

大学文科数学

(下 册)

徐 岩 主 编
李为东 胡志兴 编



科学出版社

大学文科数学

(下册)

徐 岩 主编

李为东 胡志兴 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书为高等学校非数学专业的高等数学教材,是根据多年教学经验,参照“文科类本科数学基础课程教学基本要求”,按照新形势下教材改革的精神编写而成.本套教材分为上、下两册,上册内容包括一元微积分、二元微积分、简单一阶常微分方程等内容.下册内容为线性代数和概率论与数理统计.各章配有小结及练习题,并介绍一些与本书所述内容相关的数学家简介.

本书可作为高等学校文科类、艺术类等少学时高等数学课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学:全2册/徐岩主编. —北京:科学出版社, 2014
ISBN 978-7-03-040765-8

I. ①大… II. ①徐… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 106031 号

责任编辑:昌 盛 周金权 / 责任校对:林青梅
责任印制:肖 兴 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2014 年 8 月第一次印刷 印张: 24 1/2

字数: 494 000

定价: 59.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

目 录

(上 册)

- 第 1 章 函数与极限
- 第 2 章 导数与微分
- 第 3 章 微分中值定理与导数的应用
- 第 4 章 不定积分
- 第 5 章 定积分及其应用
- 第 6 章 常微分方程
- 第 7 章 二元函数及二重积分

(下 册)

- 第 8 章 行列式 1
 - 8.1 行列式的定义 1
 - 8.1.1 二、三阶行列式 1
 - 8.1.2 排列与逆序 2
 - 8.1.3 n 阶行列式 3
 - 8.2 行列式的性质 5
 - 8.3 行列式按行(列)展开 11
 - 8.4 克拉默法则 15
 - 习题 8 18
- 第 9 章 矩阵 22
 - 9.1 矩阵的概念 22
 - 9.1.1 矩阵的概念 22
 - 9.1.2 几种特殊的矩阵 25
 - 9.2 矩阵的运算 25
 - 9.2.1 矩阵的加法与数量乘法 25
 - 9.2.2 矩阵的乘法 27
 - 9.2.3 方阵的幂 31
 - 9.2.4 矩阵的转置 32
 - 9.3 分块矩阵 33
 - 9.4 可逆矩阵 37
 - 9.4.1 方阵的行列式 37

9.4.2	可逆矩阵的概念	37
9.4.3	可逆矩阵的性质	40
9.5	矩阵的初等变换和初等方阵	41
9.6	矩阵的秩	47
习题 9		50
第 10 章	线性方程组	55
10.1	消元法	55
10.2	线性方程组的一般理论	58
10.3	n 维向量空间	63
10.4	向量间的线性关系	65
10.4.1	向量的线性表示	65
10.4.2	向量的线性相关性	67
10.5	向量组的秩	71
10.6	线性方程组解的结构	73
10.6.1	齐次线性方程组解的结构	74
10.6.2	非齐次线性方程组	77
习题 10		79
第 11 章	矩阵的特征值与二次型	82
11.1	特征值与特征向量	82
11.1.1	特征值与特征向量的概念及求法	82
11.1.2	特征值与特征向量的性质	84
11.2	相似矩阵	85
11.3	实对称矩阵的对角化	87
11.4	二次型	91
11.5	二次型的标准形	93
11.5.1	正交变换化二次型为标准形	93
11.5.2	配方法化二次型为标准形	97
11.6	正定二次型	98
习题 11		99
第 12 章	随机事件及其概率	102
12.1	随机事件	102
12.1.1	随机试验与样本空间	102
12.1.2	随机事件	103
12.1.3	事件间的关系及其运算	104

12.2 随机事件的概率	106
12.2.1 概率的定义	106
12.2.2 等可能概型(古典概型)	108
12.3 概率的加法法则	111
12.4 条件概率与乘法法则	113
12.4.1 条件概率	113
12.4.2 乘法公式	114
12.4.3 全概率公式与贝叶斯公式	115
12.5 事件的独立性	117
习题 12	121
第 13 章 一维随机变量及其分布	125
13.1 随机变量	125
13.2 离散型随机变量	126
13.2.1 (0-1)分布	127
13.2.2 伯努利试验、二项分布	127
13.2.3 泊松分布	129
13.3 随机变量的分布函数	129
13.4 连续型随机变量及其分布	131
13.4.1 均匀分布	132
13.4.2 指数分布	133
13.4.3 正态分布	134
13.5 随机变量的函数的分布	137
13.5.1 离散型随机变量函数的分布	137
13.5.2 连续型随机变量函数的分布	138
习题 13	140
第 14 章 多维随机变量及其概率分布	143
14.1 二维随机变量	143
14.1.1 二维随机变量及其分布函数	143
14.1.2 二维离散型随机变量的分布律	144
14.1.3 二维连续型随机变量	145
14.2 随机变量的边缘分布	147
14.2.1 离散型边缘分布	147
14.2.2 连续型随机变量的边缘密度	148
14.3 随机变量的独立性	149
习题 14	151

第 15 章 随机变量的数字特征	153
15.1 数学期望	153
15.1.1 离散型随机变量的数学期望	153
15.1.2 连续型随机变量的数学期望	155
15.1.3 随机变量函数的数学期望	156
15.1.4 二维随机变量的数学期望	157
15.2 数学期望的性质	157
15.3 方差	159
15.4 方差的性质	161
习题 15	163
第 16 章 统计量及其抽样分布	166
16.1 总体和样本	166
16.2 统计量及统计量的分布	167
16.3 抽样分布	169
16.3.1 χ^2 分布	169
16.3.2 t 分布	171
16.3.3 正态总体统计量的分布	172
习题 16	173
第 17 章 参数估计	175
17.1 参数的点估计	175
17.1.1 矩估计法	175
17.1.2 极大似然估计	176
17.2 估计量的评价标准	180
17.3 区间估计	181
17.3.1 参数的区间估计	181
17.3.2 单个正态总体参数的区间估计	182
习题 17	185
参考文献	187
附录 1 标准正态分布函数数值表	188
附录 2 泊松分布数值表	190
附录 3 t 分布临界值表	192
附录 4 χ^2 分布临界值表	194

第8章 行列式

行列式的概念来源于解线性方程组的问题,并成为一种重要的数学工具.在许多实际问题中都有重要应用.本章介绍 n 阶行列式的概念、基本性质、计算方法及行列式的一个重要应用:求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

8.1 行列式的定义

8.1.1 二、三阶行列式

从线性方程组的求解过程中,引入行列式的概念.考虑如下二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \quad (8.1)$$

利用消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,其解为

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (8.2)$$

为便于记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (8.3)$$

则当 $D \neq 0$ 时,式(8.2)可表示为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (8.4)$$

这种表示不仅简单,而且便于记忆.式(8.3)称为二阶行列式, a_{ij} 称为行列式的元素, i 为行标, j 为列标,二阶行列式包含 2 行 2 列 4 个元素.

对角线法则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

主对角线(实联线)元素乘积取正号,副对角线(虚联线)元素乘积取负号.类似地,可以定义三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \quad (8.5)$$

式(8.5)称为三阶行列式.

三阶行列式包含 3 行 3 列 9 个元素,其值可按下面的对角线法则计算得到

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

实联线元素乘积取正号,虚联线元素乘积取负号.

例如

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) \\ &\quad - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 20 + 12 - 12 + 2 = 22. \end{aligned}$$

从二、三阶行列式的定义可以看出,行列式的值是一些项的代数和.例如,在三阶行列式中,每一项都是三个数的连乘积,而且这三个数取自三阶行列式不同行与不同列,总项数以及每一项的正负号与其下标的排列有关.为了揭示行列式的结构规律,将行列式的概念推广到 n 阶行列式.先介绍一些排列的基本知识.

8.1.2 排列与逆序

定义 8.1.1 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 所构成的一个有序数组,称为这 n 个数的一个 n 级排列.

例如,4321,1234,3214 均是 1,2,3,4 这 4 个数的 4 级排列.

n 个自然数 $1, 2, \dots, n$, 按从小到大的自然顺序排列: $12 \cdots n$ 称为 n 级自然排列.

1234 就是 4 级自然排列.显然, n 级排列的种数共有 $n!$ 个.用 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 表示这 $n!$ 个排列中的一个.

定义 8.1.2 在排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中,如果 $i_s > i_t$, 则这两个数构成一个逆

序. $i_1, i_2, \dots, i_n$ 中, 逆序的总个数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 8.1.1 分别求下列排列: 4321, 1234, 3214 的逆序数, 并判别排列的奇偶性.

解 在排列 4321 中, 4 的逆序为 0; 3 的逆序为 1; 2 的逆序为 2; 1 的逆序为 3, 因此, $\tau(4321) = 1 + 2 + 3 = 6$. 类似可得, $\tau(1234) = 0$; $\tau(3214) = 1 + 2 = 3$. 排列 4321, 1234 是偶排列; 排列 3214 是奇排列.

定义 8.1.3 在一个排列中, 某两个数互换位置, 其余的数不动, 就得到一个排列. 这样的变换称为一个对换; 若对换的两个数相邻, 则称为相邻对换.

定理 8.1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 略.

定理 8.1.2 n 个数 ($n > 1$) 共有 $n!$ 个 n 级排列, 其中奇偶排列各占一半.

证 略.

8.1.3 n 阶行列式

考察三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

三阶行列式有 $6(3!)$ 项, 每一项是三个数的乘积, 这三个数位于不同行、不同列. 6 项中的任一项可写为 $(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, 三个数的行标为自然序排列 123, 列标为 1, 2, 3 的某一排列 $j_1 j_2 j_3$. 任一项的符号可由 $t = \tau(j_1 j_2 j_3)$ 的奇偶性确定.

将上述规律进行推广, 可得到 n 阶行列式定义.

定义 8.1.4

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其中横排、纵排分别称为它的行和列. n 阶行列式是一个数, 其值按如下代数式计算.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (8.6)$$

其中和号 Σ 是对所有的 n 级排列求和(共 $n!$ 项). 每一项当行标为自然排列时, 如果对应的列标构成的排列是偶排列, 则取正号, 如果是奇排列取负号.

注 $n=1$ 时, $D = |a_{11}| = a_{11}$; $n=2, 3$, 就是前面定义的二、三阶行列式, 它们的值可用对角线法求得, $n \geq 4$ 时, 对角线法则不再适用.

定理 8.1.3 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \quad (8.7)$$

其中每一项在列下标为自然序排列时, 由行下标排列的逆序数决定其符号.

式(8.7)与式(8.6)的区别在于每项中各元素的列标按自然序排列, 行标为 $1, 2, \cdots, n$ 的某一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

例 8.1.2 设 D 为5阶行列式, 问

$$(1) a_{12} a_{23} a_{31} a_{45} a_{54}, \quad (2) a_{14} a_{25} a_{33} a_{42} a_{55},$$

是否为 D 中的项, 若是应取什么符号?

解 (1) $a_{12} a_{23} a_{31} a_{45} a_{54}$ 的行标排列为12345, 列标排列为23154, 表明这些数取自不同的行, 不同的列, 所以它是 D 中的一项, 且行标为自然排列, $\tau(23154) = 3$ 为奇数, 故该项取负号.

(2) $a_{14} a_{25} a_{33} a_{42} a_{55}$ 的行标排列为12345, 列标排列为45325 取自第5行两元素, 由行列式定义知它不是行列式的一项.

例 8.1.3 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由式(8.7)

$$D = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

这里 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 为不同行、不同列的 n 个数的乘积. 由于第一列除了 a_{11} 外其余数都为零, 故非零项的第一个数必为 a_{11} , 第二列只能选 a_{22} (不能选 a_{12} , 因第一行已选过); 类似地, 第三列只能选 a_{33} , $\cdots$, 第 n 列只能选 a_{nn} , 因此, 行列式只有一个可能的非零项, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

这个行列式称为上三角行列式.

类似可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

8.2 行列式的性质

由 8.1 节讨论可以看出, 用定义计算行列式比较麻烦. 为了简化行列式的计算, 下面介绍行列式的性质. 通过这些性质, 可使行列式的计算在很多情况下简化.

将行列式 D 的行和列互换后得到的行列式, 称为 D 的转置行列式, 记为 D^T 或 D' . 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{则 } D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 8.2.1 将行列式转置, 行列式的值不变, 即 $D = D^T$.

证 记 $b_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \cdots, n$), 由行列式定义,

$$D^T = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

由定理 8.1.3, 有

$$D = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

从而 $D = D^T$.

由性质 8.2.1 可知, 行列式中行与列具有相同的地位, 关于行成立的性质, 关于列也同样成立, 反之亦然.

性质 8.2.2 交换行列式的两行(列), 行列式变号.

证明 略.

推论 8.2.1 如果行列式中有两行(列)相同, 则此行列式等于零.

证 将相同的两行对换, 有 $D = -D$, 从而 $D = 0$.

性质 8.2.3 用数 k 乘行列式的某一行(列), 等于以数 k 乘此行列式. 即如果设 $D = |a_{ij}|$, 则

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

证 由行列式定义, D_1 的一般项为

$$k \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = kD.$$

性质 8.2.3 说明, 用一个数乘以行列式, 等于用这个数乘行列式的某一行(列)的每一个元素. 即行列式中某一行(列)的公因子可以提到行列式符号之外.

推论 8.2.2 若行列式 D 中有一个零行(列), 则 $D = 0$.

推论 8.2.3 若行列式 D 中有两行(列)的对应元素成比例, 则 $D = 0$.

例如,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n D.$$

性质 8.2.4 若行列式 D 的某行(列)的元素都是两数之和, 例如, 第 i 行的元素都是两数之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式定义

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
 &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

性质 8.2.5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

利用性质 8.2.3 与性质 8.2.4 即得结论,请读者自己完成证明.

利用行列式的性质计算行列式,可以使计算简化,下面举例说明.

例 8.2.1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \times (-3) \times 5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= -2 \times (-3) \times 5 \times 1 = 30.
 \end{aligned}$$

例 8.2.2 证明:奇数阶反对称行列式的值为零.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

证 由性质 8.2.1

$$D = D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix},$$

利用性质 8.2.3, 提出每行的公因子 (-1) , 得

$$D = D^T = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

当 n 为奇数时, 有 $D = -D$, 从而 $D = 0$.

计算行列式时, 常利用行列式的性质, 把它化为三角形行列式来计算. 例如, 化为上三角形行列式的步骤是: 如果 $a_{11} \neq 0$ (若 $a_{11} = 0$ 则与其他行互换), 将第一行分别乘以适当的数加到其他各行, 使第一列除 a_{11} 外其余元素全为 0, 再利用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低阶行列式; 依次下去, 直到使它成为上三角形行列式, 这时主对角线上元素的乘积就是行列式的值.

为了使计算过程清晰明了, 约定如下记号.

- (1) 交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列), 简记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$);
- (2) 给行列式的第 i 行(列)同乘非零数 k , 简记为 kr_i (kc_i);
- (3) 把行列式第 j 行(列)的 k ($k \neq 0$) 倍加到第 i 行(列)相应的元素上, 简记为 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

例 8.2.3 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的性质, 将 D 化为上三角形行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2+2r_1]{r_1+2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2+2r_1, r_3+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & -19 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{r_2+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & -19 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & -19 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow{\substack{r_3-8r_2 \\ r_4+19r_2}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -20 \\ 0 & 0 & 41 & 63 \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow{r_4+3r_3} 2 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -20 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow{r_3+r_4} 8 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
& = 16 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-5r_3} 16 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 128.
\end{aligned}$$

注 运算 $r_i + kr_j$ 表示将行列式的第 j 行的 k 倍加到第 i 行, r_i 与 r_j 的位置不能颠倒;此外,在运算中,相邻行列式是等号连接.

例 8.2.4 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列(行)的元素之和相等,故可将各行加到第一行,提出公因子,再化为上三角行列式.

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+r_i \\ i=2,\cdots,n}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & & x & \\ \vdots & & \vdots & \\ a & & a & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_i - ar_1} [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\
&= [x + (n-1)a] (x-a)^{n-1}.
\end{aligned}$$

例 8.2.5 解方程 ($a_1 \neq 0$)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} + a_{n-1} - x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix} = 0.$$

解

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} + a_{n-1} - x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2, 3, \dots, n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 - x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} - x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x),$$

即 $a_1(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) = 0$, 解之得 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$ 是方程的 $n-1$ 个根.