大学文科数学

（下　册）

徐　岩　主编
李为东　胡志兴　编

科学出版社

大学文科数学

（下册）

徐　岩　主编
李为东　胡志兴　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为高等学校非数学专业的高等数学教材，是根据多年教学经验，参照“文科类本科数学基础课程教学基本要求”，按照新形势下教材改革的精神编写而成. 本套教材分为上、下两册，上册内容包括一元微积分、二元微积分、简单一阶常微分方程等内容. 下册内容为线性代数和概率论与数理统计. 各章配有小结及练习题，并介绍一些与本书所述内容相关的数学家简介.

本书可作为高等学校文科类、艺术类等少学时高等数学课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学：全2册/徐岩主编. —北京：科学出版社，2014
ISBN 978-7-03-040765-8

Ⅰ.①大… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第106031号

责任编辑：吕 盛 周金权 / 责任校对：林青梅
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2014年8月第一次印刷 印张：24 1/2
字数：494 000

定价：59.00元(上、下册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

（上　　册）

（下　　册）

第 8 章 行 列 式

行列式的概念来源于解线性方程组的问题,并成为一种重要的数学工具.在许多实际问题中都有重要应用.本章介绍 n 阶行列式的概念、基本性质、计算方法及行列式的一个重要应用:求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

8.1 行列式的定义

8.1.1 二、三阶行列式

从线性方程组的求解过程中,引入行列式的概念.考虑如下二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{8.1}$$

利用消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,其解为

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{8.2}$$

为便于记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{8.3}$$

则当 $D \neq 0$ 时,式(8.2)可表示为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{8.4}$$

这种表示不仅简单,而且便于记忆.式(8.3)称为**二阶行列式**,a_{ij} 称为行列式的**元素**,i 为**行标**,j 为**列标**,二阶行列式包含 2 行 2 列 4 个元素.

对角线法则

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

主对角线(实联线)元素乘积取正号,副对角线(虚联线)元素乘积取负号.

类似地,可以定义三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{8.5}$$

式(8.5)称为**三阶行列式**.

三阶行列式包含 3 行 3 列 9 个元素,其值可按下面的对角线法则计算得到

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

实联线元素乘积取正号,虚联线元素乘积取负号.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot4\cdot5+2\cdot2\cdot3+1\cdot0\cdot(-1)$$

$$-1\cdot4\cdot3-2\cdot(-1)\cdot1-0\cdot2\cdot5$$

$$=20+12-12+2=22.$$

从二、三阶行列式的定义可以看出,行列式的值是一些项的代数和. 例如,在三阶行列式中,每一项都是三个数的连乘积,而且这三个数取自三阶行列式不同行与不同列,总项数以及每一项的正负号与其下标的排列有关. 为了揭示行列式的结构规律,将行列式的概念推广到 n 阶行列式. 先介绍一些排列的基本知识.

8.1.2　排列与逆序

定义 8.1.1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的一个有序数组,称为这 n 个数的一个 **n 级排列**.

例如,4321,1234,3214 均是 1,2,3,4 这 4 个数的 4 级排列.

n 个自然数 $1,2,\cdots,n$,按从小到大的自然顺序排列:$12\cdots n$ 称为 n 级自然排列.

1234 就是 4 级自然排列. 显然,n 级排列的种数共有 $n!$ 个. 用 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 表示这 $n!$ 个排列中的一个.

定义 8.1.2　在排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果 $i_s>i_t$,则这两个数构成一个逆

序. $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,逆序的总个数称为该排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 8.1.1 分别求下列排列:4321,1234,3214 的逆序数,并判别排列的奇偶性.

解 在排列 4321 中,4 的逆序为 0;3 的逆序为 1;2 的逆序为 2;1 的逆序为 3,因此,$\tau(4321)=1+2+3=6$.类似可得,$\tau(1234)=0$; $\tau(3214)=1+2=3$. 排列 4321,1234 是偶排列;排列 3214 是奇排列.

定义 8.1.3 在一个排列中,某两个数互换位置,其余的数不动,就得到一个新排列. 这样的变换称为一个**对换**;若对换的两个数相邻,则称为**相邻对换**.

定理 8.1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 略.

定理 8.1.2 n 个数($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列,其中奇偶排列各占一半.

证 略.

8.1.3 *n* 阶行列式

考察三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

三阶行列式有 6(3!)项,每一项是三个数的乘积,这三个数位于不同行、不同列. 6 项中的任一项可写为 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,三个数的行标为自然序排列 123,列标为 1,2,3 的某一排列 $j_1j_2j_3$. 任一项的符号可由 $t=\tau(j_1j_2j_3)$ 的奇偶性确定.

将上述规律进行推广,可得到 n 阶行列式定义.

定义 8.1.4

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**. 其中横排、纵排分别称为它的行和列. n 阶行列式是一个数,其值按如下代数式计算.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{8.6}$$

其中和号$\sum$是对所有的 n 级排列求和(共 $n!$ 项). 每一项当行标为自然排列时,如果对应的列标构成的排列是偶排列,则取正号,如果是奇排列取负号.

注　$n=1$ 时,$D=|a_{11}|=a_{11}$;$n=2,3$,就是前面定义的二、三阶行列式,它们的值可用对角线法求得,$n\geqslant 4$ 时,对角线法则不再适用.

定理 8.1.3　n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},\tag{8.7}$$

其中每一项在列下标为自然序排列时,由行下标排列的逆序数决定其符号.

式(8.7)与式(8.6)的区别在于每项中各元素的列标按自然序排列,行标为 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列 $i_1 i_2\cdots i_n$.

例 8.1.2　设 D 为 5 阶行列式,问

(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$,　　(2) $a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{55}$,

是否为 D 中的项,若是应取什么符号?

解　(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$ 的行标排列为 12345,列标排列为 23154,表明这些数取自不同的行,不同的列,所以它是 D 中的一项,且行标为自然排列,$\tau(23154)=3$ 为奇数,故该项取负号.

(2) $a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{55}$ 的行标排列为 12345,列标排列为 45325 取自第 5 行两元素,由行列式定义知它不是行列式的一项.

例 8.1.3　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由式(8.7)

$$D=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

这里 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 为不同行、不同列的 n 个数的乘积. 由于第一列除了 a_{11} 外其余数都为零,故非零项的第一个数必为 a_{11},第二列只能选 a_{22}(不能选 a_{12},因第一行已选过);类似地,第三列只能选 a_{33},…,第 n 列只能选 a_{nn},因此,行列式只有一个可能的非零项,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

这个行列式称为**上三角行列式**.

类似可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

8.2 行列式的性质

由 8.1 节讨论可以看出，用定义计算行列式比较麻烦. 为了简化行列式的计算，下面介绍行列式的性质. 通过这些性质，可使行列式的计算在很多情况下简化.

将行列式 D 的行和列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或 D'. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 则 D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 8.2.1 将行列式转置，行列式的值不变，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证 记 $b_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，由行列式定义，

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

由定理 8.1.3，有

$$D = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

从而 $D = D^{\mathrm{T}}$.

由性质 8.2.1 可知，行列式中行与列具有相同的地位，关于行成立的性质，关于列也同样成立，反之亦然.

性质 8.2.2 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

证明 略.

推论 8.2.1 如果行列式中有两行(列)相同，则此行列式等于零.

证 将相同的两行对换，有 $D =-D$，从而 $D = 0$.

性质 8.2.3　用数 k 乘行列式的某一行(列),等于以数 k 乘此行列式.即如果设 $D=|a_{ij}|$,则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_2 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_2 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

证　由行列式定义,D_1 的一般项为

$$k\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD.$$

性质 8.2.3 说明,用一个数乘以行列式,等于用这个数乘行列式的某一行(列)的每一个元素.即行列式中某一行(列)的公因子可以提到行列式符号之外.

推论 8.2.2　若行列式 D 中有一个零行(列),则 $D=0$.

推论 8.2.3　若行列式 D 中有两行(列)的对应元素成比例,则 $D=0$.

例如,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=k^nD.$$

性质 8.2.4　若行列式 D 的某行(列)的元素都是两数之和,例如,第 i 行的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式等于下列两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　由行列式定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 8.2.5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

利用性质 8.2.3 与性质 8.2.4 即得结论,请读者自己完成证明.

利用行列式的性质计算行列式,可以使计算简化,下面举例说明.

例 8.2.1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$, 求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times5\times1=30.$$

例 8.2.2 证明:奇数阶反对称行列式的值为零.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

证　由性质 8.2.1

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix},$$

利用性质 8.2.3,提出每行的公因子(−1),得

$$D = D^{\mathrm{T}} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

当 n 为奇数时,有 $D=-D$, 从而 $D=0$.

计算行列式时,常利用行列式的性质,把它化为三角形行列式来计算. 例如,化为上三角形行列式的步骤是:如果 $a_{11}\neq 0$(若 $a_{11}=0$ 则与其他行互换),将第一行分别乘以适当的数加到其他各行,使第一列除 a_{11} 外其余元素全为 0,再利用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低阶行列式;依次下去,直到使它成为上三角形行列式,这时主对角线上元素的乘积就是行列式的值.

为了使计算过程清晰明了,约定如下记号.

(1) 交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列),简记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$);

(2) 给行列式的第 i 行(列)同乘非零数 k, 简记为 kr_i (kc_i);

(3) 把行列式第 j 行(列)的 k($k\neq 0$) 倍加到第 i 行(列)相应的元素上,简记为 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

例 8.2.3　计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

解　利用行列式的性质,将 D 化为上三角行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-2r_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & -19 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_4}\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&2&4&6\\0&8&4&4\\0&-19&3&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&8&4&4\\0&-19&3&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+19r_2]{r_3-8r_2}2\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&-12&-20\\0&0&41&63\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+3r_3}2\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&-12&-20\\0&0&5&3\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&-3&-5\\0&0&5&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_4}8\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&2&-2\\0&0&5&3\end{vmatrix}$$

$$=16\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&1&-1\\0&0&5&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-5r_3}16\begin{vmatrix}1&8&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&8\end{vmatrix}=128.$$

注 运算 r_i+kr_j 表示将行列式的第 j 行的 k 倍加到第 i 行，r_i 与 r_j 的位置不能颠倒；此外，在运算中，相邻行列式是等号连接.

例 8.2.4 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是各列(行)的元素之和相等，故可将各行加到第一行，提出公因子，再化为上三角行列式.

$$\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$
=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-ar_1}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}
$$

$$
=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.
$$

例 8.2.5 解方程($a_1\neq 0$)

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1}-x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}=0.
$$

解

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1}-x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}-x \end{vmatrix}
$$

$$
=a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x),
$$

即 $a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)=0$，解之得 $x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots x_{n-1}=a_{n-1}$ 是方程的 $n-1$ 个根.