献给热爱研读数学的朋友们

Niels Henrik Abel

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理

细说五次方程无求根公式

冯承天◎著

阿贝尔在约十九岁时提出了“阿贝尔不可能性定理”，使得“一般五次方程的根式求解”这一困扰数学大师们长达近三个世纪的数学难题以“不可能用根式求解”之“不可能性”划上了句号。这是代数史上的一座里程碑。

只要勤于思考，你一定能掌握阿贝尔定理的证明；只要乐于思考，你一定能掌握初等数论与高等代数的一些内容、方法和理论。

上海著名商标 ECNUP 华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

Niels Henrik Abel

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理

细说五次方程无求根公式

冯承天◎著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理：细说五次方程无求根公式/冯承天著.—上海：华东师范大学出版社，2014.9
ISBN 978-7-5675-2531-3

Ⅰ.①从… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①高次方程-求解
Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第210909号

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理
——细说五次方程无求根公式

著　　者　冯承天
策划组稿　王　焰
项目编辑　王国红
审读编辑　王小双
封面设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　8.5
字　　数　115千字
版　　次　2014年11月第1版
印　　次　2014年11月第1次
书　　号　ISBN 978-7-5675-2531-3/O·254
定　　价　22.00元

出 版 人　王　焰

献给热爱研读数学的朋友们

内 容 简 介

本书共分六个部分，十六个章节，是讲解一般五次多项式方程无根式求解的阿贝尔定理的一本入门读物.

在第一部分中，我们从多项式方程的求解和数系的扩张讲起，详述了一次、二次、三次以及四次方程的根式求解. 在第二、第三以及第四部分中，我们论述了关于正整数、数域以及数系上多项式的一些概念和理论，其中包括了有重要应用的算术基本定理、欧几里得算法、贝祖等式、艾森斯坦不可约判据、多项式的可除定理与唯一因式分解定理、实系数多项式实数根的根数的斯图姆定理以及对称多项式基本定理等等. 在第五部分中，我们证明了阿贝尔引理、阿贝尔不可约定理，也讨论了一些重要的扩域：n 型纯扩域以及复共轭封闭域. 在最后的第六部分中，我们阐明了多项式方程根式求解的含义及其数学表达，论证了克罗内克定理，并最终严格证明了“阿贝尔不可能性定理”.

全书起点低，叙述详尽，论证严格，例子丰富，前后呼应，是一本深入浅出，可供数学爱好者学习新知识和方法，扩展视野，同时又能得到美的享受的可读性较强的读物.

前 言

半亩方塘一鉴开，天光云影共徘徊．
问渠那得清如许？为有源头活水来．
——宋·朱熹《观书有感》

数学家曾坚持不懈地求索多项式方程的根式求解．事实上，早在公元前2000多年，古巴比伦人已经知道如何去解一些二次方程了．成书于公元前202年到公元9年我国汉朝时期的《九章算术》就编入了三元一次方程的题目．意大利数学家费尔洛（Scipione del Ferro，1465—1526）、塔尔塔里亚（Niccolo Tartaglia，约1499—1557）和费拉里（Ferrari Lodovico，1522—1565）在十六世纪分别研究得出了一般三次和四次方程的根式求解方法．他们的成果进而由费拉里的老师，意大利数学家卡丹（Girolamo Cardano，1501—1576）进一步完善，并发表在他1545年出版的著作《大术》（*Ars Magna*）之中．

这样，二次、三次和四次方程的堡垒就相继被攻克了．因此很有理由相信，只要有足够的努力与聪明才智，人们也一定能根式求解五次方程，也即会得出一个"求根公式"，使人们只要把方程的各已知系数代入，经过若干次"＋"、"－"、"×"、"÷"以及开方运算，便能得出方程的各个根．

然而，在随后的近300年中，尽管有数学大师们一代接一代地竭尽全力的努力，一般五次方程的根式求解仍无法解决．直到十九世纪二十年代初，年仅19岁的挪威数学家阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802—1829）最终较完整地证明了"一般五次方程不可根式求解"——这就是著名的"阿贝尔不可能性定理"．

一个困惑数学家们长达约三个世纪的难题就以"不可能性"而划上了句

号.这是代数学史上的一座里程碑.为了能与广大热爱研读的朋友们分享这一优美的理论,笔者撰写的这本书起点较低,从数系,整数运算以及多项式等的一些基础理论和定理讲起,尽量说得深入透彻而详尽;书中包括有许多实例可供读者消化、推敲和练习,而且尽力达到前后呼应;对用到的各种理论和定理都加以严谨地详述.当然,为了克服论述此专题的各文献中的种种晦涩难懂,叙述过简与不清,或有错误、或有漏洞,于是我们就采用了一种“细说”的方式.这样可以使本书在数学内容上达到最大程度的“自封”.

不过,笔者还是在书后列出了笔者在研读阿贝尔定理和撰写本书时读过的部分好书和文献,希望对那些想继续深入研究的读者有用.

一系列的数学实践使笔者深信:一位掌握复数概念与运算的读者只要勤于思考是一定能掌握书中的(在其他数学分支中也很有用的)一些基础数学知识和定理,从而大大提高他们的数学修养;只要乐于思考,就一定能掌握“阿贝尔不可能性定理”证明的精髓,同时给他们带来数学之美的享受.

最后,感谢首都师范大学栾德怀教授,感谢他长期的关心、教导和鞭策.感谢上海师范大学周才军教授和陈跃副教授,他们仔细阅读了全书,并提出了许多宝贵意见和建议.感谢上海考试院的牟亚萍女士和上海师范大学的吴俊老师认真地打出了一稿又一稿的修改稿件,为本书的出版作出了巨大的努力.感谢华东师范大学出版社的编辑,他们为本书的出版给予了宝贵的支持、促进和帮助.

希望本书能为广大的数学爱好者提供一本学习证明“阿贝尔不可能性定理”的可读性较强的读物,也极希望得到他们的批评与指正.

冯承天

2014 年 5 月于上海师范大学

目　录

第一部分　多项式方程的求解与数系的扩张

第二部分　整数的一些基本概念、定理与理论

第三部分 数域、扩域与代数扩域的一些基本理论

第四部分 多项式的一些基本概念、定理与理论

第五部分 阿贝尔引理、阿贝尔不可约定理以及一些重要的扩域

第六部分　多项式方程的根式求解、克罗内克定理与鲁菲尼—阿贝尔定理

第一部分
多项式方程的求解与数系的扩张

在这一部分中，我们从解多项式方程讲起，讨论了数系的扩张：从自然数、整数、有理数、实数一直到复数，而且阐明了代数学基本定理，以及复数系是代数封闭的，并最后回顾了复数系的运算性质和法则. 与此同时，也讨论了在后文中有重大应用的 1 的 n 次方根和纯方程的解.

在这一部分中，我们还详细地讨论了用几何(或配方)法解二次方程，用变量代换法解三次方程，以及用因式分解法解四次方程. 这些方程都是有“求根公式”的. 最后讲述了数学家对“解一般五次方程”的这一课题的不懈努力.

第一章

多项式方程的求解和数系的扩张

§1.1 从自然数到有理数

人类最早使用的数是正整数系 $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$，后来又发现了负数和零. 零是大约在公元 600 年，由印度数学家发现的，而负数则是欧洲文艺复兴的成果. 人们把 0，1，2，3，… 集合起来，称为自然数系，记作 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，而把 0，±1，±2，… 集合起来，称为整数系，记作 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

在整数系 $\mathbf{Z}$ 中，对于"+"、"−"这两种运算而言，是封闭的，也即如果 z_1，$z_2 \in \mathbf{Z}$，则 $z_1 \pm z_2 \in \mathbf{Z}$. 由此，方程

$$x + p = 0,\ p \in \mathbf{Z} \tag{1.1}$$

有解 $x = -p \in \mathbf{Z}$. 不过，一般一次方程

$$px + q = 0,\ p,\ q \in \mathbf{Z},\ p \neq 0 \tag{1.2}$$

的解 $x = -\dfrac{q}{p}$ 一般不属于 $\mathbf{Z}$，这就使得我们要把我们所讨论的数系，由 $\mathbf{Z}$ 扩张为有理数系 $\mathbf{Q} = \left\{\dfrac{q}{p} \middle| q,\ p \in \mathbf{Z},\ p \neq 0\right\}$. 有理数系 $\mathbf{Q}$ 的特点是它对于四则运算"+"、"−"、"×"和"÷"（0 不为除数）是封闭的，而且它还是稠密的：在任意两个不同的有理数 $\dfrac{q_1}{p_1}$ 和 $\dfrac{q_2}{p_2}$ 之间就都有无数个有理数，例如说，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q_1}{p_1} + \dfrac{q_2}{p_2}\right)$就是其中的一个，这是不同于整数系 $\mathbf{Z}$ 的：例如说在 21、22 这两个整数之间就没有任意整数了.

§1.2 实数和复数

在公元前 500 年左右，古希腊人已经发现了无理数. 就解方程而言，我们

知道二次方程

$$x^2 - 2 = 0 \tag{1.3}$$

的根为 $\pm\sqrt{2}$，这就迫使我们进入到无理数集. 我们把有理数和无理数的并集称为实数系，记为 $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}$ 的特点之一是它的连续性. 它与实数轴上的点构成了一一对应.

然而 $\mathbf{R}$ 还不足以使我们解出如

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.4}$$

这样的方程. 为此人们在 16 世纪中引入了复数系 $\mathbf{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. 其中虚数 i 满足 $\mathrm{i}^2 = -1$，于是(1.4)就有了解 $\pm\mathrm{i}$.

不过，例如说，要求解方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, 是否还需要我们继续扩张数系，才能得到它的所有解呢？这一问题会在后一节中给予解答.

§1.3 代数学基本定理

早在 1629 年，法国—荷兰数学家吉拉德(Albert Girard, 1595? —1632)就推测 n 次复系数多项式方程有 n 个复数根. 1746 法国数学家达朗贝尔(Jean Le Rond d'Alembert, 1717—1783)提出了代数学基本定理，但他的证明不完整. 1799 年德国数学家高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)在他的博士论文中较严格地证明了这一定理，随后他又给出了其他三个证明. 他的最后一个证明出现在 1849 年，即在他的最后一篇论文之中，这离他撰写博士论文已整整 50 年了. 高斯之后有许多数学家用了一百多种不同的方法证明了该定理，其中有瑞士数学家阿尔冈(Jeam-Robert Argand, 1768—1822)，法国数学家柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789—1875)，德国数学家魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass, 1815—1897)和德国数学家克罗内克(Leopold Kronecker, 1823—1891)等人，这一点也极其突出地说明了数学内在的基本统一性.

代数学基本定理说的是：(参见附录 1)

定理 1.3.1(代数学基本定理) $n(n > 0)$ 次多项式方程

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \tag{1.5}$$

其中 $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, $a_0 \neq 0$, 有 n 个复数根.

这个定理表明复系数方程的根仍是复数，所以如果我们在复数系的框架中求解多项式方程，那么我们就不必再对数系进行扩张了. 为此我们把复数系 **C** 称为代数闭域.（参见[1]）

我们将在下一节中利用复数的运算（参见附录 2）来讨论 1 的 n 次方根，在 §1.5 中讨论重要的纯方程的解，以及在本章的最后一节 §1.6 中对复数系的运算性质和法则作一回顾与总结.

§1.4 1 的 n 次方根

从代数学基本定理可知，方程 $x^n-1=0$, $n\in\mathbf{N}^*$ 有 n 个根. 设 $x=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则由棣莫佛公式 $[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$ 可知 1 的 n 次方根是 $\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$. 记 $\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，则 1 的 n 次方根集合可表为

$$G_n=\{1, \zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}\}. \tag{1.6}$$

例 1.4.1 对于 $n=1, 2, 3, 4$，则分别有 $G_1=\{1\}$, $G_2=\{1, -1\}$, $G_3=\{1, \omega, \omega^2\}$，其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $G_4=\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

由于 ζ 是 $x^n-1=0$ 的根，因此

$$\zeta^n=1. \tag{1.7}$$

其次从 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，可知 ζ 也是 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ 的根，因此有

$$\zeta^{n-1}+\zeta^{n-2}+\cdots+\zeta+1=0. \tag{1.8}$$

再则从 $\zeta^m=\cos\frac{2\pi m}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi m}{n}$，以及 $\zeta^{n-m}=\cos\frac{2m\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2m\pi}{n}$，可得出

$$\zeta^m\cdot\zeta^{n-m}=1, m=1, 2, \cdots, n. \tag{1.9}$$

以及

$$\zeta^{n-m}=\bar{\zeta}^m. \tag{1.10}$$

其中符号“$\overline{}$”表示取“共轭”的运算.

例 1.4.2 在 $n=3$ 时,(1.7)、(1.8)、(1.9)、(1.10)分别为

$$\omega^3=1;\ \omega^2+\omega+1=0;\ \omega\cdot\omega^2=1;\ \omega=\overline{\omega^2}.$$

例 1.4.3 沿用例 1.4.1 的符号,$G_3=\{1,\ \omega,\ \omega^2\}$,用 ω 构成 ω 的各幂次有 $\omega^1=\omega,\ \omega^2,\ \omega^3=1$,因此 ω 的各幂次能给出 G_3,即 ω 生成了 G_3,记为 $\langle\omega\rangle=G_3$. 同样,对于 ω^2,从 $(\omega^2)^1=\omega^2,\ (\omega^2)^2=\omega,\ (\omega^2)^3=1$,有 $\langle\omega^2\rangle=G_3$.

例 1.4.4 对于 $n=5$,$G_5=\{1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4\}$,不难得出 $\langle\zeta\rangle=\langle\zeta^2\rangle=\langle\zeta^3\rangle=\langle\zeta^4\rangle=G_5$,一般地,对于 $x^p-1=0$,其中 p 是一个素数(参见 §3.2),有 $G_p=\{1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \cdots,\ \zeta^{p-1}\}=\langle\zeta\rangle=\langle\zeta^2\rangle=\cdots=\langle\zeta^{p-1}\rangle$.(参见例 4.3.3)而且当 p 是奇素数时,$\zeta,\ \zeta^2,\ \cdots,\ \zeta^{p-1}$ 都是非实复数.

§1.5 纯方程的解

形如 $x^n-a=0,\ n\in\mathbf{N}^*,\ a\in\mathbf{C}$ 型方程称为纯方程. 设复数 d 满足 $d^n=a$,则容易得出

$$d,\ d\zeta,\ d\zeta^2,\ \cdots,\ d\zeta^{n-1} \tag{1.11}$$

是 $x^n-a=0$ 的全部根,其中 $\zeta=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

由于 $x^n-a=0$ 这一方程共有 n 个根,所以 n 与 a 并不能唯一地确定一个根. 因此符号 $a^{\frac{1}{n}}$ 或 $\sqrt[n]{a}$ 的意义就不明确. 不过有时我们也使用记号 $a^{\frac{1}{n}}$ 或 $\sqrt[n]{a}$,这指的是满足 $x^n-a=0$ 的某一(确定)的根. 例如熟知的是 $\sqrt{2}$ 就表示满足 $x^2-2=0$ 的那一算术根.

§1.6 复数系的运算性质和法则

复数系 $\mathbf{C}$ 中有以下运算性质:

1. “+”法运算,对于它有:

(i) 对任意 $a,\ b\in\mathbf{C}$,有 $a+b\in\mathbf{C}$;(“+”法运算的封闭性)

(ii) 对任意 $a,\ b,\ c\in\mathbf{C}$,有 $(a+b)+c=a+(b+c)$;(“+”法运算的结