概率论与数理统计

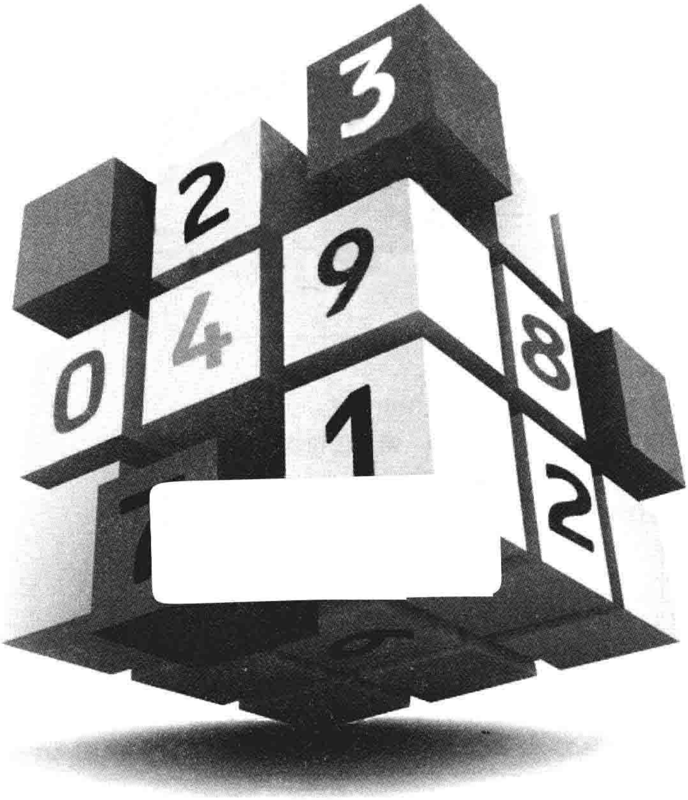
马维军　周　影　郝立柱◇主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

马维军　周　影　郝立柱◇主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 马维军, 周影, 郝立柱主编
. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社 ; 北京 : 北京大学出
版社, 2014.6
ISBN 978 - 7 - 81129 - 748 - 5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①马… ②周… ③郝… Ⅲ. ①概率论
②数理统计 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 115605 号

概率论与数理统计
GAILÜLUN YU SHULITONGJI
马维军　周　影　郝立柱　主编

责任编辑　张永生　王选宇
出版发行　北京大学出版社　黑龙江大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　720 × 1000　1/16
印　　张　15.25
字　　数　282 千
版　　次　2014 年 6 月第 1 版
印　　次　2014 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 81129 - 748 - 5
定　　价　26.00 元

前　言

概率论与数理统计已成为各高等院校理工科相关专业的重要必修课程，它以自然界中的随机现象为研究对象，在多个领域都有着重要的应用．本书是作者在多年的教学经验和实践积累基础上编写的，力求基础知识清晰明了，内容由浅入深，既方便读者阅读，又可使学生感受到阅读本书的趣味．本书不需要很多的数学知识，学过高等数学的读者即可读懂．

全书共分八章，前五章为概率论内容，后三章为数理统计内容．各章内容均由作者精心选择，即使各高校理工科的不同专业对概率论与数理统计课程的教学要求有所不同，本书所讲内容亦可满足其基本需求．我们注意到许多读者希望了解假设检验的 p 值，而目前多数理工科概率论与数理统计教材又缺少这部分知识，因此我们在第 8 章中设置了相关内容．建议本书在一个学期内讲完，需 60 学时左右．

本书精心选择上百个例题，力求其更为贴近相关知识点，其中多个例题均来源于现实的生产和生活．学习的同时，也有助于引导学生将理论联系于实际．与此同时，全书安排插图多幅，力争做到图文并茂，使读者易于理解相关内容．

本书的每一章均设置参考阅读内容，阐述对基本概念及原理的直观理解和实际意义，介绍目前常用的统计方法、一些趣味性的知识以及相关的定理证明等，以帮助读者对相应内容进行加深理解．

习题按章设立．习题的选择具有针对性，通过这些习题的训练可使学生巩固所学的相关知识点，而且某些习题可进一步开拓其专业视野．习题的安排有助于培养学生的兴趣和能力，增强学生学好这门课的信心．书的最后提供了习题参考答案及提示，希望对读者有所帮助．

参加本书编写工作的有 (按姓氏笔划顺序)：马维军、周影、郝立柱．在编写本书的过程中，有许多前辈和同行提出了很多宝贵的意见和建议，在此我们表示衷心感谢．另外由于作者的水平、经验有限，难免有错误和不足之处，非常希望广大读者给予批评指正．

编者

2013 年 12 月

内 容 提 要

本书包括概率论的基本概念、随机变量及其分布函数、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、抽样分布、参数估计和假设检验等内容．全书分八章 32 节讲述，习题按章设立，共 217 道．本书可供课时较少，又要求掌握概率论和数理统计基本内容的相关理工科院校作为教材使用．

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

概率论是一门研究随机现象规律的数学分支. 早在 17 世纪, 就有关于机会和概率的文章出现. 那时, 对概率的兴趣是被赌徒们试图确定牌和骰子在赌博中的赔率而引起的. 经过多年的发展, 概率论已成为一门与实际紧密相连的理论严谨的数学科学. 目前, 概率论在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、产品质量控制、农业试验、生命科学和公用事业等方面都得到了重要应用. 有越来越多的概率论方法被引入经济、金融和管理科学, 概率论成为它们的有力工具. 本章主要介绍概率论中相关的基本概念和计算公式.

内容重点:

1. 掌握样本空间、事件的概念;
2. 掌握概率的定义及其三条基本性质: 非负性、规范性、可列可加性;
3. 掌握条件概率的定义、计算方法, 熟练运用全概率公式和贝叶斯公式;
4. 掌握事件独立性与贝努利概型.

1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

在相同条件下抛掷同一枚质地均匀的对称的硬币, 结果可能是正面向上, 也可能是反面向上. 每一次抛掷我们都无法预知下一次是正面还是反面. 那么, 我们是否就无规律可循了呢? 不是的. 首先发现的是, 当大量做实验的时候, 出现正面的次数大致相当于总数的一半, 即出现正面的次数与出现反面的次数大致相等. 历史上曾经有许多人做过类似的实验, 如: 蒲丰掷过 4 040 次得到 2 048 次正面; 皮尔逊掷过 24 000 次得到 12 012 次正面. 随后发现, 这种现象不是孤立的、片面的, 而是在现实生活中有很大一类与此类似的现象. 这种在个别试验中其结果呈现出不确定性, 在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象, 称为**随机现象**(或称偶然现象).

概率论所研究的对象是随机现象, 这种现象不同于以往我们研究的确定性现象. 若做一个试验或观察某一现象可以肯定得到某种特定的结果, 这种现象称为**必然现象**(或称确定性现象). 必然现象是事先可以预言的, 即在准确地重复某些条

件的情况下，它的结果总是肯定的.

参考阅读：随机现象

初时人们把随机现象称为“偶然现象”是指它是“不正常的”、“出乎意料的”或者是“原因不明的”，甚至对于雷电、陨石、地震等认为是天降的灾难. 也有人认为，之所以会出现不可预言的偶然现象，是因为我们对一个现象的原因还缺乏全面足够的认识，认为随着科学发展和人类认识的深化，总有一天将不再存在不可预言的随机现象. 诚然，增加条件组的条件来减少随机性是可能的. 但是，在实际中即使人们有可能将条件组的条件控制到非常相近的程度，但影响因素还是大量的，且相互作用、错综复杂，随机因素的影响总是不可避免，很多现象初始条件稍微改变一点点，其产生的后果差别就非常大. 因此，随机现象是客观存在的，我们只有掌握其规律，才能驾驭它.

1.1.2　随机试验、样本空间、随机事件

1. 随机试验、样本空间

为了了解某种元件的寿命，我们要做一些破坏性试验；为了预测某地区的年平均降水量，我们要对以往的降水量进行观察和记录. 试验或观察是我们了解某些现象规律的最直接和最有效的方法. 这里我们把试验或观察统称为试验. 有些试验在相同的条件下结果是相同的，而有些试验虽然条件相同，但可能产生不同的结果. 我们把这种满足下面三个条件的试验称为 **随机试验**，记为 E.

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行任何一次试验之前都不能确定哪一个结果会出现.

某一随机试验的所有可能结果构成一个集合，把这个集合称为 **样本空间**，记为 Ω . 称样本空间 Ω 中的每个元素为 **样本点**，也就是某个试验的结果，用 ω 表示. 需要注意的是，这里所说的在“相同的条件下”不是很准确，因为我们无法保证每次试验的条件都完全相同，只要“基本上相同”就可以了.

考察下面的四个试验，写出随机试验的样本空间.

例 1.1.1 (1) 抛掷一枚硬币一次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况；

(2) 同时抛掷三枚硬币，观察正面 H 、反面 T 出现的情况；

(3) 在袋中有十个标号为 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 的球，从中任意选取一个球，观察出现的结果；

(4) 从一批电子元器件中抽取一个，测试它的寿命.

解　四个试验均为随机试验，样本空间 Ω_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ 分别为：

$\Omega_1=\{H,\ T\}$；

$\Omega_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$;

$\Omega_3=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$\Omega_4=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

如果样本空间中的点是有限的，如 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$，则称其为有限的样本空间，否则称为无限的样本空间，如 Ω_4.

为了以后讨论的方便，我们将 (1), (2) 试验称为抛硬币试验，如无特殊说明，均为质地均匀的对称硬币；(3) 称为抽球试验；(4) 称为寿命测试试验. 这三类试验简单且易于理解，是常用的典型实例，希望读者加以重视.

2. **随机事件**

在实际中，人们往往关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 如在抽球试验中，若关心的是抽出的球的标号是否为偶数，满足抽出的球号是偶数这一条件的样本点组成 Ω_3 的一个子集：$A=\{0,2,4,6,8\}$. 称 A 为此试验的一个随机事件. 显然，当且仅当 A 中的一个样本点出现时有"抽出的球号是偶数"这一事件发生.

一般，称样本空间 Ω 的子集为 **随机事件**，简称 **事件**. 事件常用大写字母 A, B, C, $\cdots$ 表示.

在每次试验中，当且仅当 A 中的一个样本点出现时，称 A**事件发生**. 由样本点组成的单点集称为 **基本事件**. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生，称为 **必然事件**. 空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为 **不可能事件**.

例 1.1.2 在标号分别为 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 的十个球中任意选取一个，观察其结果. 写出所有可能事件的个数，并写出基本事件，必然事件，不可能事件及事件"取得的球的标号能被 3 整除".

解 样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}$，所有可能的事件数就是样本空间的所有子集的个数，即 $2^{10}=1\ 024$ 个.

基本事件有 10 个：分别为 $\{0\}, \{1\}, \cdots, \{9\}$;

必然事件：$\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}$;

不可能事件：$\emptyset$;

事件"取得的球的标号能被 3 整除"：$\{0,3,6,9\}$.

显然，事件之间并不是绝对孤立存在的，它们之间有一定的关系. 而事件可用集合表示，所以我们用集合的观点来处理事件的关系与运算是非常重要的. 下面讨论事件之间的关系与运算.

1.1.3 事件的关系与运算

1. 事件的关系与运算

既然事件可用集合表示，那么有关集合的关系与运算都可运用到事件的关系与运算中. 我们称“事件 A 发生”，用集合论的语言就是 $\omega \in A$，ω 为试验的结果，即 A 中恰有一个样本点出现.

(1) 若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A，指的是 A 发生，必导致 B 发生. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件 $A \cup B = \{\omega | \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的和事件. 当且仅当 A, B 至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件. 所谓可列个事件是指可以排成一列，并能与自然数集建立一一对应关系的一列事件.

(3) 事件 $A \cap B = \{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$ 称为 A 与 B 的积事件，当且仅当 A, B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生(也记为 AB). 类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(4) 事件 $A - B = \{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差事件，也可记为 $A \backslash B$. 当且仅当 A 发生且 B 不发生时事件 $A - B$ 发生.

(5) 若 $A \cap B = \emptyset$，则称事件 A 与 B 互不相容或互斥，表示 A 与 B 不能同时发生. 显然基本事件是两两互不相容的.

(6) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$，则称 A 与 B 是互为对立事件，表示 A 与 B 必然有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，它表示“ A 不发生”这一事件.

(7) 事件 $A - B = A \cap \overline{B}$. 这一结果可由 (4) 和 (6) 得到.

以上的关系与运算见图 1.1 及图 1.2，它们直观地表示了事件的关系与运算.

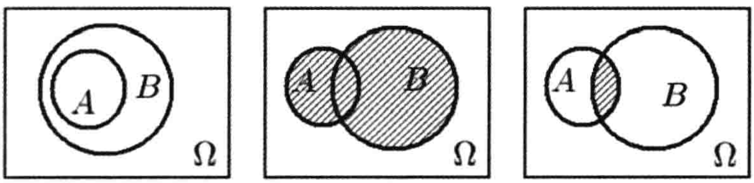


图 1.1 $A \subset B, A \cup B, A \cap B$

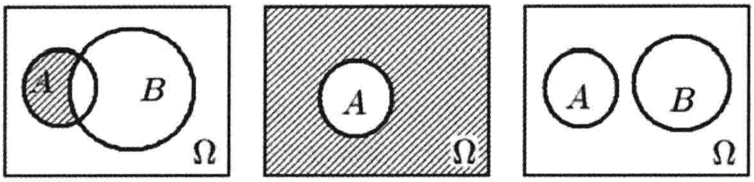


图 1.2　$\boldsymbol{A-B,\overline{A},A\cap B=\emptyset}$

2. **基本规则**

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) 对偶公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.3 抛掷一枚硬币两次，观察其正面 H，反面 T 出现情况. 事件 $A=$“恰有一次正面出现”，事件 $B=$“恰有一次反面出现”，事件 $C=$“恰有两次正面出现”，事件 $D=$“有正面出现”，事件 $E=$“无正面出现”，指出这些事件之间的关系，并写出事件 A 与事件 D 同时发生的集合表达式.

解　其样本空间为 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

$A=\{(H,T),(T,H)\}$,

$B=\{(H,T),(T,H)\}$,

$C=\{(H,H)\}$,

$D=\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$,

$E=\{(T,T)\}$.

易知事件 $A=B, A\subset D, C\subset D, D$ 与 E 互为对立事件，$A\cap D=\{(H,T),(T,H)\}$.

你是如何理解这些事件的关系和运算的？与你的直观想法一致吗？其他关系及运算可自行解决.

1.2　概率的直观意义及其计算

1.2.1　概率的定义和性质

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 有些事件发生的可能性大些，有些事件发生的可能性小些. 我们希望知道某些事件在一次试验中

发生的可能性究竟有多大. 例如, 如果知道了明天下雨的可能性大小, 我们就会决定是否需要准备一把雨伞. 事实上, 在日常生活中我们已经接触到 “概率” 这一概念了. 如天气预报预测明天的降水概率是百分之八十, 即 0.8, 那么它就是刻画 “明天降水” 这一事件发生可能性大小的数量指标, 它是 0 到 1 之间的一个数. 自然地, 事件发生可能性大的, 它的值就大; 事件发生可能性小的, 它的值就小; 必然事件的值最大, 不可能事件的值最小. 下面给出概率的定义和性质.

定义 1.2.1 设 E 是随机试验, Ω 是样本空间. 对 E 的每一个事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称其为事件 A 的概率, 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足:

(1) 非负性: 对于每一个事件 $A, P(A) \geqslant 0$;

(2) 规范性: 对于必然事件 Ω, 有 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性: 对于两两互斥的可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$, 即 $A_i \cap A_j=\phi, i \neq j$, 则有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

性质 1.2.1 (1) $P(\emptyset)=0$.

证明 因为 $\emptyset=\emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$, 则由概率的可列可加性, 得

$$P(\emptyset)=P(\emptyset)+P(\emptyset)+\cdots,$$

从而得 $P(\emptyset)=0$.

此性质说明空集 (不可能事件) 的概率是 0, 但需要指出的是概率为 0 的事件却不一定是空集.

(2) 有限可加性.

若事件列 $A_i(i=1,2, \cdots, n)$ 满足 $A_i \cap A_j=\emptyset\ (i \neq j)$, 则

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\emptyset$, 而 $P(\emptyset)=0$, 则有

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

此性质说明, 由概率的可列可加性可以推得概率的有限可加性, 但逆命题不一定成立.

(3) $P(A)=1-P(\overline{A})$.

(4) 若 A, B 是两个事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB),$$

特别地，若 $B\subset A$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

证明 因为 $A=(A-B)\cup AB$，且 $(A-B)\cap AB=\emptyset$，故由有限可加性知

$$P(A)=P\big((A-B)\cup AB\big)=P(A-B)+P(AB),$$

所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

若 $B\subset A$，则 $AB=B$，所以 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，又由于 $P(A-B)\geqslant 0$，因而得 $P(A)\geqslant P(B)$.

此性质说明事件发生可能性大的，相应的概率值也大.

(5) 概率的连续性.

若事件列 $A_1, A_2, \cdots$，满足 $A_1\subset A_2\subset\cdots$，则

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

证明 记 $B_1=A_1$，$B_n=A_n-A_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$，显然有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

且 $B_1, B_2, B_3, \cdots$ 两两互不相容，由可列可加性得

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n),$$

因而有

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P(B_k)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

同理，若事件列 A_n $(n=1,2,\cdots)$ 满足 $A_1\supset A_2\cdots$，则

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

此性质说明从概率的可列可加性可以推出概率的有限可加性和概率的连续性，其逆命题也是成立的，证明烦琐，略去.

(6) 多退少补原理. 设 $A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 个事件，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_i\cap A_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\Big).$$

特别地，当 $n=2$ 时，有

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

证明　仅给出 $n=2$ 时的证明， $n>2$ 时可用数学归纳法证明.

$$A_1\cup A_2=(A_1-A_2)\cup A_2,$$

显然等式右边的两个事件互不相容，由有限可加性得

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1-A_2)+P(A_2)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

(7) 次可加性. 设 $A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 个事件，则有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

可由数学归纳法证明，请读者自行证明.

参考阅读：概率论的公理化体系

为了深入研究随机现象的规律性，必须将概率论建立在坚实的数学基础之上. 苏联学者柯尔莫哥洛夫于 1933 年在《概率论基本概念》的书中，用公理化方法与集合论观点成功地建立了概率论的公理化体系.

设 Ω 是样本空间， $\mathcal{F}$ 是由 Ω 的一些子集构成的集合族，如果满足如下的条件：

i) $\Omega\in\mathcal{F}$;

ii) 若 $A\in\mathcal{F}$, 则 $\overline{A}\in\mathcal{F}$;

iii) 若 $A_n\in\mathcal{F}, n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 为 σ 代数， $\mathcal{F}$ 中的集合为事件， $\mathcal{F}$ 称为事件域， $(\Omega,\mathcal{F})$ 称为可测空间.

σ 代数 $\mathcal{F}$ 的性质

(1) $\emptyset\in\mathcal{F}$;

(2) 若 $\{A_k\mid 1\leqslant k\leqslant n\}\subset\mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{F}$, $\bigcap_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{F}$;