应用数学基础

主编 陈玉花

教育出版社

国家级精品资源共享课立项项目配套教材

YINGYONG SHUXUE JICHU

应用数学基础

主编 陈玉花
副主编 张耘 王新苹

高等教育出版社·北京

内容提要

本教材是在国家级精品资源共享课“应用数学与计算”的基础上，以教育部《高职高专教育数学课程教学基本要求》为依据，结合目前高职高专学生已有的数学基础编写而成的。

本教材针对工科类和经管类不同的专业和生源的实际，进行教学内容“模块化”、“分层次”教学设计。内容分为公共基础模块、专业基础模块、专业应用模块，以满足不同专业不同层次的学生多样化学习的需要。本教材的主要内容有函数、极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分及应用、常微分方程、矩阵、线性方程组、概率论、数理统计初步、无穷级数、图形制作（多媒体专业）、非线性交调的频率设计问题（电子类专业）、飞行管理问题（经管类专业）、Mathematica 系统使用入门。书后附有初等数学常用公式、习题答案等。

本教材建议参考学时为 96 学时，在实际教学中，可根据不同专业的需要进行取舍。本教材以国家精品开放课程共享系统（爱课程网：http://www.icourses.cn/陈玉花《应用数学与计算》）为平台，在使用时，可利用其丰富的配套资源。

本教材可作为高等职业技术学院、高等专科学校及成人高校的工科类、经济管理类或其他类各专业通用教材，也可作为数学建模培训、数学实验课程和经济、工程应用人员的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础／陈玉花主编．--北京：高等教育出版社，2014．9
ISBN 978-7-04-040482-1

Ⅰ．①应… Ⅱ．①陈… Ⅲ．①应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 179316 号

策划编辑 王玲玲　责任编辑 王　冰　封面设计 王　洋　版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英　责任校对 陈旭颖　责任印制 田　甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京嘉实印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21.25	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	520 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	34.60 元

物 料 号　40482-00

前　言

近年来，中国的高等教育正由大众化阶段快速走向普及化阶段，为了适应目前高职高专生源的变化，编者深感有必要编写一本适合当前高职高专学生实际情况和可持续发展需要的高等数学教材。

本教材是在国家级精品资源共享课“应用数学与计算”的基础上，以教育部《高职高专教育数学课程教学基本要求》为依据，结合目前高职高专学生已有的数学基础编写而成的。本书的编写基于以下几个方面的考虑：

1. 与已有的同类教材相比，本教材内容适当降低了难度，与专业结合，突出应用。内容精简扼要、逻辑清晰，深入浅出、通俗易懂，便于自主学习。

2. 在“以应用为目的”的基础上，体现“案例驱动、问题导向”教学设计。即数学概念以案例为背景导入，知识的展开以解决问题为导向，形成的数学知识来源于实际问题，反过来又应用于实际问题，符合高职高专学生的认识规律。

3. 针对工科类和经管类不同的专业和生源的实际，进行教学内容“模块化”、“分层次”教学设计。内容分为公共基础模块、专业基础模块、专业应用模块，以满足不同专业不同层次的学生多样化学习的需要。

4. 引入数学建模，注重学生创新能力和综合素质的培养，提高学生运用数学思想、方法和技巧，理解和解决实际问题的意识和能力。

5. 本教材虽然强调数学应用性，注重专业知识和技能知识的培养，但在编写时更注重高职高专学生的数学内涵式教育，数学逻辑思维能力培养，避免数学知识的“碎片化”。

6. 本教材以国家精品开放课程共享系统(爱课程网:http://www.icourses.cn/陈玉花《应用数学与计算》)为平台，在使用时，可利用其丰富的配套资源。

7. 本教材建议参考学时为96学时，在实际教学中，可根据不同专业的需要进行取舍。

本书由北京联合大学陈玉花担任主编，张耘、王新苹担任副主编。参加本书编写的还有下列老师：付春茹，陈艳燕，玲玲，徐坚，马振伟；河南科技学院数学科学学院陈永刚老师，北京电子科技职业学院夏新生老师。最后由陈玉花统稿。在教材整个编写过程中，“应用数学与计算”国家级精品课程负责人王信峰教授提出了许多中肯的建议并审阅全书；高等教育出版社曹京华、王玲玲编辑都给予了及时的支持和帮助；同时北京联合大学教务处和应用科技学院的领导也给予了很大关怀和支持，在此一并表示衷心感谢。

限于编者水平，且高职高专教育数学课程和教学内容的改革还需深入，本教材如有不当之处，恳请同行教师和读者不吝赐教，批评指正。

编　者

2014年5月

目　　录

公共基础模块

专业基础模块

专业应用模块

公共基础模块

第1章　函数、极限与连续

【第1章概述】

函数是微积分学的主要研究对象,极限是微积分学的理论基础,连续则是函数的一个重要性态.本章在总结中学已有函数的基础上,进一步阐述函数的概念及性质,理解初等函数和分段函数的概念,介绍极限的概念及运算,讨论函数的连续性及连续函数的性质,为后续知识的学习奠定坚实的基础.

【学习目标】

1. 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数、隐函数的概念;函数极限的定义;无穷小的性质;函数在一点连续的概念;初等函数的连续性.

2. 掌握复合函数的复合过程,能熟练地进行复合函数的分解;掌握极限四则运算法则.

3. 会求函数的定义域、表达式及函数值,会画出一些简单的分段函数的图像;会用两个重要极限求极限;会求连续函数和分段函数的极限.

4. 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念;无穷大、无穷小的概念;闭区间上连续函数的性质.

5. 能根据一些实际问题建立函数模型.

1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

在研究自然的、社会的以及工程技术领域中的某些现象时,人们经常会遇到各种不同的量,比如,时间、速度、质量、温度、成本和利润等,这些量一般可以分为两类,其中一类在所研究的过程中保持不变,这样的量我们称之为**常量**,而另一类在所研究的过程中是变化的,这样的量我们

称之为**变量**.

在同一过程中,往往会有几个变量同时变化,但是它们之间的变化不是孤立的,而是按照一定的规律相互联系、相互制约着,也即它们之间存在着相互依赖的关系,举例如下.

【案例1　商店优惠】 某会员制商店对会员购物提供优惠,会员可按商品价格的85%购买商品,但每年需交纳会员费300元. 问若某人在此商店购物,至少需购多少钱的商品(按商品价格计算)才能真正受惠?

【案例分析】 假设按商品价格计算此人一年内购买了 x 元的商品,获得商品优惠(即在商品上少付的钱) $0.15x$,但因交纳了300元会员费,因此实际获得的优惠 y 是 $0.15x-300$, 即 $y=0.15x-300$. 按此公式我们可以得出表1-1.

表1-1

商品钱数 x(元)	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
受惠钱数 y(元)	-300	-225	-150	-75	0	75	150	225	300

从表1-1中我们可以看出至少需购2 000元商品才能真正受惠.从而,这里的表表示了变量 x 与变量 y 间的对应关系.

【案例2　心电图(EKG)】 心电图可以显示病人的心率模式,它是由心电图仪直接根据病人的心率情况绘制的.如图1-1所示,它是某被测者的心电图,由图形可以看出,它的图像上每一点都代表着相应时间对应的电流活动值.从而,这里的图形又表示了变量与变量间的对应关系.

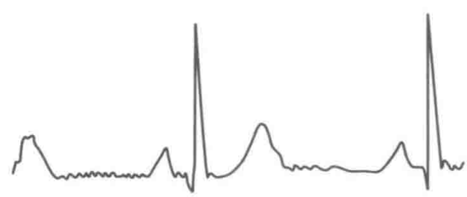

图1-1

【案例3　手机成本】 某手机品牌产量与成本之间的规律为

$$C=7\,000+100x.$$

式中 C 表示总成本, x 表示产量,其中固定成本为7 000(常量).

此公式给出了一个手机品牌在生产经营活动中,其总成本 C 与产量 x 之间的相互依赖关系,它描绘的是生产经营活动中的某种变化规律.

上述三个案例中这种变量与变量之间的相依关系,用数学的语言描述出来就得到函数的定义.

1. 函数的定义

定义1 设 x,y 是两个变量,若对非空数集 D 中每一个值 x, 按照一定的对应法则 f, 总有**唯一确定**的数值 y 与之对应,则称变量 y 是 x 的**函数**,记作:

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**,数集 D 称为**定义域**, f 是**函数符号**,它表示 y 与 x 的**对应法则**.函数符号也可由其他字母来表示,如 g,h,F,G 等.

当自变量取定 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 取遍 D 中的每一个值时,对应的函数值组成的集合称为**函数的值域**,通常用 Z 表示.(如图1-2)

【注】 函数关系的"机器"描述

若将函数视为一个机器,它将输入值 x 作为它的原料,将输出值 $f(x)$ 视为它的产品(如图 1-3).每一个输入值都有唯一一个相应的输出值,但是几个不同的输入值有可能生成相同的输出值.

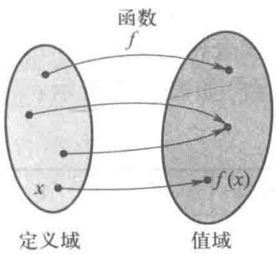

图 1-2

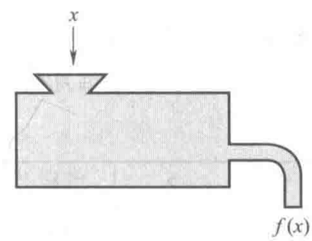

图 1-3

仔细研究下面几个例子,虽然看起来有点特殊,但它们在第 2 章中起着重要的作用.

例 1 设 $f(x)=x^2-2x$, 求下列各值并化简.

(1) $f(4)$; (2) $f(4+h)$;

(3) $f(4+h)-f(4)$; (4) $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$.

解 这是已知函数的表达式,求函数在指定点的函数值. $f(4)$ 是当自变量 x 取 4 时函数 $f(x)$ 的函数值,需将 $f(x)$ 表达式中的 x 换为数值 4,即:

(1) $f(4)=4^2-2\times 4=8$;

同理可得:

(2) $f(4+h)=(4+h)^2-2(4+h)=16+8h+h^2-8-2h=8+6h+h^2$;

(3) $f(4+h)-f(4)=8+6h+h^2-8=6h+h^2$;

(4) $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$; (2) $y=\sqrt{2-x}+\ln(x+2)$.

解 (1) 要使 $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$ 有意义,则有分母

$$x^2-3x-4\neq 0,$$

解得 $x\neq -1$ 且 $x\neq 4$, 所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty)$.

(2) 要使 $y=\sqrt{2-x}+\ln(x+2)$ 有意义,则有

$$\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x+2>0,\end{cases}$$

解得 $-2<x\leqslant 2$, 所以函数的定义域为 $(-2,2]$.

2. 函数的表示法

函数的表示法有三种:解析法、列表法、图像法.

(1) **解析法**:函数的对应法则用数学表达式表示.这在高等数学中是最常见的函数表示法,

它便于我们进行理论研究.

例如:函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 就是用解析法表示的函数,当 x 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内取任意值时,可由该式计算出相应的 y 值.

(2) **列表法**:将一系列自变量 x 的值与对应的函数值 y 列成表格的形式.

例如:某超市前三个季度每月某洗衣机的零售量 s(单位:台)如表 1-2 所示:

表 1-2

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
零售量 s	60	78	64	88	95	66	49	53	55

上表给出了该超市洗衣机零售量 s 随月份 t 变化而变化的函数关系,这个函数关系是用表格表示的,它的定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.当月份 t 在其定义域 D 内取任意值时,从表格中都可查到零售量 s 的一个对应值.

(3) **图像法**:函数的对应法则用建立在平面直角坐标系上的几何图形来表示.

例如:气象台每天用自动记录仪把一天中的气温变化情况自动描绘在记录纸上(如图 1-4 所示).这是用图形表示的函数,气温 y 与时间 x 的函数关系由曲线给出.

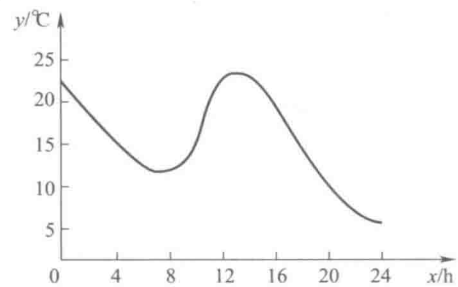

图 1-4

它的定义域为 $D=[0,24]$.当时间 x 在其定义域 D 内取任意值时,在曲线上都可以找到一个与之对应的气温值 y.

1.1.2　函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 内有定义,若对于任意的 $x\in I$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

从几何特征来看,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称,如图 1-5 所示.

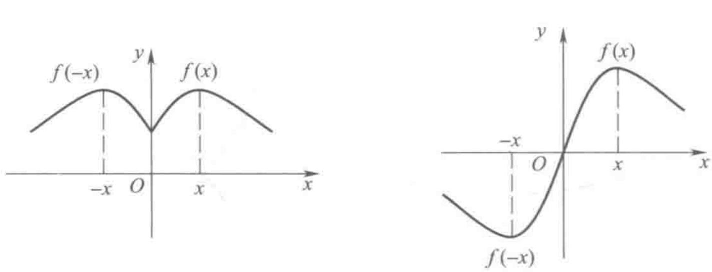

图 1-5

【注】 (1) 如果 $f(x)$ 是由一些 x 的偶次幂相加而成的,那么它必定是偶函数.例如函数

$f(x)=x^2-2$ 是偶函数；

（2）如果 $f(x)$ 是由一些 x 的奇次幂相加而成的，那么它必定是奇函数.例如函数 $g(x)=x^3-2x$ 为奇函数.

两种特殊类型的函数 在常用的函数中，有两类是非常特殊的：绝对值函数| |和最大整数函数[ ].它们的定义如下：

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

和

$$[x]=\text{小于或者等于 } x \text{ 的最大整数}.$$

因此 $|-3.1|=|3.1|=3.1$，同时 $[-3.1]=-4$，$[3.1]=3$.

我们在图 1-6 和图 1-7 中画出了这两个函数的图形.因为 $|-x|=|x|$，则绝对值函数是偶函数.你也可以从图像中清楚地看到最大整数函数既不是奇函数，也不是偶函数.

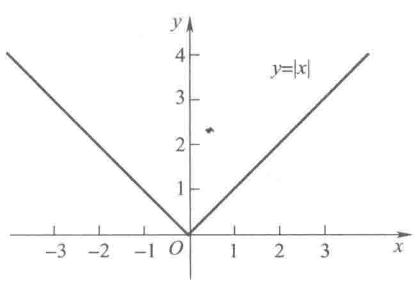

图 1-6

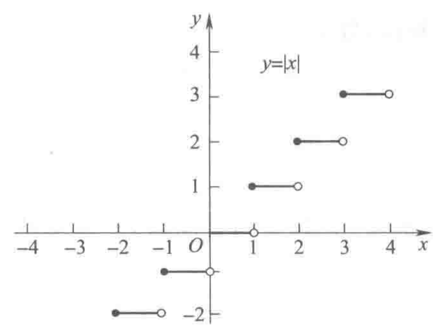

图 1-7

在今后的学习中，我们将会经常遇到具有这些特征的图像.绝对值函数 $|x|$ 在原点处有一个尖角（如图 1-6），而最大整数函数的图像，在每个整数的地方出现一次跳跃（如图 1-7）.

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内的任意两点 x_1,x_2，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加的**；对于区间 I 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少的**.

在几何上，单调增加（减少）函数的图像是沿 x 轴的正向渐升的（或渐降的），如图 1-8 所示.

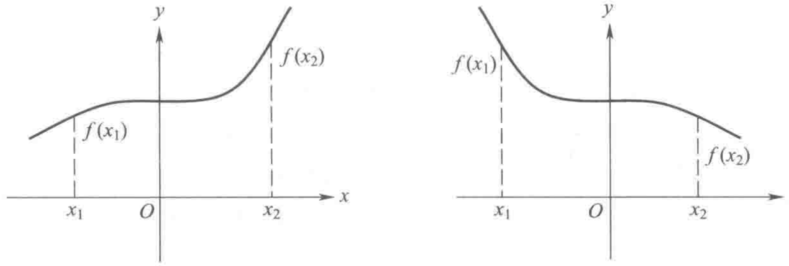

图 1-8

例如：函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，而函数 $y=x^2$ 在整个定义域区间 $(-\infty,+\infty)$ 上无单调性可言.

3. 函数的周期性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个不为零的实数 T，对于任意的 $x\in I$，有 $(x+T)\in I$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是**周期函数**，实数 T 称为**周期**.通常我们所说的周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

例如：$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi\cdots$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而 2π 是它的最小正周期，故 $y=\sin x$ 的周期是 2π.函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

4. 函数的有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，若存在一个正数 M，对于任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**；否则称为**无界**.

例如：函数 $y=\sin x$ 的图像介于两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有 $|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

1.1.3　分段函数

【案例 4　出租车付费问题】　北京市当前的出租车（白天、不叫车、单程、无等候）计价方式如下：

（1）起步价调整为 13 元/3 千米；

（2）超出（含）三千米至十五千米以内的千米数每千米按 2.3 元计费；

（3）超出（含）十五千米以外的千米数（每千米加收 50%空驶费）按 3.45 元计费；

（4）燃油附加费 1 元.

试给出行驶里程与所付车费之间的函数关系.

【案例分析】　设某人乘坐出租车行驶里程为 x 千米，应付车费为 y 元. 则：当 $0<x<3$ 时，$y=13+1=14$ 元；当 $3\leqslant x<15$ 时，$y=14+(x-3)\times 2.3$；当 $x\geqslant 15$ 时，$y=(x-15)\times 3.45+41.6$. 故所求函数表达式为

$$y=\begin{cases}14, & 0<x<3,\\ 2.3(x-3)+14, & 3\leqslant x<15,\\ 3.45(x-15)+41.6, & x\geqslant 15.\end{cases}$$

案例 4 中我们见到的函数关系，其函数定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，每一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出.

定义 6　函数的定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，每一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出，这种函数称为**分段函数**.

分段函数的特点是，函数的定义域被分成几个部分，每一部分函数有不同的表达式，如下面重要的分段函数.

例 3　函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**,它是分段函数,记为 sgn x, 它的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\{-1, 0, 1\}$, 图像如图 1-9 所示.对任何实数 x 都有下列关系式: $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$ 成立,所以它起着一个符号的作用.

分段函数的图像在每一个分段上与相应表达式函数的图像相同.

例 4　已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 、$f(0)$ 和 $f(3)$;

(2) 求函数的定义域;

(3) 画出函数的图形.

解　当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时,条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 成立,按表达式 $2\sqrt{x}$ 计算,从而 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1$; 当 $x=0$ 时,仍有条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 成立,仍按这一表达式 $2\sqrt{x}$ 计算,有 $f(0)=2\times\sqrt{0}=0$; 当 $x=3$ 时,条件 $x>1$ 成立,按表达式 $1+x$ 计算,从而

$$f(3)=1+3=4.$$

函数的定义域为函数自变量的所有可能取值,由函数表达式的取值条件可以看到,函数的定义域应为: $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x\mid x>1\}$, 即 $[0,+\infty)$.

函数 $f(x)$ 的图像由函数 $y=2\sqrt{x}$ 的 $[0,1]$ 段与直线 $y=1+x$ 的 $(1,+\infty)$ 段组成,分别将两个图像对接在同一图中,就得到了给定函数的图像,如图 1-10 所示.

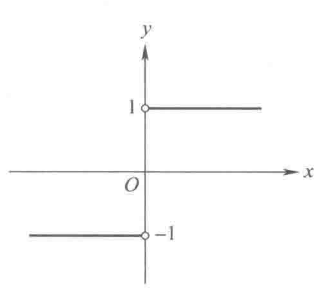

图 1-9

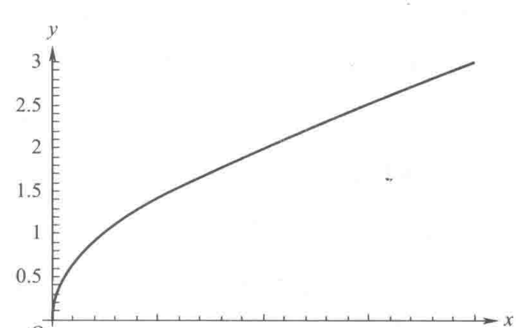

图 1-10

1.1.4　反函数

函数反映的是因变量随着自变量的变化而变化的规律,用另一种语言来说就是:有两个变量,一个是主动变量(自变量 x),另一个是被动变量(因变量 y),主动变量一旦取定了,被动变量也相继唯一确定.但是变量之间的制约是相互的,在我们研究的不同领域里,经常需要更换这

两个变量的主次关系，当这种主次关系对换后，仍然成为函数关系，这就是我们所要介绍的反函数.

定义7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z，若对每一个 $y\in Z$，都有唯一的一个 $x\in D$，使得

$$f(x)=y,$$

这就定义了 Z 上的一个函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为

$$x=f^{-1}(y),y\in Z,$$

这时 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由反函数的定义不难发现，$y=f(x)$ 存在反函数当且仅当 f 是 D 到 Z 的一一对应关系，并且反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

在数学上，我们总习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了满足习惯记法的需要，最后我们会把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$. $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 称为互为反函数，它们在同一直角坐标系下是关于直线 $y=x$ 对称的.

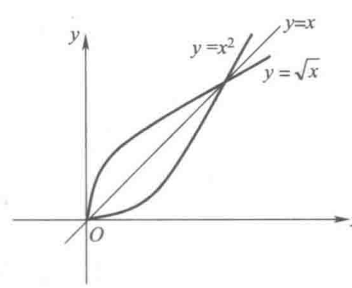

图 1-11

例如，函数 $y=f(x)=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 与

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$$

互为反函数，如图 1-11 所示，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

习　题　1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{1+x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{x+3}{x^2-3x-4}$；　　(3) $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$.

2. 下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=\cos x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$；　　(2) $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(3) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 计算并化简 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$：

(1) $f(x)=C$　(C 为常数)；　　(2) $f(x)=x^2$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x}$.

4. 设 $f(x)=x^2-x$，计算 $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5. 求下列函数值：

(1) 已知 $f(x)=x\cdot 4^{x-2}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(x^2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(2) 已知 $f(x)=x^2+3x+1$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.