1422}-1\right)+\left(\dfrac{1424}{1422}-1\right)+\cdots+\left(\dfrac{2011}{1422}-1\right)\right]=1422-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{1422}i}{1422}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{589}i}{1422}=1422-\dfrac{\sum\limits_{i=590}^{1422}i}{1422}=1422-\dfrac{2012\times833}{2\times1422}\approx1422-$

589 =833.

评注: 这道题的命题背景是绝对值不等式 $|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$，但必须深入分析问题的具体情况，充分注意到不等式取等号的条件，然而，最后计算这个最小值时，不宜采用函数变化以后的形式，代回其原始形式计算反倒更简便. 请读者联系自主招生试题 2010 年浙江大学第 6 题及普通高考试题 2006 年全国卷Ⅱ理第 12 题.

例 4 （2010 年清华大学等五校联考）

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(-1)=0$. 设 $\varphi(x)=\sin^2 x+m\cos x-2m$，集合 $M=\left\{m\,\middle|\,对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \varphi(x)<0\right\}$，$N=\left\{m\,\middle|\,对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ f(\varphi(x))<0\right\}$，求 $M\cap N$.

解: $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(-1)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 也单调递增，且 $f(1)=0$，于是 $f(x)<0$ 等价于 $x<-1$ 或 $0<x<1$.

$$N=\left\{m\,\middle|\,对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ f(\varphi(x))<0\right\}$$

$$=\left\{m\,\middle|\,对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \varphi(x)<-1\ 或\ 0<\varphi(x)<1\right\},$$

$$M\cap N=\left\{m\,\middle|\,对任意的\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \varphi(x)<-1\right\}.$$

由 $\varphi(x)<-1$ 得 $\cos^2 x-m\cos x+2m-2>0$.

令 $t=\cos x$，则 $0\leqslant t\leqslant 1$，于是问题等价转化为：

当不等式 $t^2-mt+2m-2>0$ 在 $t\in[0,1]$ 上恒成立时，求实数 m 的取值范围.

由 $t^2-mt+2m-2>0\,(0\leqslant t\leqslant 1)$ 得 $m>\dfrac{t^2-2}{t-2}$，

设 $h(t)=\dfrac{t^2-2}{t-2}\,(0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $h'(t)=\dfrac{t^2-4t+2}{(t-2)^2}$.

令 $h'(t)=0$ 解得 $t=2-\sqrt{2}$ ($t=2+\sqrt{2}$ 舍去).

当 $0\leqslant t<2-\sqrt{2}$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 为增函数；

当 $2-\sqrt{2}<t\leqslant 1$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 为减函数；

当 $t=2-\sqrt{2}$ 时，$h(t)$ 取得 $[0,1]$ 上的最大值 $4-2\sqrt{2}$，故 $M\cap N=(4-2\sqrt{2},+\infty)$.

评注: (1) 在审题时，如果作出函数 $f(x)$ 的示意图，则对于我们探明 $M\cap N$ 所含元素的特征有很大帮助.

(2) 在上述求解过程中，将问题等价转化后，进一步的转化采用的方法是分离参数法，得到 $m>\dfrac{t^2-2}{t-2}$ 对任意 $t\in[0,1]$ 均成立后，就转化成了 m 要大于函数 $h(t)\,(t\in[0,1])$ 的最大值，最后求出 $h(x)$ 的最大值就获得了问题的解.

(3) 求函数 $h(x)$ 的最大值也可以这样求：$h(t)=\dfrac{t^2-2}{t-2}=\dfrac{t^2-2t+2t-4+2}{t-2}=t+2+\dfrac{2}{t-2}=-\left[2-t+\dfrac{2}{2-t}\right]+4\leqslant -2\sqrt{2}+4$(当且仅当 $t=2-\sqrt{2}$ 时，取等号).

例 5　(2010 年南京大学特色测试，改编)

已知 $A=\left\{x\left|\dfrac{2x+1}{x-3}\geqslant 1\right.\right\}$，$B=\left\{y\left|y=b\arctan t,-1\leqslant t\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3},b\leqslant 0\right.\right\}$，$A\cap B=\varnothing$，求 b 的取值范围.

解： $\because \dfrac{2x+1}{x-3}\geqslant 1$，$\therefore \dfrac{2x+1}{x-3}-1\geqslant 0$，$\therefore \dfrac{x+4}{x-3}\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant -4$ 或 $x>3$.

$\therefore A=(-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$. 又 $\because -1\leqslant t\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\arctan t\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，

$\because b\leqslant 0$，$\therefore \dfrac{b\pi}{6}\leqslant b\arctan t\leqslant -\dfrac{b\pi}{4}$. $\therefore B=\left[\dfrac{b\pi}{6},-\dfrac{b\pi}{4}\right]$(当 $b=0$ 时，$B=\{0\}$).

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，应有：$\dfrac{b\pi}{6}>-4$ 且 $-\dfrac{b\pi}{4}\leqslant 3$.

$\therefore b>-\dfrac{24}{\pi}$ 且 $b\geqslant -\dfrac{12}{\pi}$. $\therefore b\geqslant -\dfrac{12}{\pi}$. 又 $\because b\leqslant 0$. $\therefore -\dfrac{12}{\pi}\leqslant b\leqslant 0$

$\therefore b$ 的取值范围为：$\left[-\dfrac{12}{\pi},0\right]$.

评注： 这里的集合 A 与 B 都是用描述法表示的，所含元素不明确，也不具体，所以需要将它转化为区间表示. 这样根据 $A\cap B=\varnothing$ 就能探求 b 的取值范围了.

例 6　(2010 年南京大学特色测试，改编)

函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$

(1) 证明：$f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$；　(2) $f(4)=-4$，求 $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x-12}\right)\geqslant -12$ 的解集.

解： (1) 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，取 $x=y=1$ 有 $f(1)=0$. 再取 $y=\dfrac{1}{x}$，则有 $f(1)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. 故有 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，于是 $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\dfrac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

(2) $\because f(4)=-4$，$\therefore f(16)=2f(4)=-8$，$\therefore f(64)=f(16)+f(4)=3f(4)=-12$.

又由第(1)题结论知：$f(x)-f\left(\dfrac{1}{x-12}\right)=f[x\cdot(x-12)]$，于是原不等式等价于：$f(x^2-12x)\geqslant f(64)(x-12>0)$.

又∵ $f(x)$是定义在$(0, +\infty)$上的减函数 ∴ $x^2-12x\leqslant 64$并且$x-12>0$. ∴ $-4\leqslant x\leqslant 16$且$x>12$.

∴ $12<x\leqslant 16$，所求不等式解集为$(12, 16]$.

评注: 这是一道抽象函数问题，第(1)小题是用赋值法进行求证的. 而第(2)小题的求解，一定要善于运用第(1)题的结论；另外要特别关注定义域，否则所求解集就会扩大化，导致增根.

例 7 (2010 年浙江大学)

设 $M=\{x\mid f(x)=x\}$，$N=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1) 求证：$M\subseteq N$；(2) $f(x)$为单调递增时，是否有$M=N$? 并证明.

证明: (1) 若$M=\varnothing$，则显然有$M\subseteq N$.

若$M\neq\varnothing$，则任意$x_0\in M$，满足$f(x_0)=x_0$，从而$f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$.

故$x_0\in N$，所以亦有$M\subseteq N$.

(2) 当$f(x)$为单调递增函数时，一定有$M=N$，下面用反证法证明：

若$M\neq N$，由于$M\subseteq N$，必有$M\subsetneqq N$，于是可设$x_1\in N$，但$x_1\notin M$，因此$f(x_1)\neq x_1$.

(1) 若$f(x_1)>x_1$，则由$f(x)$为单调递增可得：$f[f(x_1)]>f(x_1)$，即$x_1>f(x_1)$矛盾.

(2) 若$f(x_1)<x_1$，则同样由于$f(x)$单调递增，所以$f[f(x_1)]<f(x_1)$，即$x_1<f(x_1)$，也矛盾.

综合(1)、(2)可知：$f(x_1)=x_1$，因此，$x_1\in M$，故$M\subsetneqq N$不成立，所以$M=N$.

评注: (1) 这里当$N=\{x\mid f_n(x)=x\}$(其中$f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f_1[f_{n-1}(x)]$，$n\geqslant 2$)时，第(1)小题结论$M\subseteq N$总成立.

(2) 对于第(2)小题，运用反证法是结论获证的关键，同样，我们也可证明当$f(x)$为单调递增时，亦有$M=N(N=\{x\mid f_n(x)=x\})$，注意当$f(x)$为单调递减函数时，就未必有$M=N$成立了，例如：$f(x)=-x$，此时$M=\{x\mid f(x)=x\}=\{0\}$，而$N=\{x\mid f[f(x)]=x\}=\{0, 1\}$，∴ $M\neq N$.

例 8 (2010 年复旦大学)

设集合X是实数集$\mathbf{R}$的子集，如果点$x_0\in\mathbf{R}$满足：对任意$a>0$，都存在$x\in X$，使得$0<|x-x_0|<a$，那么称x_0为集合X的聚点. 用$\mathbf{Z}$表示整数集，则在下列集合：①$\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{Z}, n\geqslant 0\right\}$，②$\mathbf{R}\backslash\{0\}$，③$\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbf{Z}, n\neq 0\right\}$，④整数集$\mathbf{Z}$中，以0为聚点的集合有 (　　)

A. ②③　　B. ①④　　C. ①③　　D. ①②④

解: 这是一道涉及新定义的问题. 根据定义，"聚点"这个概念应理解为以任意无穷小为半径，以x_0为圆心的圆内都至少有X的一个元素(不包括x_0).

对集合①$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$，若取$a=\frac{1}{3}$，则不存在$x\in\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{Z}, n\geqslant 0\right\}$，满足$0<$

$|x-0|<\frac{1}{3}$. 显然②③是以0为聚点. 对集合④,若令 $a=\frac{1}{2}$ $\Big($不是唯一的取法,也可取 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, …, 只要 $a<1$ 均可$\Big)$,则也不存在 $x\in X$,使得 $0<|x-0|<a$.

综上,应选 A.

评注: "聚点"是高等数学中的一个重要概念,像这类高等数学的概念下放到中学考试中的现象,在自主招生考试中屡见不鲜.

这是根据"聚点"的定义,在以"聚点"为圆心的圆内总是含有无数多个 X 的元素.

例 9 (2010 年南开大学数学特长班)

求证: $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

解: 令 $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ $\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$. $f(0)=0$, $f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$, $f''(x)=-\sin x+x>0$ $\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$. $\therefore$ $f'(x)$ 单调递增. 又 $\because$ $f'(0)=0$, $\therefore$ $f'(x)>0$. 则 $f(x)$ 单调递增. $\therefore$ $f(x)>f(0)=0$,即 $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$. 得证.

评注: 我们应用三角函数线可以证明: $\sin x<x<\tan x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. 而当不等式无法应用三角函数线来求证时,这时"导数"就有用武之地.

例 10 (2009 年华南理工大学)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-4,+\infty)$ 的单调增函数,要使得对于一切实数 x,不等式 $f(\cos x-b^2)\geqslant f(\sin^2 x-b-3)$ 恒成立,求实数 b 的取值范围.

解: 由题设条件可得以下的不等式组:

$\begin{cases}\cos x-b^2\geqslant \sin^2 x-b-3,\\ \cos x-b^2\geqslant -4,\\ \sin^2 x-b-3\geqslant -4.\end{cases}$ 它又等价于: $\begin{cases}\cos x-b^2\geqslant \sin^2 x-b-3,\\ \sin^2 x-b-3\geqslant -4.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}b^2-b\leqslant \cos x-\sin^2 x+3,\\ b\leqslant \sin^2 x+1.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}b^2-b\leqslant \left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4},\\ b\leqslant \sin^2 x+1.\end{cases}$ 由于上式要对一切实数 x 均成立,故应有 $b^2-b\leqslant\frac{7}{4}$ 且 $b\leqslant 1$. 因此, $\frac{1}{2}-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ 且 $b\leqslant 1$. $\therefore$ $\frac{1}{2}-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 1$.

评注: 在上述解题过程中,首先是利用函数的定义域与单调性,建立了不等式组模型,接下来就是利用分离参数法并得到最后一个不等式组. 考虑到对任意的 x 这个不等

式组都要成立，所以不等式组中每一个不等式的左边都要小于等于对应右边的最小值. 这样就得到了关于 b 的不等式组，并最终求得 b 的取值范围.

例 11 （2009 年清华大学文科）

已知函数 $f(x)$ 是三次项系数为 $\frac{a}{3}$ 的三次函数，并且有 $f'(x)-9x<0$ 的解集为 $(1, 2)$. (1) 若 $f'(x)+7a=0$ 仅有 1 解，求 $f'(x)$ 的表达式；(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增，求实数 a 的取值范围.

解： 由题设条件可设 $f(x)=\frac{a}{3}x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

于是 $f'(x)=ax^2+2a_2x+a_1$，由于 $f'(x)-9x<0$ 的解集为 $(1, 2)$.

$$\therefore \begin{cases} a+2a_2+a_1-9=0, \\ 4a+4a_2+a_1-18=0. \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} a_1=2a, \\ 2a_2=9-3a. \end{cases}$$

$\therefore f'(x)=ax^2+(9-3a)x+2a$.

(1) 由于 $f'(x)+7a=0$ 仅有 1 解，且 $a\neq 0$，$\therefore \Delta=(9-3a)^2-36a^2=0$，解之得 $a=1$ 或 $a=-3$. 又 $\because$ 不等式 $f'(x)-9x<0$ 的解集为 $(1, 2)$，

$\therefore a>0$，故 $a=1$. $\therefore f'(x)=x^2+6x+2$.

(2) 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增，$\therefore f'(x)=ax^2+(9-3a)x+2a\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

$\therefore \Delta=(9-3a)^2-8a^2\leqslant 0$ 的解集即为所求. $\therefore$ 有 $a^2-54a+81\leqslant 0$. $\therefore 27-18\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 27+18\sqrt{2}$.

评注： 该例涉及了导数、方程、二次函数与不等式等知识，所以较有深度.

例 12 （2008 年清华大学）

已知：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$，$f(2x)-f(x)=x^2$. 求 $f(x)$.

解： 由已知，得

$$f(x)-f\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{4}x^2$$

$$f\left(\frac{1}{2}x\right)-f\left(\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{16}x^2$$

$$f\left(\frac{1}{4}x\right)-f\left(\frac{1}{8}x\right)=\frac{1}{64}x^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x\right)-f\left(\frac{1}{2^n}x\right)=\frac{1}{4^n}x^2$$

累加可得：$f(x)-f\left(\frac{1}{2^n}x\right)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{64}x^2+\cdots+\frac{1}{4^n}x^2$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}x^2=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)x^2$$

$\therefore f(x)=f\left(\frac{1}{2^n}x\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)x^2$

又 $\because \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$，$\therefore f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}x\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=f(0)+\frac{1}{3}x^2=1+\frac{x^2}{3}$.

评注： 本例求解的关键有两个：一是对条件"$f(2x)-f(x)=x^2$"如何应用；另一个是对 $f(x)=f\left(\frac{1}{2^n}x\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)x^2$ 取极限. 对于高中生而言，赋值与取极限的"手段"都不常用. 希望读者对上述求解过程好好"品味".

例 13　(2008 年上海交通大学)

若 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，$g(x)=f^{-1}(x)$，则 $g\left(\frac{3}{5}\right)=$ ________.

解： 设 $g\left(\frac{3}{5}\right)=f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=t$，则 $f(t)=\frac{3}{5}$，$\frac{2^t-1}{2^t+1}=\frac{3}{5}$，$\therefore t=2$.

评注： 解决反函数问题要特别注意利用原函数和反函数之间的关系，这样可以大大减少问题的运算量.

例 14　(2008 年上海交通大学)

函数 $y=\frac{x+1}{x^2+8}$ 的最大值为________.

解： 方法一：("Δ"法) $\because yx^2-x+8y-1=0$，$\therefore \Delta=1-4y(8y-1)\geqslant 0$，$\therefore -\frac{1}{8}\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}$；

方法二：当 $x\leqslant -1$ 时，$y\leqslant 0$，最大值显然不在此时取得，故下面我们只考虑 $x>-1$ 的情形即可，令 $x+1=t$，则 $y=\frac{t}{t^2-2t+9}=\frac{1}{t+\frac{9}{t}-2}\leqslant\frac{1}{4}$.

评注： "Δ"法和基本不等式法是解决分式二次函数常用的方法.

例 15　(2008 年浙江大学)

$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\frac{5}{4}\right\}$，$B=\{(x,y)\mid |x-1|+2|y-2|\leqslant a\}$，$A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

解: 注意到问题的结构特点,可先换元化简,令 $X=x-1$, $Y=y-2$, 则问题等价转化为: $A_1=\left\{(X, Y) \middle| X^2+Y^2 \leqslant \frac{5}{4}\right\}$, $B_1=\{(X, Y) \mid |X|+2|Y| \leqslant a\}$, $A_1 \subseteq B_1$, 求 a 的取值范围.

注意到 A_1、B_1 是封闭点集区域,不但关于 x 轴、y 轴对称,而且关于坐标原点 O 对称,于是集中精力研究两点集在第一象限的关系即可. 通过画图(数形结合)容易发现,a 越大,越容易满足要求,最小的正数 a 恰好对应二者相切的情形,此时,圆心 $O(0, 0)$ 到直线 $X+2Y=a$ 的距离等于半径,于是 $d=\frac{|-a|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,临界的 $a=\frac{5}{2}$, 所以 a 的取值范围是 $a \geqslant \frac{5}{2}$.

评注: 本题着重于考查考生的连续化简能力(化归与转化的思想方法),对于有些难度较大的问题,需要采用分步渐进战术,并及时进行信息处理,积小胜为大胜,最后获得问题的完全解决. 这类试题若从新课程标准的要求看,考查了学生对数学的情感、态度及价值观,也考查了他们的韧性、耐力和顽强拼搏的信心和勇气.

例 16 (2008 年上海交通大学)

已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$,且 $f(x)=x$ 没有实数根,试判断 $f[f(x)]=x$ 是否有实数根? 并证明你的结论.

解: 没有.

方法一: $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c=0$ 无实数根,

$$\Delta=(b-1)^2-4ac<0;\ f[f(x)]-x=0.$$

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c-x=0.$$

$$a(ax^2+bx+c)^2-ax^2+ax^2+b(ax^2+bx+c)+c-x=0.$$

$$a(ax^2+bx+c-x)(ax^2+bx+c+x)+(b+1)ax^2+(b^2-1)x+c(b+1)=0.$$

$$a[ax^2+(b-1)x+c][ax^2+(b+1)x+c]+(b+1)[ax^2+(b-1)x+c]=0.$$

$$[ax^2+(b-1)x+c][a^2x^2+a(b+1)x+b+ac+1]=0.$$

于是有 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 或 $a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1=0$.

$$\Delta_1=(b-1)^2-4ac<0;$$

$$\Delta_2=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)=a^2[(b-1)^2-4ac-4]<-4a^2<0.$$

故均不存在实数根.

方法二: 若 $a>0$,则 $f(x)>x$($\because$ 若存在 x,使 $f(x) \leqslant x$,则由于 $y=f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线,因此,必存在 x,使 $f(x)>x$. 于是 $f(x)=x$ 有实数根,这就产生了矛盾).

于是 $f[f(x)]>f(x)>x$;

若 $a<0$,则 $f(x)<x$;

于是 $f[f(x)]<f(x)<x$;

所以 $f[f(x)]=x$ 没有实数根.