高 等 数 学

上 册

长 沙 铁 道 学 院

一九七三年二月

恩格斯語录

要确立辯证的同时又是唯物主义的自然观，需要具备数学和自然科学的知识。

純数学的对象是現实世界的空间形式和数量关系，所以是非常現实的材料。这些材料以极度抽象的形式出現，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。……甚至数学上各种数量的明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们的合理的相互关系。

变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辯证法在数学方面的运用。

毛主席語录

分析的方法就是辯证的方法。所謂分析，就是分析事物的矛盾。

矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。

事物矛盾的法則，即对立统一的法則，是自然和社会的根本法則，因而也是思維的根本法則。

人們为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

目　录

第一章　曲綫方程

第二章　曲綫的极坐标方程与参数方程

第三章　函　数

第四章 极限与連續

第五章 导数与微分

第六章 导数的应用

第一章　曲线方程

客观世界中的物体都是运动着的，静止状态是相对的，而运动是絕对的。大至天体，如地球繞太阳公轉以及繞地軸的自轉；小至原子中的电子繞原子核的旋轉，这些物体的运动都沿着一定的軌道运行。如我国在1970年 4 月24日成功地发射了第一顆人造地球卫星，卫星就是沿着椭园的軌道繞地球运行。这些軌道从几何上来看就构成曲綫，因此把曲綫看成动点的軌迹是客观事物的反映。要研究运动的規律，就必須了解动点的軌迹——曲綫的性质。但是只停留在几何直观上来研究曲綫的性质，那是难于深入的。有矛盾就有斗爭，有斗爭才推动事物的发展。于是有必要把形和数統一起来，这样，就可借助变数来描述动点，并利用变数所滿足的方程（体现运动規律）来描述运动的軌迹——曲綫。这就是引入坐标法的基本思想。在引入坐标法后，代数和几何就发生了联系，即能够应用代数的方法来研究几何的問題了，这一数学分支就是所謂解析几何学。

在讲曲綫的方程前，先讲直角坐标系和两点距离公式，这是因为后面經常要用到。由于这些內容已經学习过了，所以不詳細讲。

第一节　曲綫与方程

1.1 直角坐标

在平面上作两条互相垂直的数軸 ox 与 oy，ox 叫做横軸或 x 軸，通常取自左到右的方向为正向；oy 叫做纵軸或 y 軸，通常取自下而上的方向为正向。此外，取定一单位长度，这样就构成了平面上的直角坐标系（見图1—1)。横軸与纵軸統称为坐标軸，两坐标軸的交点 O 称为坐标原点，簡称为原点，取定坐标軸的平面称为坐标平面。

在平面上引进了坐标系后，平面上任意一点 M 的位置，可以用一对有序的数 (x, y) 来表示，記为 $M(x, y)$，x 与 y 分别称为点 M 的横坐标与纵坐标（見图1—1）。反之，給定一对有先后次序的数（x，y），确定平面上一个点。这样就建立了平面上一点与一对数（x，y）之間的一一对应关系。

两个坐标軸分平面为四个部分，分别称为第Ⅰ、第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ象限，各象限的位置以及各象限內点的坐标符号如图 1—2 所示。

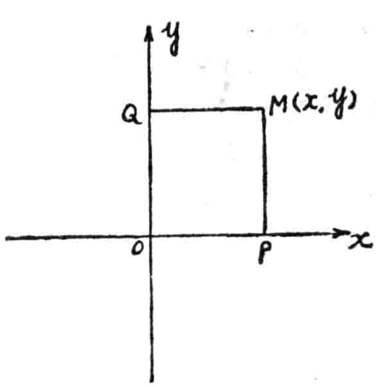

图1—1

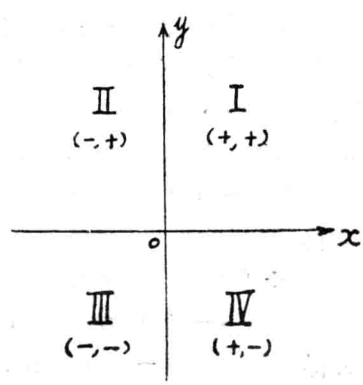

图1—2

1.2 两点間的距离

設$M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$为两个已知点，試用点M_1，M_2的坐标来表示距离$|M_1M_2|$。

过点M_1，M_2分别作x，y軸的垂綫M_1A，M_2B，M_1C，N_2D，延长M_1C与M_2B交于点N，得到直角三角形M_1NM_2（見图1—3）。由勾股弦定理得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |M_2N|^2。$$

但 $|M_1N| = x_2 - x_1$，　$|M_2N| = y_2 - y_1$，　代入得

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2，$$

即 $$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。\qquad (1)$$

式（1）就是两点距离公式。

例1. 床头箱上有三个孔（見图1—4），試求孔与孔间的中心距离。

解 作坐标系（見图1—4）。于是A，B，C三孔中心是：（30，30），（100，60），（60，90），代入两点距离公式(1)得

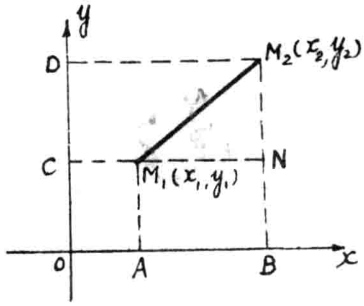

图1—3

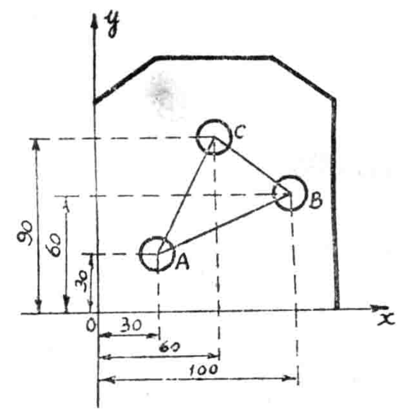

图1—4

(1) $$|AB| = \sqrt{(100-30)^2 + (60-30)^2} = \sqrt{70^2 + 30^2} = \sqrt{5800} = 76.16。$$

$$|BC| = \sqrt{(60-100)^2 + (90-60)^2} = 50。$$

$$|AC| = \sqrt{(60-30)^2 + (90-30)^2} = 67.08。$$

例2. 在y軸上求一点，使它和点$M(12, 4)$的距离等于13。

解 設所求的点的坐标为$N(0, y)$，由两点距离公式（1）得

$$\sqrt{(12-0)^2 + (4-y)^2} = 13$$

两边平方得

$$12^2 + (4-y)^2 = 13^2$$

$$(4-y)^2 = 13^2 - 12^2 = 25$$

两边开方得　$4 - y = \pm 5$。

即　$y_1 = 9$，　$y_2 = -1$。

故所求的点是$N_1(0, 9)$，$N_2(0, -1)$。

1.3 曲綫的方程

在平面上引进了直角坐标系后，平面上的点与一对有次序的数(x, y)之间建立了一一对应关系。这一节将在这个基础上，建立平面曲綫与二元(x与y)方程之间的对应关系。

先看两个例子：

例1 联結两点$A(-3, 5)$和$B(5, 2)$，得一綫段$\overline{AB}$。求垂直且平分$\overline{AB}$的直綫的方程。

解 因为所求的直綫是与点A和B距离相等的点的軌迹。設$M(x, y)$为所求的直綫上任意一点（見图1—5），于是有

$$|MA| = |MB|。$$

由公式（1）得

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}$$

两边平方并化簡，得到方程

$$16x-6y+5=0。\qquad (2)$$

显然，凡是这垂直平分綫上的点的坐标(x, y)都满足方程(2)，反之，不在这直綫上的点的坐标，則不滿足方程(2)，这是因为該点与A、B两点的距离不相等的缘故。

与这垂直平分綫有上述关系的方程(2)，就叫做这垂直平分綫的方程。

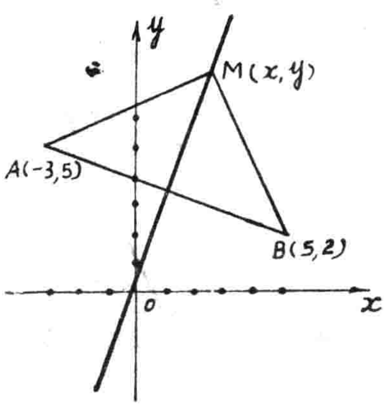

图1—5

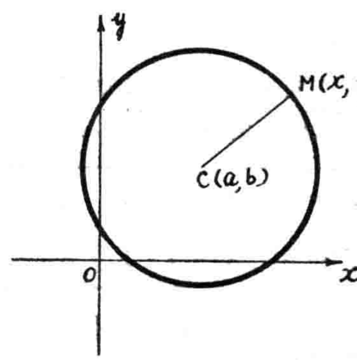

图1—6

例2 求中心在点$C(a, b)$，半径等于R的圆的方程。

解 从圓的定义知道，这个圓是与点$C(a, b)$的距离等于R的点的軌迹。設$M(x, y)$为所求的园上任意一点（見图1—6），則

$$|MC| = R$$

由公式(1)得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

两边平方，就得到所求的园的方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (3)$$

因为只有在这个圓上的点的坐标才能滿足这个方程，而不在这个圓上的点的坐标都不滿足这个方程（若点在园外，则$|MC|>R$，若点在圓內，則$|MC|<R$）。

如果中心在原点，即$a=b=0$，則圓的方程为

$$x^2+y^2=R^2。\qquad (4)$$

一般說来，若有一个含有 x，y 的方程

$$F(x, y)=0 \qquad (5)$$

1)凡是某曲綫上任何点的坐标（x，y）都滿足这个方程，2)凡是坐标滿足这个方程的点都在这曲綫上（或曲綫外任何点的坐标都不滿足这个方程），**則方程（5）称为这曲綫的方程，x，y 称为曲綫上点的流动坐标。**

由此可見，要建立一个曲綫的方程，就必須明确两方面：

1. 曲綫上任何点的坐标都滿足方程。
2. 凡是坐标滿足方程的点都在曲綫上。

通过上面两个例子，还可以得到建立曲綫方程的一般步驟：

1. 适当的选取坐标軸的位置，幷設 $M(x, y)$ 为曲綫上任意一点；
2. 根据动点应滿足的条件（即运动規律），列出滿足条件的含有 x，y 的等式；
3. 化簡上述等式，即得到所求的曲綫方程。

1.4 方程的图形

上面是由已知曲綫，求其方程，为了今后研究函数的需要，下面我們来解决相反的問題，即已知方程 $F(x, y)=0$，求坐标 (x, y) 滿足方程的点的几何軌迹，它叫做方程 $F(x, y)=0$ 的图形（一般是曲綫）。

例1 作出方程 $y=2x-1$ 的图形。

解 1.計算出滿足方程的 x, y 的对应值幷列成表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

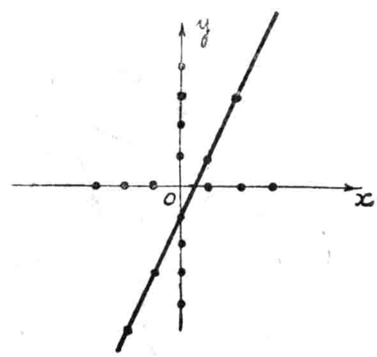

图1—7

由上所述，我們知道以这样的每对数作为坐标的点，就是这方程所表示的曲綫上的点。

2. 描出表中各点，
3. 把这些点連起来，就得到方程的图形見图（1-7）

例2 作出方程 $y=x^2-2x-3$ 的图形。

解 1. 計算出滿足方程的 x, y 的对应值幷列成表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

2. 描出表中各点，
3. 用平滑的曲綫把这些点連起来，就得到方程的图形（見图1—8）

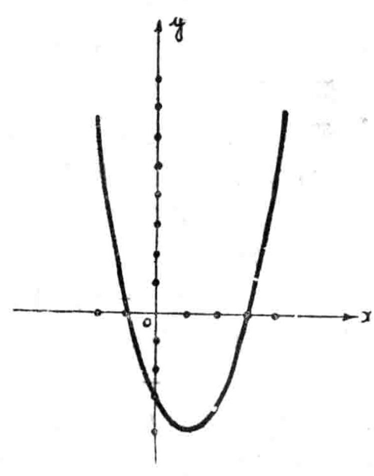

图1—8

由上面两个例子，得到上述描点法作图的步驟如下：

1. 給定 x 的某些确定値，幷把这些値代入方程中

算出 y 的对应值(有时先給 y 来計算 x 較为方便)，这样每一对值都是曲綫上的一点的坐标；

2. 把所得的点的坐标，在坐标平面上描出点来，即描点；

3. 把这些点用平滑的曲綫連起来，就得到方程的图形。

上面所討論的两类問題，是解析几何的**两个基本問題**：

1° 已知点的軌迹，如何建立这曲綫的方程。

2° 已知曲綫的方程，如何作出它所表示的曲綫。

伟大領袖毛主席教导我們：**“当着人們已經認識了这种共同的本質以后，就以这种共同的認識为指导，繼續地向着尚未研究过的或者尚未深入地研究过的各种具体的事物进行研究，找出其特殊的本質，这样才可以补充、丰富和发展这种共同的本質的認識，而使这种共同的本質的認識不致变成枯槁的和僵死的东西。”**

遵照毛主席的教导，后面二节我們将对一些比較簡单而常見的曲綫和方程加以研究。

第二节　直綫与二元一次方程

这一节我們将研究直綫方程。首先分析一下直綫和坐标軸的关系。

直綫与 x 軸的交角 α，称为該直綫对于 x 軸的傾角（簡称直綫的傾角）。这个角是指 x 軸依反时針方向轉到与直綫重合时所得到的角（見图1—9—1与1—9—2）。这个角用以确定直綫的方向，是确定直綫位置的重要因素。

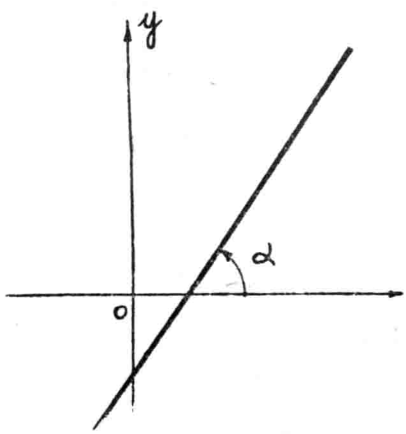

图 1—9—1

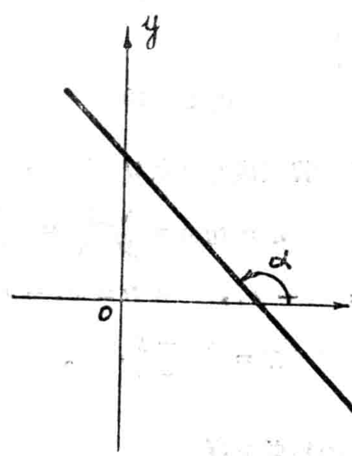

图 1—9—2

若直綫与 x 軸平行，则认为傾角 α 等于 0。因此对任何一条直綫，都有 $0 \leqslant \alpha < \pi$。

2.1 直綫的斜率

直綫的方向也可以用直綫对于 x 軸的傾角 α 的正切来确定，它叫做該直綫的斜率，記为 K，即

$$K = tg\,\alpha\quad。$$

当直綫平行于 x 軸时，$K = 0$（因为 $\alpha = 0$）；当直綫的傾角 $\alpha < 90°$ 时，$K > 0$；当直綫的傾角 $\alpha > 90°$ 时，$K < 0$；当直綫与 x 軸垂直，即 $\alpha = 90°$ 时，直綫沒有斜率，因为直角的正切不存在。

我們知道，两点确定一条直綫，因而若已知的两点坐标，我們就可計算出过这两点的直綫的斜率来。

例1 設直綫通过点M_1（2，3）和M_2（5，6），求这条直綫的斜率K和傾角α。

解 过点M_1，M_2分别向x，y軸作垂綫M_1A，M_2B，M_1C，M_2D，延长M_1C与M_2B相交于N（見图1—10），則

$$K=\operatorname{tg}\alpha=\frac{NM_2}{M_1N}=\frac{CD}{AB}=\frac{6-3}{5-3}=1。$$

故 $K=1$， $\alpha=45°$

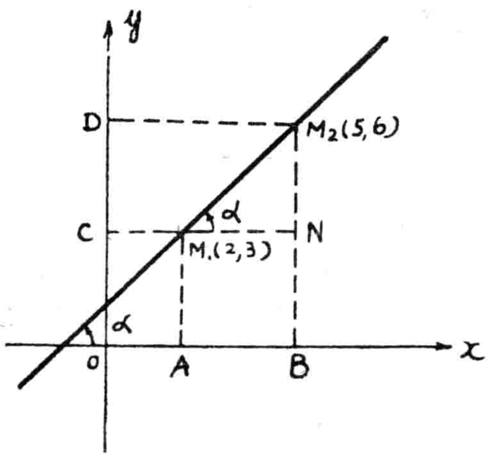

图1—10

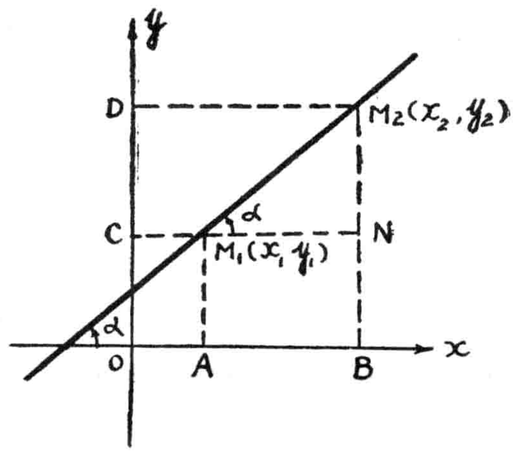

图1—11

一般，若直綫通过点M_1（x_1，y_1）和M_2（x_2，y_2），則其斜率K为（見图1—11）

$$K=tg\alpha=\frac{NM_2}{M_1N}=\frac{CD}{AB}$$

但$CD=y_2-y_1$， $AB=x_2-x_1$，即

$$K=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}。 \qquad (1)$$

2.2 直綫的方程

I 点斜式方程

設一直綫的斜率为K，且通过定点$M_0(x_0, y_0)$，求这直綫的方程。

設M（x，y）为直綫上任意一点。从图1—12看出，无論点M在直綫上何处，都有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{NM}{M_0N}。$$

即
$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=K，$$

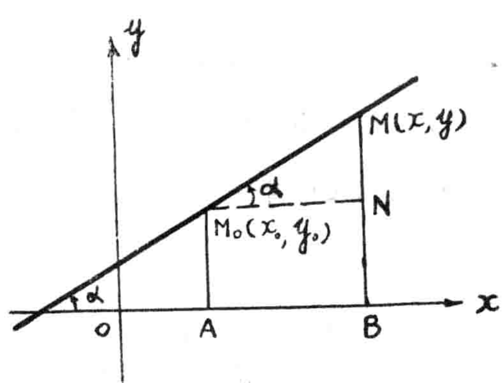

图1—12

或改写成

$$y-y_0=K(x-x_0) \tag{2}$$

凡是所設的直綫上的点的坐标，都滿足方程（2），而不在所設的直綫上的点的坐标，都不滿足方程（2），因为这点与M_0的联綫的斜率不等于K。所以方程（2）是所求的直綫方程。

方程（2）称为直綫的点斜式方程。

例1 求过点（3，－1）且傾角为$\frac{\pi}{4}$的直綫方程。

解 傾角为$\frac{\pi}{4}$的直綫，其斜率$K=1$。代入方程（2）就得到所求的直綫方程

$$y+1=1\cdot(x-3)$$

即

$$x-y-4=0。$$

例2 求过点（0，b）而且平行于x軸的直綫方程。

解 因为直綫平行于x軸，所以$K=0$。代入方程（2），就得到所求的直綫方程

$$y-b=0\cdot(x-0)$$

即

$$y=b。$$

例3 求过点（a，0）且平行于y軸的直綫方程。

解 因为直綫平行于y軸，斜率不存在，所以不能用公式（2）。为此，必須对于具体的事物作具体的分析，从图1—13看到，直綫上任一点$M(x，y)$，无論其纵坐标怎样，而其横坐标都是一样，都等于a，即

$$x=a。$$

显然只有在直綫上的点，其横坐标才等于a，而不在直綫上的点，其横坐标都不等于a，所以$x=a$就是所求的直綫方程。

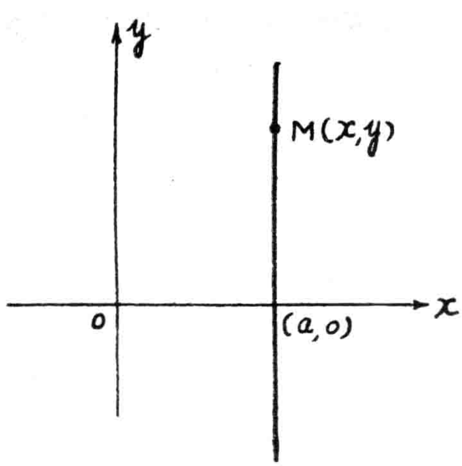

图1—13

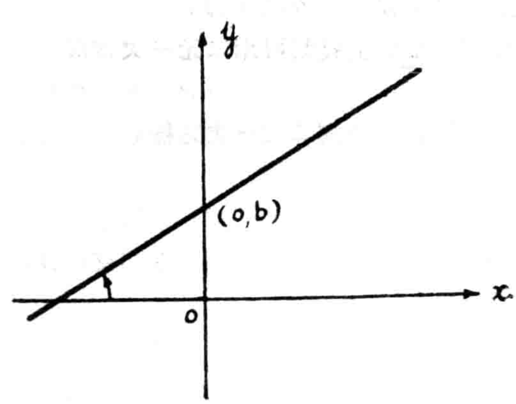

图1—14

Ⅱ 斜截式方程

若直綫不平行于y軸，則必与y軸相交，設交点为（0，b）（見图1—14），数值b称为直綫在y軸上的截距

設直綫的斜率为K，在y軸上的截距为b，求其方程。

因为在y軸上的截距为b，表示直綫通过点（0，b）。代入方程（2）得

$$y-b=K(x-0)$$

即
$$y=Kx+b。\qquad (3)$$

方程（3）称为直綫的斜截式方程。

方程（3）中等式左側只有y一項，且系数为1，右側x的系数表示該直綫的斜率，而常数項表示該直綫在y軸上的截距。

例4 已知直綫的傾角为$\frac{3\pi}{4}$，它在y軸上的截距为-5，求其方程。

解 直綫的斜率是

$$K=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1,$$

代入方程（3）得所求的直綫方程是

$$y=-x-5。$$

例5 已知直綫的傾角为$\frac{\pi}{4}$，且通过原点，求其方程。

解 直綫的斜率是$K=1$。因为通过原点，故截距$b=0$。代入方程（3）得到所求的直綫方程

$$y=x。$$

这是第Ⅰ、Ⅲ象限角的平分綫方程。

Ⅲ 直綫的一般方程

上面所讲的直綫方程，是直綫方程的特殊形式，而这些方程都是关于x和y的一次方程。这样，就启发我們来考虑平面上任何一条直綫，它的方程与二元一次方程间的关系。为此，我們来证明下面的定理。

定理 任何直綫都可用二元一次方程

$$Ax+By+C=0\qquad (4)$$

来表示；反之，任何二元一次方程（4）表示一条直綫。

証 先证第一部分

将平面上的直綫分为两类：平行于y軸与不平行于y軸。

平行于y軸的直綫，必与x軸相交，設交点为（a，0），則它的方程是（見前面的例3）

$$x=a。$$

不平行于y軸的任何直綫，必須确定的斜率K和在y軸上的截距b，因此它可以用斜截式方程

$$y=Kx+b$$

来表示。可見无論直綫是否平行于y軸，它的方程都是二元一次方程。一般可写成（4）的形式。

下面证明第二部分，即

任何二元一次方程

$$Ax+By+C=0$$

表示一条直綫，其中A，B，C是常数，且A，B不同时为0。事实上

i，当$B=0$时，則$A\neq 0$，方程（4）可改写成为

$$x=-\frac{C}{A}。$$

这是一条平行于y軸的直綫，它在x軸上的截距为$-\frac{C}{A}$。

ii，当$B\neq 0$时，方程可写成为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

把它与斜截式方程（3）比較，可知方程（4）表示一条不平行于y軸的直綫，其斜率$K=-\frac{A}{B}$，在y軸上的截距$b=-\frac{C}{B}$。

可見，方程（4）中无論系数如何，它的几何图形都是一条直綫。证完。

方程（4）称为直綫的一般方程。

例6 求直綫$3x+2y-6=0$的斜率幷作出其图形。

解 在方程中，$A=3$，$B=2$，所以其斜率K是：

$$K=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{2}。$$

因为两点决定唯一一条直綫，所以作直綫的图形时，只要找到直綫上任何两点，联結之即可。例如在方程中令$x=0$，算出$y=3$，得到直綫上一点（0，3）；再令$y=0$，算出$x=2$，又得到直綫上另一点（2，0），联結这两点的直綫，就是所求直綫的图形（見图1—15）。

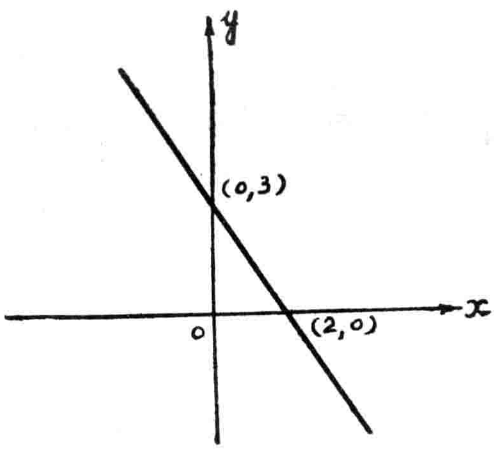

图1—15

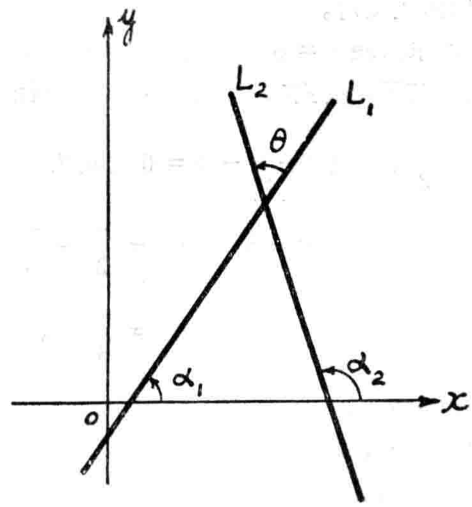

图1—16

2.3 两直綫間的关系

I 两直綫的夹角

設L_1和L_2是两条不平行于y軸的直綫。它們的斜率分别为

$$K_1=\operatorname{tg}\alpha_1,\qquad K_2=\operatorname{tg}\alpha_2,$$

又θ是L_1和L_2的夹角（事实上，夹角有2个，不过只要求出其中一个θ，另一个是$\pi-\theta$），为方便起見，取θ为正角，則当$\alpha_2>\alpha_1$时（見图1－16）

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1。$$

若这两直綫不互相垂直，卽$\theta\neq\frac{\pi}{2}$，两边取正切，得到

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2},$$

将$\operatorname{tg}\alpha_1=K_1$，$\operatorname{tg}\alpha_2=K_2$代入得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}\tag{5}$$

公式（5）是两条直綫的夹角公式。

例1 求两直綫$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+5$与$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$间的夹角θ。

解 将它們的斜率$K_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$K_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$代入公式（5）得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=-\sqrt{3},$$

故 $\theta=\frac{2\pi}{3}$。

注意，为了保証（5）中的θ为正角，因此在两直綫中，一定要取傾角較大的那条直綫为第二条直綫，如上例中，取斜率为負的那条直綫为L_2，这是因为它的傾角为鈍角。而L_1的傾角是銳角。

例2 求直綫$x=6$与直綫$x-y-3=0$的夹角θ。

解 这里，公式（5）不适用，因为直綫$x=6$与y軸平行，其斜率不存在。但由其傾角$\alpha_2=\frac{\pi}{2}$，直綫$x-y-3=0$的傾角$\alpha_1=\frac{\pi}{4}$（因为$K=1$）。卽可求出两直綫的夹角

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}。$$

（見图1—17）。

Ⅱ 两直綫的平行与垂直条件

1° 平行条件

設不平行于y軸的两直綫对x軸的傾角是α_1和α_2，斜率是K_1和K_2，显然，当而且只有当$\alpha_1=\alpha_2$（卽同位角相等）时才平行（見图1—18）。由于$\alpha_1=\alpha_2$，所以

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2,$$

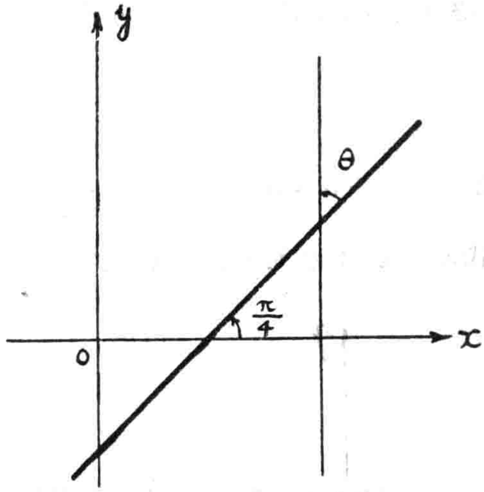

图1—17

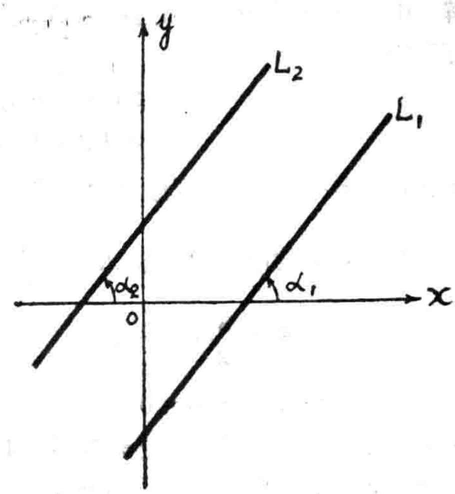

图1—18

但$K_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1$，$K_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$，于是得到**两直綫平行的条件是斜率相等**，即

$$K_1 = K_2 \quad 。$$

例3 設直綫通过点（1，−3），且与直綫$y = 3x - 7$平行，求其方程。

解 由于所求直綫与直綫$y = 3x - 7$平行，故斜率$K = 3$，代入方程（2）就得到所求的直綫方程

$$y + 3 = 3(x - 1)$$

即

$$3x - y - 6 = 0 \quad 。$$

2° 垂直条件

設不平行于y軸的两直綫互相垂直，它們对x軸的傾角是α_1和α_2，斜率是K_1和K_2，由图1—19看出，此时夹角

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

由公式（5）得

$$\mathrm{ctg}\,\theta = \frac{1 + K_1 K_2}{K_2 - K_1} \quad 。$$

将$\theta = \frac{\pi}{2}$代入式得

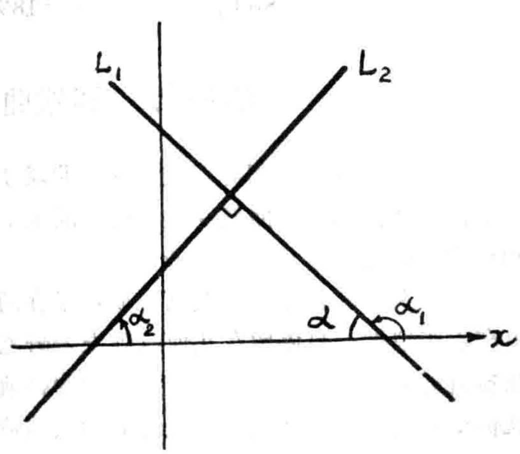

图1—19

$$\frac{1 + K_1 K_2}{K_2 - K_1} = 0 \quad ,$$

即

$$1 + K_1 K_2 = 0$$

或

$$K_1 \cdot K_2 = -1 \quad 。$$

所以**两直綫互相垂直的条件是它們的斜率的乘积等于−1，或者說，它們的斜率互为負倒数**$\left(\text{即} K_1 = -\frac{1}{K_2}\ ,\ K_2 = -\frac{1}{K_1}\right)$。

例4 求过两直綫$4x-y-13=0$与$x+3y+13=0$的交点又与直綫$2x+3y+6=0$垂直的直綫方程

解 由曲綫方程的概念知道，所給二直綫的交点的坐标就是該二直綫的方程的联立解，今解方程組

$$\begin{cases} 4x-y-13=0 \\ x+3y+13=0 \end{cases}$$

得$x=2$，$y=-5$ 即交点坐标为(2，-5)。直綫$2x+3y+6=0$的斜率$K_1=-\frac{2}{3}$，由垂直条件知，所求的直綫的斜率$K_2=\frac{3}{2}$，代入公式(2)得到所求的直綫方程是

$$y+5=\frac{3}{2}(x-2)$$

即 $$3x-2y-16=0。$$

例5 一个6‰的上坡道，已知坡道的起点高程为185米。写出計算高程的公式，并求出水平距离为400米、600米和800米各处的高程。

解 引入坐标系如图1—20所示，y(米)表示高程，x(米)表示水平距离。由題設坡度是6‰，故$K=0.006$，代入公式(3)，得到計算高程的公式：

$$y=0.006x+185。$$

当$x=400$米时，

$y=0.006\times400+185=187.4$米；

仿此算得， 当$x=600$米时， $y=188.6$米；

当$x=800$米时， $y=189.8$米。

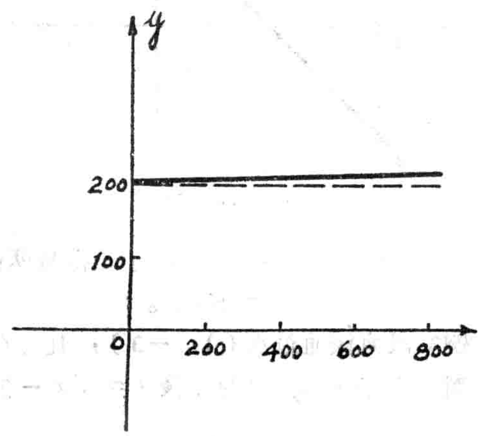

图1—20

第三节 圓錐曲綫与二元二次方程

在前一节里，我們对直綫（一次曲綫）作过比較詳尽的研究討論，这一节我們将对圓錐曲綫（又称为二次曲綫）进行研究討論。**所謂圓錐曲綫，就是由一个平面与圓錐面相截得出的截口的图形**（見图1—21）。

其实关于圓錐曲綫的几何性质，早在两千年前人們就已經从事研究。但是由于当时的生产水平很低，只停留在几何直观上来研究它們，直到十六世紀以后，人們发現行星沿椭圓軌道繞太阳运动，抛出的石头沿抛物綫軌道飞行等等。为了研究这些現象的一般規律，就促使人們进一步把圓錐曲綫看成动点的軌迹来深入分析，进行研究。

近代宇宙飞行技术日益发达，我們知道发射宇宙飞行体，它們飞行的速度与軌道形状有着密切关系。由于飞行体的速度不同，它的运行軌道形状也就不同，或作圓周，或作椭圓，抛物綫，双曲綫等各种不同形状的运动。图1—22是飞行体的速度与它的軌道形状間的关系。