



普通高等教育“十二五”规划教材

现代控制理论及其MATLAB实现

韩致信 编 著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

兰州理工大学研究生重点学位课程建设资助项目

现代控制理论及其 MATLAB 实现

韩致信 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书主要介绍应用现代控制理论进行系统分析和综合的方法及其 MATLAB 编程与计算。全书共分 6 章, 主要内容包括: 第 1 章控制系统的状态空间数学模型, 第 2 章控制系统的运动分析, 第 3 章控制系统的稳定性分析, 第 4 章控制系统的能控性与能观测性, 第 5 章线性定常控制系统的综合, 第 6 章最优控制。本书配套的电子课件和习题参考答案, 可登录华信教育资源网 www.hxedu.com.cn, 注册后免费下载。

本书可作为机械工程、动力工程、仪器科学与技术、交通运输工程和船舶工程等学科的硕士研究生教材, 也可作为自动化、电气工程及其自动化等专业的本科生教材。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论及其 MATLAB 实现/韩致信编著. —北京: 电子工业出版社, 2014.9
ISBN 978-7-121-24366-0

I. ①现… II. ①韩… III. ①现代控制理论—高等学校—教材②Matlab 软件—高等学校—教材
IV. ①O231②TP317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 215609 号

策划编辑: 凌 毅 责任编辑: 凌 毅

印 刷: 北京中新伟业印刷有限公司

装 订: 北京中新伟业印刷有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 14.75 字数: 378 千字

版 次: 2014 年 9 月第 1 版

印 次: 2014 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 3 000 册 定价: 36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系。联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010)88258888。

前 言

现代控制理论是控制工程学科最重要的基础理论之一,前承经典控制理论,后继智能控制理论,成形于20世纪60年代初。其主要内容有线性系统理论、非线性系统理论、最优控制理论、随机控制理论和适应控制理论等。

现代控制理论的奠基成果是美国数学家贝尔曼(R. Richard Bellman)于1954年创立的动态规划法、前苏联数学家列夫·庞特里亚金(Лев Семёнович Понтрягин)于1956年创立的极大值原理和匈牙利裔美国数学家卡尔曼(Rudolph E. Kalman)于1961年创立的卡尔曼滤波理论。这些成果为控制理论开辟了一个新天地并独立于经典控制理论而成为一个新领域。

现代控制理论是伴随着空间技术与计算机技术的发展而诞生和成熟的。正是飞速发展的空间技术使该理论有了思想源泉和用武之地,也正是日新月异的计算机技术为该理论提供了强有力的工具,使其如虎添翼。

虽然现代控制理论属于控制工程学科的基础理论,但它研究和解决的问题是系统问题,而系统问题不仅存在于控制工程学科,而且存在于大多数工程学科、自然学科和农林学科,甚至存在于经济和管理学科。尽管不同学科中的系统问题各有不同,但毕竟存在共性。共性问题可用相同或类似的方法解决。他山之石,可以攻玉,学科交叉和渗透更能促进学术进步。

对于非控制工程学科,现代控制理论是他山之石。然而现代控制理论的数学基础——状态空间模型又何尝不是控制工程学科的他山之石,因为状态空间模型源于机械工程学科的分析力学。这一事实说明不同学科之间虽然存在界线,但更存在交叉与融合。

现代控制理论是研究控制问题的基础理论,而控制是所有工程领域不可或缺的,无论是信息还是金融、机械还是纺织、宇航还是船舶、冶金还是化工、交通还是能源、家用电器还是仪器仪表等,哪个领域能离开控制?毫不夸张地说,没有控制就没有现代文明。从这个意义上讲,现代控制理论是所有工程学科的一块理论基石。

现代控制理论不仅是一门重要的学科理论,还是一门卓越的自然辩证法,处处贯穿着系统的观点、运动的观点、内因外因的观点、事物相互作用相互联系的观点、主要矛盾和次要矛盾的观点等,闪烁着辩证法的光芒。这些对于启迪思想、培养分析问题和解决问题的能力十分有益。学习和掌握这门理论,对从事科学研究和技术工作的人无疑十分必要。

由于上述原因,现代控制理论不仅是高等院校电气工程和自动化专业本科生和硕士研究生的学位课,也是机械工程、动力工程、仪器科学与技术、交通运输工程和船舶工程等专业硕士研究生的学位课。

翻开现代控制理论方面的著作,从头至尾整页整页的数学公式,乍一看,与数学别无二致。的确,现代控制理论的大部分内容不是数学论证就是数学计算,有些内容还触及应用数学前沿,但这些论证和计算是关于控制系统具体问题的数学论证和计算,或者说是求解具体控制工程问题的数学。对于读者来说,每一个问题的数学论证和计算或者有益于提高数学建模和分析能力,或者有益于提高分析和解决工程问题的能力,或者有益于培养逻辑推理和判断能力,总而言之,有益于充实理论和技术素养、提高科学研究能力。这也正是非控制工程专业的研究生学习现代控制理论的根本出发点和归宿。

本书是为适应机械工程和动力工程专业硕士研究生学位课程“现代控制理论”的教学需要编写的,内容的深度和广度也是根据这两专业研究生的知识结构和综合素质要求选定的。

与同类教材相比,本书的特点表现为“三多”,即例题多,结构图多, MATLAB 程序多。

● 例题多

现代控制理论包含许许多多定义、定理和公式,要弄清和掌握这些定义、定理和公式,一要记忆并透彻理解其文字描述和公式,二要完成适量练习。而要让读者准确理解定义、定理和公式并完成练习,仅凭简练透彻的文字描述和条理清晰的推导论证是远远不够的,必须提供足够多的例题,以例题为桥梁,引导读者由表及里、由此及彼地在理论公式与应用计算中徜徉,实现融会贯通。

本书为所有重要内容配置了例题,特别是有些论证过程理论价值不大的定理直接用例题诠释,舍去推导过程。经对比和挑选,全书共设有 63 个例题,一个例题针对一个理论问题。

另外本书附录 A 提供了所有习题的参考答案,难度较大的习题,其答案步骤比较完整。

● 结构图多

系统结构图既是系统数学模型的图形描述,反映系统信号传输过程和相互联系,又是系统工程设计依据。

系统综合是控制理论研究的两大命题之一。系统综合的计算结果只有通过结构图体现出来,才能厘清信号传输过程和相互联系,为工程设计提供依据。比如说如何配置系统极点?如何设计解耦控制系统?如何设计带全维和降维状态观测器的状态反馈系统?如何实现二次型最优控制?凡此种种问题,仅凭计算过程和数据难以释清,必须要有结构图佐证。

本书的绝大多数算例配有系统结构图,旨在使读者一目了然地看清系统信号与计算数据之间的关系及物理特征,更直观地理解理论公式及其应用方法。

● MATLAB 程序多

MATLAB 是当今世界上最优秀的数值计算软件之一,内嵌的控制工程计算与仿真工具箱也是控制领域应用最为广泛的软件之一。

现代控制理论的应用计算都是矩阵运算,而 MATLAB 操作矩阵就像操作数一样简单,因此受到控制工程领域多数人的青睐。

为便于读者了解和掌握运用 MATLAB 求解控制问题的方法,凡是 MATLAB 提供了库函数的应用计算,本书对库函数的用法作了说明,凡是 MATLAB 没有提供库函数的应用计算,本书提供了编者开发的专用程序。书中共列有 19 套专用程序,所有程序均通过书内例题和其他书上例题验证。

本书在编写方面体现了编者近 40 年工程和教学实践形成的工程教育理念和认识:

(1) 以学以致用、实用够用为尺度剪裁内容,遴选精华。

(2) 对重点难点,浓墨重彩演绎论证,对简单内容,轻描淡写,以求重点突出、繁简适中。

(3) 注重方法论证,将问题转化、方法移植、归纳梳理等思考、分析和解决问题的方法贯穿于公式推导和分析过程,以求授人以渔。

(4) 按照一般认识规律进行论证,从因到果,循序渐近,层层深入,以求条理清晰,通俗易懂。

(5) 在论述方面,字斟句酌,追求透彻与精炼,即在分析透彻的前提下力求文字精炼,在文字精炼的基础上力求分析透彻。

书籍是精神食粮,教材是传道工具。是食粮就得精心制作,是工具就得精心打磨,这是编者一贯秉承的写作原则。为把本书雕琢成一部精品,编者精耕细作,付出了艰辛劳动,但囿于水平,书中错误和笔误在所难免,恳请读者不吝赐教。

最后指出,现代控制理论的数学特征往往让一些初学者望而生畏,有些学过的人也说难学。然而,“人之为学有难易乎?学之,则难者亦易矣;不学,则易者亦难矣。”事实上,此“数学”非彼数学,其应用和计算是程式化的,就像太极拳套路一样,既没有高超的技巧性,也没有隐藏的条件和陷阱,一点都不深奥。只要紧紧扣住“问题和条件——求解方法——结论和公式”这条技术路线认真学习并辅之以解题练习,掌握这门理论就如同探囊取物,手到擒来。

韩致信

2014年8月

目 录

第 1 章 控制系统的状态空间数学模型	1
1.1 基本概念	1
1.2 线性定常连续系统的状态空间数学模型	4
1.2.1 根据物理模型建立状态空间模型	4
1.2.2 根据微分方程建立状态空间模型	6
1.2.3 根据传递函数建立状态空间模型	10
1.2.4 根据系统的传递函数结构图建立状态空间模型	14
1.2.5 状态空间模型的线性变换	17
1.2.6 状态空间模型与传递函数矩阵之间的关系	20
1.3 线性时变连续系统的状态空间数学模型	20
1.4 非线性连续系统的状态空间数学模型	21
1.4.1 本质非线性系统的状态空间模型	21
1.4.2 本征非线性系统的状态空间模型	23
1.5 线性离散系统的状态空间数学模型	23
1.5.1 基本概念	23
1.5.2 线性定常离散系统的状态空间模型	24
1.6 线性定常系统状态空间模型的 MATLAB 实现	26
1.6.1 数学模型的 MATLAB 表示法	27
1.6.2 实现能控规范型的 MATLAB 编程及计算	29
习题 1	32
第 2 章 控制系统的运动分析	34
2.1 线性定常连续系统的运动分析	34
2.1.1 系统状态自由运动	34
2.1.2 状态转移矩阵	36
2.1.3 系统状态受控运动	41
2.1.4 系统的输出响应	42
2.1.5 实现线性定常连续系统运动分析的 MATLAB 编程	42
2.2 线性时变连续系统的运动分析	45
2.2.1 系统状态自由运动	45
2.2.2 状态转移矩阵	46
2.2.3 系统状态受控运动	48

2.2.4	系统输出响应	48
2.2.5	实现线性时变连续系统运动分析的 MATLAB 编程	49
2.3	线性定常离散系统的运动分析	52
2.3.1	线性定常连续系统的离散化及其 MATLAB 实现	52
2.3.2	线性定常离散系统的运动分析	55
2.3.3	实现线性定常离散系统运动分析的 MATLAB 编程	56
2.4	线性时变离散系统的运动分析	59
2.4.1	线性时变连续系统的离散化及其 MATLAB 实现	59
2.4.2	线性时变离散系统的状态运动分析	61
2.4.3	实现线性时变离散系统运动分析的 MATLAB 编程	62
习题 2	64
第 3 章	控制系统的稳定性分析	66
3.1	李雅普诺夫稳定性基本定理	66
3.1.1	数学基础	66
3.1.2	李雅普诺夫稳定性定义	68
3.1.3	李雅普诺夫稳定性定理	69
3.2	线性连续系统的稳定性分析	71
3.2.1	线性定常连续系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算	71
3.2.2	线性时变连续系统的稳定性分析	73
3.3	线性离散系统的稳定性分析	74
3.3.1	线性定常离散系统的稳定性分析及其 MATLAB 编程与计算	74
3.3.2	线性时变离散系统的稳定性分析	76
3.4	非线性连续系统的稳定性分析	77
3.4.1	克拉索夫斯基(Krasovski)法及其 MATLAB 编程与计算	77
3.4.2	变量梯度法	80
习题 3	82
第 4 章	控制系统的能控性与能观测性	83
4.1	系统的能控性	83
4.1.1	线性时变连续系统的状态能控性	83
4.1.2	线性定常连续系统的状态能控性及其 MATLAB 辅助分析	86
4.1.3	线性离散系统的状态能控性	89
4.1.4	系统的输出能控性	90
4.2	系统的能观测性	90
4.2.1	线性时变连续系统的能观测性	90
4.2.2	线性定常连续系统的状态能观测性及其 MATLAB 辅助分析	91
4.2.3	线性定常离散系统的状态能观测性	94
4.3	能控与能观测规范型的实现	95
4.3.1	能控规范型的实现及其 MATLAB 编程与计算	95

4.3.2 能观测规范型的实现及其 MATLAB 编程与计算	98
4.4 线性定常系统能控性与能观测性在复域 $[s]$ 中的判据	102
4.5 对偶系统及对偶性原理	104
4.5.1 线性定常对偶系统	104
4.5.2 线性时变对偶系统	105
4.6 线性定常系统能控与能观测结构分解	106
4.6.1 能控与不能控结构分解及其 MATLAB 辅助计算	107
4.6.2 能观测与不能观测结构分解及其 MATLAB 辅助计算	109
4.6.3 能控性与能观测性结构综合分解	112
习题 4	115
第 5 章 线性定常控制系统的综合	116
5.1 反馈控制系统的基本概念	116
5.1.1 状态反馈控制系统	117
5.1.2 输出反馈控制系统	118
5.2 以实现期望极点为目标的系统综合	120
5.2.1 单输入状态反馈控制系统极点配置及其 MATLAB 辅助计算	120
5.2.2 多输入状态反馈控制系统的极点配置方法	123
5.2.3 输出反馈控制系统极点配置及其 MATLAB 辅助计算	123
5.3 以实现系统镇定为目标的系统综合	125
5.4 以实现解耦控制为目标的系统综合	128
5.4.1 补偿器解耦	128
5.4.2 状态反馈解耦	129
5.4.3 实现状态反馈解耦控制计算的 MATLAB 编程与计算	131
5.5 状态重构控制系统	133
5.5.1 全维状态重构器及其 MATLAB 辅助设计	133
5.5.2 带全维状态重构器的状态反馈系统及其 MATLAB 辅助设计	137
5.5.3 降维状态重构器及其 MATLAB 辅助设计	139
习题 5	145
第 6 章 最优控制	147
6.1 泛函及其变分法简介	147
6.2 最优控制及其变分解法	149
6.2.1 数学模型	149
6.2.2 求解最优控制问题的变分法——拉格朗日乘子法	150
6.3 线性二次型最优控制	155
6.3.1 线性二次型最优控制的目标泛函	155
6.3.2 状态调节器及其 MATLAB 辅助设计	157
6.3.3 输出调节器	164
6.3.4 输出跟踪器及其 MATLAB 辅助设计	167

6.4 极小值原理	173
6.4.1 连续系统的极小值原理	173
6.4.2 Bang-Bang 开关控制	174
6.5 离散系统的最优控制	180
6.5.1 控制无约束的离散系统的最优控制	180
6.5.2 控制有约束的离散系统的最优控制	181
6.6 动态规划法	183
6.6.1 多级决策过程及最优性原理	183
6.6.2 离散系统的动态规划	185
6.6.3 连续系统的动态规划	188
习题 6	193
附录 A 习题参考答案	195
参考文献	224

第 1 章 控制系统的状态空间数学模型

内容提示:本章论证控制系统的状态空间数学模型,包括线性定常连续系统的状态空间模型及其线性变换、线性时变连续系统的状态空间模型、非线性系统状态空间模型、线性定常离散系统的状态空间模型、线性定常系统状态空间模型的 MATLAB 实现等。

任何一个控制系统都是由若干个元件构成的,每个元件都有其特定的物理功能。

组成控制系统的元件,不论是电气的,还是机械的,其物理功能总可以用相应的物理量和物理量间的数学关系式来描述,不同功能间的相互关系也总可以用相应的物理量间的数学关系式来描述。系统的数学模型就是用来描述系统物理功能的数学表达式,是物理模型或物理特性的数学描述。

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出线性定常系统,赖以解决问题的主要工具是各种图表,与之相适应,主要数学模型是传递函数。

现代控制理论研究控制系统既可以是单输入单输出的,也可以是多输入多输出的;既可以是定常的,也可以是时变的;既可以是线性的,也可以是非线性的;赖以解决问题的主要工具是电子计算机,与之相适应,主要数学模型是状态空间模型。

1.1 基本概念

1. 输入量和输入向量

输入量也叫控制量,通常是物理量,用来控制系统。

单输入系统只有一个输入量 $u(t)$, p 输入系统有 p 个输入量,即 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ 。由输入量作为分量形成的向量称为输入向量或控制向量,即

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_p(t)]^T$$

2. 输出量和输出向量

输出量也叫观测量,一般也是物理量,是系统的被控制量,必须按照规定的方式变化。

单输出系统只有一个输出量 $y(t)$, q 输出系统有 q 个输出量,即 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ 。由输出量作为分量形成的向量称为输出向量,即

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_q(t)]^T$$

3. 状态变量、状态向量和状态空间

(1) 状态变量

用来描述系统动态行为的信息集合称为系统状态,用来表示系统状态的一组数学变量称为状态变量,如 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 。 n 为有穷整数的系统称为集总参数系统, $n \rightarrow \infty$ 的系统称为分布参数系统。

为了充分且必要表达系统的运动行为,状态变量的个数应当是恰如其分的,不多也不少,少了不足以唯一确定系统的动态行为,多了也是冗余的。这一特性称为状态变量的最小性。如果系统的微分方程阶数是 n ,那么其状态变量数必定是 n 。

由于观察问题的角度和处理问题的着眼点不同,同一系统的状态变量可以有不同的选取方法,可以是物理量,也可以是纯数学量。这一特性称为状态变量的非唯一性。

状态变量互相之间是独立的,无隶属关系。这一特性称为状态变量的独立性。

(2) 状态向量

状态向量是以状态变量为分量的向量,即

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T$$

(3) 状态空间

以状态向量的分量为坐标轴张成的欧几里德空间 \mathbf{R}^n 称为状态空间。

状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 随初始状态向量 $\mathbf{x}(t_0)$ 和输入量的变化而变化,在任意时刻 t , $\mathbf{x}(t)$ 在状态空间 \mathbf{R}^n 中是一个点,当时间 t 变化时, $\mathbf{x}(t)$ 随之变化并形成一条轨迹,这条轨迹称为状态轨迹。

4. 状态方程

系统的状态变量随输入量的变化而变化。用来描述系统状态变量与输入量之间关系的一组一阶微分方程称为状态方程。

非线性时变系统状态方程的一般表达式为

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (1-1a)$$

将上式写成向量形式,得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1-1b)$$

非线性定常系统状态方程的一般表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

线性时变系统状态方程的一般表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1-3)$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}_{n \times n}, \text{称为系统矩阵;}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix}_{n \times p}, \text{称为输入(或控制)矩阵。}$$

对于 $p = 1$ 的单输入问题,输入矩阵退化为一列向量,用 $\mathbf{B}(t)$ 的同名小写字母 $\mathbf{b}(t)$ 表示。线性定常系统的系统矩阵和输入矩阵均为常数矩阵,故状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1-4)$$

5. 输出(或观测)方程

系统输入量和状态变量的变化决定着输出量的变化。用来描述系统输出量与状态变量及输入量之间关系的方程称为输出(或观测)方程。

非线性时变系统输出方程的一般表达式为

$$y_i = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (1-5a)$$

将上式写成向量形式,得

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1-5b)$$

非线性定常系统输出方程的一般表达式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

线性时变系统输出方程的一般表达式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (1-7)$$

式中

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}(t) & c_{q2}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}_{q \times n}, \text{称为输出(或观测)矩阵;}$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{qp}(t) & d_{qp}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}_{q \times p}, \text{称为前馈(或顺馈)矩阵。}$$

线性定常系统的输出矩阵和前馈矩阵均为常数矩阵,故输出方程为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1-8)$$

系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵和前馈矩阵都只与系统的结构及其参数有关,统称为系数矩阵。

系统的状态空间模型描述的是系统的输入、状态及输出三者之间的动态关系,故状态方程和输出方程统称为动态方程。

由于状态变量的非唯一性,同一系统可以具有不同的动态方程。但不论怎样选取状态变量,系统的传递函数矩阵必定是唯一的,对于一定的输入和初始条件,系统的输出也必定是唯一的。

为了保障微分方程解的存在性,状态变量的选取不能使状态方程含有输入量的导数项,因为有些输入量的导数不连续,会使状态方程无解。

线性系统的动态方程完全决定于其系数矩阵,为简化叙述,常常直接表示为 $\sum(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$ (线性时变系统)或 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ (线性定常系统)。

6. 系统的结构图

系统输入变化必将引起状态变化,状态的变化必将引起输出的变化。这种信号转化关系可用图 1.1 和图 1.2 描述,这种框图称为系统数学模型结构图,简称系统结构图。

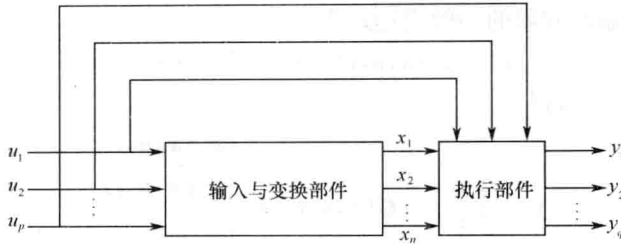


图 1.1 非线性系统输入—状态—输出关系图

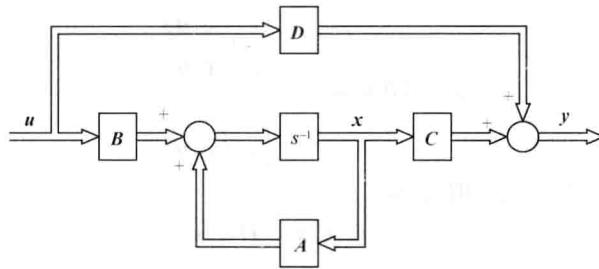


图 1.2 线性定常连续系统矩阵—向量结构图

1.2 线性定常连续系统的状态空间数学模型

1.2.1 根据物理模型建立状态空间模型

当已知系统的物理模型时,状态变量一般选物理量,特别是标志能量大小的物理量,如机械系统中弹性元件的变形(反映位能)和质量元件的速度(反映动能)、电气系统中的电容电压(反映电能)和电感电流(反映磁能)。

【例 1.1】 由质量为 $M(\text{kg})$ 的质块、刚度为 $k(\text{N}/\text{m})$ 的无重弹簧及阻尼系数为 $f(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$ 的阻尼器组成的质量—弹簧—阻尼系统如图 1.3 所示。试建立以激励力 p 为输入量、以质块位移 y 为输出量的状态空间模型。

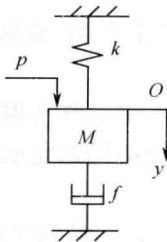


图 1.3 质量—弹簧—阻尼系统

解 质块在激励力 p 作用下即产生运动,为研究其运动规律,取其静平衡位置为运动坐标原点,运动位移坐标为 y , y 的正方向如图 1.3 所示。

应用达朗贝尔原理或牛顿运动定律,容易求得系统的微分方程,即

$$M\ddot{y} + f\dot{y} + ky = p \quad (\text{E1})$$

选取弹簧变形和质块速度为状态变量,即

$$x_1 = y \quad (\text{E2})$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (\text{E3})$$

对以上两式求导数,得

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{E4})$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} \quad (\text{E5})$$

由式(E1)得

$$\ddot{y} = -\frac{k}{M}y - \frac{f}{M}\dot{y} + \frac{1}{M}p \quad (\text{E6})$$

将上式和已定义的状态变量代入式(E5),得

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{f}{M}x_2 + \frac{1}{M}p \quad (\text{E7})$$

式(E4)和式(E7)即为系统的状态方程,其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}p \quad (\text{E8})$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ (状态向量), } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} \text{ (系统矩阵), } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \text{ (输入矩阵).}$$

由式(E2)直接可得系统的输出方程,即

$$y = x_1 = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (\text{E9})$$

式中, $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ (输出矩阵)。

【例 1.2】 一个由电阻、电容和电感元件组成的四端无源网络如图 1.4 所示,试建立以输入电压 u_i 为输入量、以输出电压 u_o 为输出量的状态空间模型。

解 假设流经电感的电流为 i_L , 流经电容的电流为 i_c , 电容上的电压为 v_c , 则由基尔霍夫定律可得

$$R_1(i_L + i_c) + L \frac{di_L}{dt} = u_i$$

$$R_1(i_L + i_c) + v_c + R_2 i_c = u_i$$

$$u_o = R_2 i_c$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

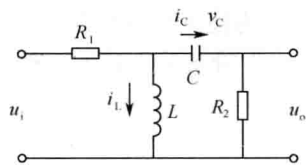


图 1.4 四端无源网络

选取电容电压 v_c 和电感电流 i_L 为状态变量,即 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [v_c \ i_L]^T$,按照与前例类似的推导方法,可得系统的状态方程和输出方程,即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_i$$

$$\mathbf{y} = u_o = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u_i$$

式中,各系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

系统的动态方程结构如图 1.5 所示。

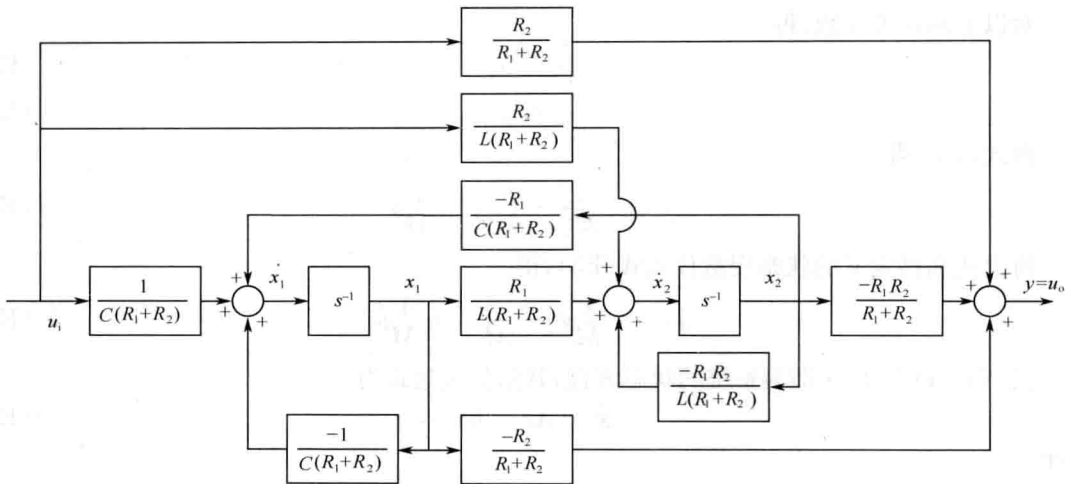


图 1.5 系统结构图

1.2.2 根据微分方程建立状态空间模型

当已知系统的微分方程时,可根据高阶微分方程与一阶微分方程组的关系将其化为一阶微分方程组。由于状态变量选取的非唯一性,同一微分方程可演化出许多不同的状态空间模型,其中最常用的是两种观测器规范型。

1. 能观测规范 I 型

为使问题简单化且又不失一般性,先研究由 4 阶微分方程建立状态空间模型的方法。

4 阶微分方程的一般表达式为

$$y^{(4)}(t) + a_3 y^{(3)}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_4 u^{(4)}(t) + b_3 u^{(3)}(t) + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (1-9)$$

式中, $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 和 $b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 均为常数。

4 阶微分方程须选 4 个状态变量,有一种选取方法是

$$x_1 = y - b_4 u \quad (1-10)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u \quad (1-11)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u \quad (1-12)$$

$$x_4 = \dot{x}_3 - \beta_2 u \quad (1-13)$$

式中, $\beta_i (i = 0, 1, 2)$ 为待定系数。

显然,这样选定了状态变量后,如果确定了系数 $\beta_i (i = 0, 1, 2)$,由式(1-11) ~ 式(1-13),直接可得 3 个状态方程,即

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_0 u \quad (1-14)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_1 u \quad (1-15)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 + \beta_2 u \quad (1-16)$$

下面分析如何确定系数 $\beta_i (i = 0, 1, 2)$ 和 \dot{x}_4 。

从式(1-10)开始依次向下进行迭代,可得

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_0 u = \dot{y} - b_4 \dot{u} - \beta_0 u \quad (1-17)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_1 u = \ddot{y} - b_1 \ddot{u} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \quad (1-18)$$

$$x_4 = \dot{x}_3 - \beta_2 u = y^{(3)} - b_4 u^{(3)} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \quad (1-19)$$

对上式求导数,可得

$$\dot{x}_4 = y^{(4)} - b_4 u^{(4)} - \beta_0 u^{(3)} - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} \quad (1-20)$$

由给定微分方程(1-9),可得

$$y^{(4)} - b_4 u^{(4)} = -a_0 y - a_1 \dot{y} - a_2 \ddot{y} - a_3 y^{(3)} + b_3 u^{(3)} + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (1-21)$$

联立式(1-21)、式(1-17) ~ 式(1-19)和式(1-20),经迭代消元可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + \\ & (b_3 - a_3 b_4 - \beta_0) u^{(3)} + (b_2 - a_2 b_4 - a_3 \beta_0 - \beta_1) \ddot{u} + \\ & (b_1 - a_1 b_4 - a_2 \beta_0 - a_3 \beta_1 - \beta_2) \dot{u} + (b_0 - a_0 b_4 - a_1 \beta_0 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_2) u \end{aligned} \quad (1-22)$$

为使状态方程不含输入量的导数项,令

$$\beta_0 = (b_3 - a_3 b_4) \quad (1-23)$$

$$\beta_1 = (b_2 - a_2 b_4) - a_3 \beta_0 \quad (1-24)$$

$$\beta_2 = (b_1 - a_1 b_4) - a_2 \beta_0 - a_3 \beta_1 \quad (1-25)$$

再引入系数

$$\beta_3 = (b_0 - a_0 b_4) - a_1 \beta_0 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_2 \quad (1-26)$$

可得

$$\dot{x}_4 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + \beta_3 u \quad (1-27)$$

式(1-14) ~ 式(1-16)和式(1-27)即为系统的状态方程,其向量表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{ol} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{ol} u \quad (1-28)$$

式中,系统矩阵和控制矩阵及状态向量分别为

$$\mathbf{A}_{ol} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{ol} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

由式(1-10)直接可得系统的输出方程,即

$$y = \mathbf{C}_{ol} \mathbf{x} + Du \quad (1-29)$$

式中,输出矩阵和顺馈矩阵(退化为常数)分别为

$$\mathbf{C}_{ol} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad D = b_4$$

系统矩阵和输出矩阵具有如上形式的状态空间模型称为能观测规范 I 型,简记为 $\sum(\mathbf{A}_{ol}, \mathbf{C}_{ol})$ 。

将以上方法推广到如下 n 阶微分方程

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

可得 n 阶系统的能观测规范 I 型 $\sum(\mathbf{A}_{ol}, \mathbf{C}_{ol})$, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{ol} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{ol} u \quad (1-30)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ol} \mathbf{x} + Du \quad (1-31)$$

式中