指数和估计与数论问题

刘弘泉 著

哈爾濱工業大學出版社

指数和估计与数论问题

刘弘泉　著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

作者是训练有素、造诣精深的数学家，曾发表过一些突破性结果。本书阐述解析数论中指数和估计这一分支的一些新技术和新方法，取材于作者已发表或尚未发表的工作，为此本书首先详细讲解了经作者改进后的 van der Corput 方法、由作者给出的 van der Corput 方法正确的二维发展、以及由 Bombieri 等人引进的将指数和估计转化为计数问题的重要不等式。本书的主要结果，包括作者对 $\zeta(0.5+it)$ 估阶等经典问题 60 年来运用正确的二维方法首次获得的结果（指出了 Tichmarsh 等人的错误）、作者对 Walfisz 历时 50 年的一个结果的改进、作者对陈景润历时 30 年的一个结果的改进、作者对贾朝华和 Baker 历时 20 年的两个结果的改进、对吴杰历时 10 年的一个结果的改进、作者关于 4-full 数分布渐近公式的终极结果（即 O 型估计与 Ω 型估计一致了）、以及作者关于 Abel 群问题迄今为止的最好结果。书末的附录选辑了作者自 2005 年以来陆续发现的当代主流数论基础理论中存在着的一些严重错误。本书对于解析数论领域的专家学者和研究生具有重要参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

指数和估计与数论问题/刘弘泉著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5603-5020-2

Ⅰ.①指… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①解析数论-研究 Ⅳ.①O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 270939 号

责任编辑　尹继荣
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
书　　号　ISBN 978-7-5603-5020-2
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 28.25　字数 461 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
印　　数　900 册
定　　价　75.00 元（精装）

前　言

对各种形式的指数和(又称为三角和)的估计,历来是解析数论中最深刻的研究.例如 Vinogradov 关于素变数指数和的估计,在基本解决奇数 Goldbach 问题中是必不可少的.著名的大筛法就是关于指数和估计的不等式.指数和估计中著名的 van der Corput 方法出现在 20 世纪 20 年代,是为了研究一些整点分布问题中渐近公式的余项较佳估阶以及 $\zeta(0.5+it)$ 的估阶,在我国数学家闵嗣鹤的带动下,尹文霖、越民义、陈景润、贾朝华等都曾搞过相关研究.北大闵嗣鹤的名著《数论的方法》(下册,科学出版社,1983)是国内最早详尽讲授 van der Corput 指数和估计方法及其二维发展的著作,曾引导我们许多后代学者从事这方面的研究工作.华罗庚对与圆法应用有关的一些指数和的估计作出过重要贡献,他的许多结果别人至今无法改进.我从大学生时期开始就一直在搞与 van der Corput 方法相关的问题研究,近 10 年来格外重视指数和估计的一些基本理论和重要问题.本书就是对我本人近期的一些工作加以系统总结和阐述.

第一章讲传统的 van der Corput 指数和估计方法以及指数对理论,提出许多新观点和方法,例如关于 van der Corput 方法的经典 B 步骤的改进.由 Heath-Brown 等人给出的 van der Corput 方法的 B 步骤中的余项估计不够精密,不适用于出现在关于 cubefull 数和 4-full 数等问题的研究中.闵教授的书中曾给出迄今为止最佳的 B 步骤的余项估计,但需要“代数函数”这一假设;我则能够去掉这个假设,新办法是利用实函数的 Taylor 展开式进行讨论,对此见本书的定理 1.4.2(这里成功地去掉了我 1999 年一篇论文中的一个不等式条件).又例如,与本书定理 1.3.1 相比,以往的 Weyl 不等式的形式是过于单一了,甚至不适用于应用第三章所阐述的新方法.本书定理 1.5.1 的(iii),是为了纠正 Ivic 的书(The Riemann zeta-function, Wiley, 1985)中 § 2.3 的错误而产生的,因为 E. Phillips(1933 年的论文)在简化 van der Corput 的原始工作时,对一条重要结果略而不证,致使后代学者忽略了相关技术步骤中的条件验证.定理

1.5.1实际上拓展了指数对适用的函数类.为便于读者理解，一般每节后都有少量练习题.

第二章讲二维 van der Corput 方法.我国尹文霖(闵嗣鹤的学生)在 1959 年首次发明了二维 Weyl 不等式后使用“累次求和”的方法(即对两个变量分别使用 B 步骤)，用以取代原来 Titchmarsh 等人用二重积分逼近的方法(见于闵嗣鹤的书)，这个方法被证明很有效，后经陈景润和 Kolesnik 等的改进，但都要假设“代数函数”这一无法验证的条件(事实上闵教授书中关于二重指数积分估计的经典结果，其证明也是有问题的).在 Graham 和 Kolesnik 的书中(Cambridge University Press，1991)，他们总结出估计二维指数和的非常有用的“AB 定理”，但该定理包含许多未经验证的假设条件(实际上也无法验证).本章内容主要采用我在 2007 年发表在 Acta Arith. 上 40 余页的论文提出的新技术，特别地仅使用实函数单调区间的讨论，给出“AB 定理”不包含任何无法验证的条件的证明(确切地说，我证明的“AB 定理”在形式上与 Graham 和 Kolesnik 不尽相同，但在应用上几乎一致).这个结果已经广泛应用于许多问题的研究中，包括我最近已经发表在《匈牙利数学学报》(Acta Math. Hung.)上分别关于 k-free 数和两互素立方和问题的两篇论文中.本章还证明了一个新的二重指数和估计，在第五章中有重要应用.

第三章是关于多维指数和的全新估计的(“全新”意指不使用 van der Corput 方法)，为此我详尽地讲解了自 1986 年 E. Bombieri 和 H. Iwaniec 的工作以来出现在国际上的新型大筛法不等式(其建立过程要用到大量复杂的复分析工具，因为他们使用了 J. D. Vaaler 的结果)，这经过 1989 年 E. Fouvry 和 H. Iwaniec 的工作后，通过将指数和估计转化为计数某些整点的个数，给出多维指数和的一些新估计，能取得一些突破性结果(例如我 1991 年发表在 Acta Arith. 上的关于 Abel 群问题的结果改进了 Kolesnik 于 1981 年发表在 J. reine angew. Math. 上的结果).但他们关于 $\zeta(0.5+it)$ 等工作却含有本质错误(见 §5.1).本章还给出我对于 Robert 和 Sargos 于 2006 年发表在 J. reine angew. Math. 上的近乎最佳的估计三维指数和结果的改进，方法是受到建立著名的 Vinogradov 中值定理的启发，适当采用了数学归纳法，这取材于我 2010 年发表在 Functions et Approximatio 上的一篇论文.

第四章首先讲了 k-full 数($k=2,3$)分布的渐进公式,包括其在短区间中的分布的最新结果.这类问题是指数和估计方法超越解析方法最显著的地方,因为即使假设zeta函数的 Riemann 猜想,用解析方法得到的无条件的余项估计也比较差.本章还讲了广义的三维除数问题的渐进公式的余项形式,我于 2010 年获得的对于Abel群问题的国际最佳估计.本章最后讲了我最近获得的 4-full 数分布的终极性结果,即余项估计本质上已不能再改进了(这还意味着以前许多作者的工作是错误的).

第五章涉及历史上使用 van der Corput 方法处理的几个著名问题:Dirichlet 除数问题、圆内整点问题、$\zeta(0.5+it)$的估计、形如$[n^c]$的素数分布的渐近公式.主要使用本书第二章中由我本人给出的关于二维指数和正确且无条件的估计,这里给出迄今为止正确的国际最佳估计.同时,我指出了以前许多作者在同类工作中存在的错误.本章还顺带较详细地讲述了象 ζ一函数的逼近函数方程、von Mangoldt 函数的 Heath-Brown 型分拆等相关的重要理论.

第六章讲贾朝华在 1992 年研究 squarefree 整数分布问题时引进的一种估计任意系数二重指数和的重要新技术及其可能的改进.该方法产生的估计,被广泛用于其他一些问题的研究中.我们证明三个一般的估计,并给出在几个问题中的应用.

第七章向读者阐述我获得的关于 squarefree 数和 squarefull 数分布问题的余项估计(假设 Riemann 猜想成立),都是目前世界最好结果,分别改进了贾朝华 1992 年的工作和吴杰 2001 年的工作.这也是两个历史较为悠久的经典问题,我的新结果无疑需要许多技术上的突破.但这里未包括我最近发表的关于 k-free 数($k\geqslant 5$)和两互素平方和问题的新结果(它们也要假设 Riemann 猜想),因为那要用到 R. C. Baker 对 Möbius 函数重要的新分析.

第八章介绍我关于 Euler 函数渐近公式余项改进和素变数指数和估计的两项新结果,分别改进了 Walfisz(1963)和陈景润(1984)的重要结果.

本书之末介绍我在当代主流数论中发现的一些重大错误.

解析数论中与 van der Corput 方法有关的研究在整个数学领域中来说也是技术性很强的,而且很引人入胜,因为当一些技术步骤改变之后,就会产生一个超越前人的新结果.许多人看不起解析数论中对一些数值的小改进,与此相

反我却认为很重要,尤其是能够改进别人维持了很多年的结果,因为这不仅标志着数学在进步,而且这像下围棋一样,能够以微弱优势取胜恰恰说明难度很大,是功力的体现.也正因为如此,对于一些问题要取得正确的新结果是比较困难的,这需要多年的积累,包括对以前工作的深刻理解.解析数论中一些研究的重要性,在我已发现数学诸多分支存在严重错误的情况下,尤显突出(见本书附录).总之,我由衷地希望本书的出版能够对数学的发展有所裨益.

哈工大数学系张传义、薛小平、唐余勇三位教授对本书的出版给予支持和鼓励,我在此对他们由衷地表示感谢.哈工大数学系资助了本书的出版费用.

刘弘泉

2014 年 10 月于哈工大

常用记号说明

$[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

$\psi(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$

$\|x\|=\min(x-[x],1-x+[x])$

$a\ll A$ 或 $a=O(A)$ 表示 $|a|\leqslant cA$，c 为一个正的常数$(A>0)$

$e(\xi)=\exp(2\pi\mathrm{i}\xi)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi}=\cos(2\pi\xi)+\mathrm{i}\sin(2\pi\xi)$（$\xi$ 为实数）

$S_f(a,b)=\sum_{a\leqslant n\leqslant b}e(f(n))$

$m\sim M$ 表示 $M<m\leqslant 2M(M>0)$

$t\approx T$ 表示 $C_1T\leqslant t\leqslant C_2T$，$C_1$ 与 C_2 为两个正的常数$(t>0,T>0)$

$A(p,q)=\left(\frac{p}{2(1+p)},\frac{1}{2}+\frac{q}{2(1+p)}\right)$

$B(p,q)=\left(q-\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}\right)$

$S_g(D)=\sum_{(a,b)\in D}e(g(a,b))$

$g_{i,j}(x,y)=\frac{\partial^{i+j}g}{\partial x^i\partial y^j}(x,y)$

$(\xi)_0=1(\xi\neq 0)$

$(\xi)_s=\xi(\xi-1)\cdots(\xi-s+1)$，$s$ 为正整数

$\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e(yx)\mathrm{d}y$

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}(\mathrm{Re}\ s>1)$

$\tau(a,b,c;n)=|\{(n_1,n_2,n_3)\mid n_1^an_2^bn_3^c=n,n_i$ 为正整数$,1\leqslant i\leqslant 3\}|$

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & 若\ n=1,\\ (-1)^r, & 若\ n=p_1\cdots p_r, p_1<\cdots<p_r,\\ 0, & 若\ p^2\mid n.\end{cases}$$

目　　录

第一章
指数和估计的基本理论

§1.1 函数 $\psi(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$ 的 Fourier 分析

在本章中,我们研究形如

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} e(f(n))$$

的指数和的估计,这里 $1\leqslant a<b\leqslant 2a$, $f(x)$ 为实函数,它在区间 $[a,b]$ 上至少有连续的一阶导函数,n 表示整变量,而 $e(\xi)=\exp(2\pi i\xi)$.

用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,函数 $\psi(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$ 是周期为 1 的函数,它出现在许多求和的余项之中. 本节中我们将说明如何用 Fourier 分析的方法来处理 $\psi(x)$,以使许多数论问题的研究转化为指数和的估计,先证明几个引理.

引理 1.1.1 设 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$1\leqslant\frac{\theta}{\sin\theta}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

证明:(i) 设 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,令 $g_1(x)=x-\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,则 $g_1(x)$ 在区间 $[0,\theta]$ 上连续,在 $(0,\theta)$ 上可导. 由 Lagrange 中值定理,存在 $\xi\in(0,\theta)$,使得

$$g_1(\theta)-g_1(0)=\theta\cdot g_1'(\xi)=\theta(1-\cos\xi)\geqslant 0,$$

由此即得 $\frac{\theta}{\sin\theta}\geqslant 1$.

(ii) 设 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,令 $g_2(x)=\operatorname{tg}x-x$, $0\leqslant x\leqslant\varphi$,则 $g_2(x)$ 在区间 $[0,\varphi]$

上连续,在$(0,\varphi)$上可导.由 Lagrange 中值定理可得

$$g_2(\varphi)-g_2(0)=\varphi g_2'(\xi_1)=\varphi\cdot\mathrm{tg}^2\xi_1\geqslant 0,$$

其中ξ_1是开区间$(0,\varphi)$中某个数,由此可知$g_2(\varphi)\geqslant 0$,$\mathrm{tg}\,\varphi\geqslant\varphi$.

(iii) 设$0<\theta<\frac{\pi}{2}$,令$g_3(x)=\frac{x}{\sin x}$,$x\in[\theta,\frac{\pi}{2}]$,则$g_3(x)$在$[\theta,\frac{\pi}{2}]$上连续,在$(0,\frac{\pi}{2})$上可导,由 Largrange 中值定理可知存在$\xi_2\in(\theta,\frac{\pi}{2})$,使得

$$g_3\left(\frac{\pi}{2}\right)-g_3(\theta)=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)g_3'(\xi_2)=(\frac{\pi}{2}-\theta)\cdot\frac{\sin\xi_2-\xi_2\cos\xi_2}{\sin^2\xi_2}.$$

由(ii)可知$\sin\xi_2-\xi_2\cos\xi_2=\cos\xi_2\cdot(\mathrm{tg}\,\xi_2-\xi_2)\geqslant 0$.所以

$$g_3(\theta)\leqslant g_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

由(i)与(iii),可知引理成立. **证毕.**

引理 1.1.2 设实函数$g(x)$在区间$[a,b]$上 Riemann 可积,λ为非零实数,则有

(i) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)dx=0.$

(ii) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(x)\cos(\lambda x)dx=0.$

证明:(i) 因为g在$[a,b]$上 Riemann 可积,所以g在$[a,b]$上有界,且在$[a,b]$上绝对可积.设$n\geqslant 1$,$[a,b]$的n等分点为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b,x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}.$$

又设$I_i=[x_i,x_{i+1}]$,$0\leqslant i\leqslant n$,

$$\sup_{x\in I_i}g(x)=k_i,\quad \inf_{x\in I_i}g(x)=k_i,$$

则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int_{I_i}g(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right|\\&=\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\left|\int_{I_i}(g(x)-k_i)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x+k_i\int_{I_i}\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int_{I_i}(g(x)-k_i)\mathrm{d}x+\frac{2}{|\lambda|}(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|k_i|)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant n}(K_i-k_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)+\frac{2}{|\lambda|}\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|k_i|\right). \qquad (1)$$

因为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以当 $n\to\infty$ 时

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n}(K_i-k_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)\to 0.$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant N(\varepsilon)$ 时，(1) 式右边的第一个求和小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $n=[N(\varepsilon)]+1$，当 n 取定时，可知存在 $\lambda(\varepsilon)$，使得在 $\lambda>\lambda(\varepsilon)$ 时，(1) 式右边第二个求和也小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 则当 $\lambda>\lambda(\varepsilon)$ 时

$$\left|\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

所以按定义可知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0.$$

(ii) 类似可证. **证毕.**

引理 1.1.3 设实函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续一阶导函数 $f'(x)$，c_m 为任意复数

$$C(x)=\sum_{a<m\leqslant x}c_m,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则(遇到复值函数，其积分定义为其实部的积分加上其虚部的积分乘以虚单位 $i=\sqrt{-1}$)

$$\sum_{a<n\leqslant b}C_n f(n)=-\int_a^b C(x)f'(x)\,\mathrm{d}x+C(b)f(b).$$

特别地，若 $1\leqslant a<b\ll a$，$|f(x)|\leqslant M$，$|f'(x)|\ll Ma^{-1}$，则存在 $b_1\in(a,b)$，使得

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b}C_n f(n)\right|\ll |C(b_1)|M.$$

证明：我们有

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leqslant b}C_n f(n)&=\sum_{a<n\leqslant b}(C(n)-C(n-1))f(n)\\&=\sum_{a<n\leqslant b}C(n)f(n)-\sum_{a<n\leqslant b-1}C(n)f(n+1)\\&=C(b)f([b])+\sum_{a<n\leqslant b-1}C(n)(f(n)-f(n+1)),\end{aligned}\qquad (2)$$

这里$[b]$为不超过b的最大整数. 先设$[b]\geqslant[a]+2$,对每个整数n,$[a]+1\leqslant n\leqslant[b]-1$,若将区间$[n,n+1]$分成$m$个相等的小段($m\geqslant 3$),即

$$n=x_0<x_1<\cdots<x_m=n+1,\quad x_{i+1}-x_i=\frac{1}{m},$$

并在$[x_i,x_{i+1}]$中任选一点ξ_i,则

$$\sum_{i=0}^{m-1}C(\xi_i)f'(\xi_i)\Delta X_i=C(n)\sum_{i=0}^{m-1}f'(\xi_i)\Delta x_i+o(|\widetilde{C}(n)|\cdot K\cdot\Delta x_{m-1})\tag{3}$$

其中

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\ |\widetilde{C}(n)|=\max(|C(n)|,|C(n+1)|),$$
$$K=\max_{n\leqslant x\leqslant n+1}|f'(x)|<\infty.$$

在(3)中令$m\to\infty$,则由积分的定义可得(对于复值的$C(x)f'(x)$,分别考虑其实部与虚部的积分,然后再合起来)

$$\int_n^{n+1}C(x)f'(x)\mathrm{d}x=C(n)\int_n^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x=C(n)(f(n+1)-f(n)).\tag{4}$$

类似地,可证

$$\int_a^{[a+1]}C(x)f'(x)\mathrm{d}x=0,\int_{[b]}^{b}C(x)f'(x)\mathrm{d}x=C(b)(f(b)-f([b])).\tag{5}$$

因此,当$[b]\geqslant[a]+2$时,由(3),(4)与(5)可得

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leqslant b}C_nf(n)&=C(b)f([b])+\sum_{[a]+1\leqslant n\leqslant[b]+1}C(n)(f(n)-f(n+1))\\&=C(b)f([b])-\sum_{[a]+1\leqslant n\leqslant[b]+1}\int_n^{n+1}C(x)f'(x)\mathrm{d}x\\&=C(b)f([b])-\int_{[a]+1}^{[b]}C(x)f'(x)\mathrm{d}x\\&=C(b)f([b])-\int_a^bC(x)f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即引理成立. 当$[b]=[a]$或$[b]=[a]+1$时,由(2)与(5)立即可知引理中的等式成立. 由等式及假设条件容易导出引理中的估计.　　**证毕.**

推论 1.1.4　设实函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续导函数$f'(x)$,$\psi(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$,则

$$\sum_{a<n\leqslant b}f(n)=\int_a^bf(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\psi(x)f'(x)\mathrm{d}x+\psi(a)f(a)-\psi(b)f(b).$$

特别地，由此我们可得知 $\psi(x)f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积(事实上，由于 $\psi(x)$ 有界且仅在整点处不连续，$\psi(x)f'(x)$ 必在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，这可由定义象证明(4)那样加以证明).

证明：在引理 1.1.3 中令 $c_n=1$，则 $C(x)=[x]-[a]$，$a\leqslant x\leqslant b$. 所以

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n)=\int_a^b([x]-[a])f'(x)\mathrm{d}x+([b]-[a])f(b)$$

因为 $[x]-[a]=x-a+\psi(a)-\psi(x)$，所以，由分部积分可得

$$\begin{aligned}&\int_a^b([x]-[a])f'(x)\mathrm{d}x\\&=\psi(a)(f(b)-f(a))+\int_a^b(x-a)f'(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\psi(x)f'(x)\mathrm{d}x\\&=\psi(a)(f(b)-f(a))+f(b)(b-a)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\psi(x)f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

又因为 $([b]-[a])f(b)=(b-a)f(b)+(\psi(a)-\psi(b))f(b)$，由(6)及(7)，合并各项可知推论成立.　**证毕.**

我们关于函数 $\psi(x)$ 的结果为：

定理 1.1.5　设 $H\geqslant 3$，x 是任意实数，则

$$\psi(x)=-\sum_{1\leqslant|n|\leqslant H}\frac{e(nx)}{2\pi in}+O\left(\min\left(1,\frac{1}{H\|x\|}\right)\right)\tag{8}$$

其中 O 记号所蕴含的常数不依赖于 H 与 x，而 $\|x\|=\min(x-[x],1-x+[x])$，

$$\min\left(1,\frac{1}{H\|x\|}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_h e(hx)\tag{9}$$

其中

$$a_h\ll\min\left(\frac{\log H}{H},\frac{H}{h^2}\right)\tag{10}$$

证明：(1) 对任一个在 $[0,1]$ 上连续的任一实函数 $\Phi(\theta)$ 以及 $x\in(0,1)$，令

$$s_N(\Phi,x)=\sum_{|n|\leqslant N}a_n e(nx)$$

其中 N 为正整数，$N\geqslant 3$，$e(\xi)=\exp(2\pi i\xi)$ 而(复值函数的积分定义为其实部的积分与其虚部的积分乘以 i 之和)

$$a_n=\int_0^1\Phi(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta$$