普通高等教育"十二五"规划教材
面向21世纪应用型本科精品课教材

Higher Mathematics

高等数学

（下册）

马菊侠 程红英 主编

国防工業出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育"十二五"规划教材
面向21世纪应用型本科精品课教材

高等数学

(下册)

马菊侠　程红英　主编
吴云天　翟岁兵　吕纪荣　副主编

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 马菊侠, 程红英主编. —北京:
国防工业出版社,2015. 2
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 118 - 09905 - 8

Ⅰ. ①高... Ⅱ. ①马... ②程... Ⅲ. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 013616 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 **印张** 19½ **字数** 367 千字
2015 年 2 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 38.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

根据教育部副部长鲁昕的讲话精神，中国高等教育正在做结构性调整. 一部分地方本科院校将逐步转型，以职业技术教育为核心，重点培养工程师、高级技工、高素质劳动者等. 为了适应新形势下应用型本科院校特点，依据最新的《工科类本科数学基础课程教学的基本要求》，编写适应新形势下的应用型本科高等数学教材，应充分体现"重视数学基本理论，突出数学的应用性、实践性"的基本思想. 作者吸收了国内外优秀教材的优点，结合多年的一线教学经验，编写具备"新、特、优"的教材.

本教材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用，强调直观性，注重可读性，内容新颖，贴近生活实际；覆盖面广，深入浅出，突出数学思想、数学方法；渗透建模思想、淡化运算技巧，是文理兼用的教材. 教材充分贯彻教育部副部长鲁昕"学中做、做中学"的思想，把学生培养为极具竞争优势的应用型、创新型人才，体现了教材改革的新方向.

与目前市场的教材比较，本书有以下特点：

1. 主导思想

总体思想："拓宽基础、强化能力、淡化推理、立足应用".

总体原则："必需、够用为度".

适用范围：文理兼用的现代职业型本科、应用型本科教科书.

重要意义：为适应中国高等教育教学改革做好基础工作.

2. 知识内容

增加信息化应用实例，拓展生活、生产实际模型，自然引入概念、定理、结论. 内容简明扼要，淡化繁琐推理，强化思路方法，突出现代应用. 简化证明，加入趣味题目，使学生掌握方法，增强求知欲. 对于不同专业的学生，可以适当删减内容，对部分内容加上了 * 号.

3. 难点化解

突出重点，化解难点. 对于易出错处，增加了注意点以及知识的联系与比较. 采用方框、图示、标注、实例等化解难点，便于理解与记忆. 删去了繁琐的相关证

明，例如删去了第二个重要极限证明过程，改为举例说明，并以直观模式图 $\lim[1+\square]^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$ 加以备注，增强理解与记忆.

再如对中值定理的证明，采用图示直观形式. 曲线 $y=f(x)$ 与弦 AB 在 A、B 两点相交，所以

$$y_{\text{曲线}}\big|_{x=a}-y_{\text{弦}AB}\big|_{x=a}=0,\ y_{\text{曲线}}\big|_{x=b}-y_{\text{弦}AB}\big|_{x=b}=0$$

于是将 $y_{\text{曲线}}-y_{\text{弦}AB}$ 做一个新的函数，即为辅助函数 $F(x)=y_{\text{曲线}}-y_{\text{弦}AB}$.

再如，为了加强对积分公式的理解，可以把

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C=-\operatorname{arccot}x+C$$

书写成

$$\int\frac{\mathrm{d}\square}{1+\square^2}=\arctan\square+C=-\operatorname{arccot}\square+C$$

这样就将积分的难点化解，极大地提高了学生的兴趣与运算能力，减少了出错的概率.

4. 题型新颖

本书在例题与习题的选择上，力求新颖性与经典性相结合. 优选一些典型的本科考试题，及一些应用性、趣味性题目，加入部分2000—2014年考研的基础性题目，并将难题适度分解，丰富了题型的灵活性与多样性. 如选择、填空、判断、计算、分析证明以及综合应用等，把理论与训练有机结合，以达到最优效果.

5. 建模渗透

选择了经济、生物、几何、公安、建筑、营销、物理及信息科学前沿等领域的内容，以及具有生活气息的例题，如公安部门如何检查“醉驾”的模型，通过中国历史上著名的“曹冲称象”典故，引出的“投石问路”模型，还有银行存款的“利滚利”与相关投资问题，建筑上“防止塌方”的打桩问题等. 将建模的数学思想渗透到各个章节，让数学应用落在实处.

6. 衔接过渡

为了夯实基础，增加知识与内容的衔接与过渡. 在第一章增加了基本初等函数的图形，以图形观察其性质. 在定积分应用中增加了质心，与下册的多元积分应用接轨，也与考研接轨. 在定积分应用中，渗透X型（以 x 为积分变量）及Y型（以 y 为积分变量），使得定积分求面积中积分变量的选择与二重积分计算次序衔接在一起. 在解析几何中增加了曲面、实体投影，为多元积分奠定基础. 增加附录“高等

数学中常用的初等数学公式与图形”,起到温故知新、承上启下的作用.

7. 结论汇总

将高等数学的重点知识、常用结论汇总成“高等数学主要公式与结论”;将高等数学中常见的空间曲线、曲面、立体图形汇总成“常见曲面与立体图形”. 方便读者学习、复习、比较、记忆与查阅.

8. 知识网络

本书在每一章附有知识网络图,对本章的重点知识汇总成表格,使知识网络化、系统化、条理化,帮助读者理解与强化.

本书由陕西科技大学马菊侠、吴云天,陕西服装工程学院程红英、翟岁兵,陕西科技大学镐京学院吕纪荣编写. 其中第一章、第四章、第八章、第九章、第十章由马菊侠编写;第五章、第七章、第十一章、第十二章、下册附录部分由吴云天编写;第二章、第三章由程红英编写;第六章由吕纪荣编写,上册附录部分由翟岁兵编写. 最后由马菊侠统稿.

本书在编写中,参阅了相关书籍与网站,在此对相关作者、网站表示感谢!

由于编者水平有限,书中不足之处在所难免,恳请专家与同行批评指正.

编者

2014 年 10 月

目　　录

第八章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，建立了平面上的点与一对有序数的一一对应关系，把平面上的图形和方程对应起来，从而通过代数的方法来研究几何图形. 空间解析几何也同平面解析几何一样，是学习多元函数微积分学的基础. 本章通过建立空间直角坐标系，把空间的几何图形与图形上的点所满足的代数方程对应起来，利用代数工具来研究空间几何问题.

本章介绍向量的相关概念及其线性运算，然后建立空间坐标系，利用坐标来研究向量的运算，建立平面和空间直线的方程，最后介绍一些常用的空间曲面和空间曲线的有关内容.

第一节　向量及其线性运算

一、向量概念

在人们的日常生活与实践中经常遇到这样一种量，比如质量、时间、体积等，它们只有大小没有方向，这样的量称作**标量**. 同样也会遇到另外一种量，例如位移、速度、加速度、力等，它们既有大小又有方向，这样的量称作**向量**.

在数学上，通常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 起点为A，终点为B的有向线段AB表示一个向量(图 8 － 1)，把这个向量记作$\overrightarrow{AB}$. 为了简便，有时也用一个黑体字母(书写时，在字母上面加箭头)来表示向量，比如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或($\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{s}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$) 等.

图 8 － 1

下面介绍相关的几个概念.

(1) 自由向量. 向量的共性是所有的向量都有大小和方向，数学上讨论的向量并不涉及它的起点，即与它的起点位置无关，这类向量也称为自由向量(以后简称向量).

(2) 向量的相等. 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，只要大小相等，方向相同，就说向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是相等的，记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 如果一个向量在保持大小和方向不变的条件下经过平行移动

后可以与另外一个向量重合,那么这两个自由向量是相等的,如图8-2所示,在平行四边形$ABCD$中,向量$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

(3)向量的模.向量的大小叫做向量的模.如向量$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.

(4)零向量.模为零的向量称为零向量,记作$\mathbf{0}$或$\vec{0}$.零向量没有确定的方向,它的方向是任意的.

(5)单位向量.模等于1的向量叫做单位向量.

(6)向量之间的夹角.设两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,把它们的起点放在同一点O,它们的终点分别是A和B,即$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,则不超过$\pi$的夹角$\angle AOB$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角(图8-3),记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

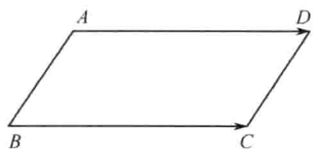

图8-2

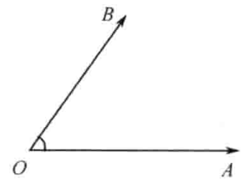

图8-3

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$,则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**垂直**,记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$或者$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$,则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**平行**,记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同方向;若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反方向.

规定零向量与任意非零向量的夹角是任意的.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上.因此,两向量平行又称两向量共线.

类似还有共面的概念.设有$k(k\geqslant 3)$个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果k个终点和公共起点在一个平面上,就称这k个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法和减法

由力学知识知道,力是向量,两个力的合力按照平行四边形法则确定.向量的加法运算与力的合成类似.

设两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,任意取一点A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以$AB$、$AD$为邻边作平行四边形$ABCD$,则向量$\overrightarrow{AC}$是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图8-4).

在图8-4中,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,于是得到求两个向量和的三角形法则:设两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以向量$\boldsymbol{a}$的终点$B$为起点作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{AC}$即是向

量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 8 - 5). 三角形法则对于两个共线的向量也是适用的.

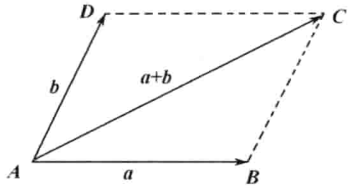

图 8 - 4

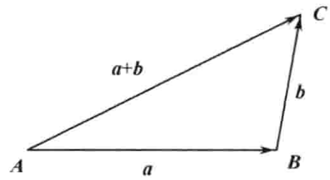

图 8 - 5

由向量加法的三角形法则,对多个向量进行求和,比如 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,只要先作出第一个向量 $\boldsymbol{a}$,然后按照先后顺序,将前一个向量的终点作为后继向量的起点,依次作出其余的向量,直到作出最后一个向量,那么以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点作为起点,以向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点作为终点的有向线段就是 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,于是向量的加法可以看成是"首尾相接"(图 8 - 6).

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$. 规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

则由向量的加法,可以得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8 - 7).

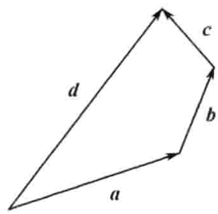

图 8 - 6

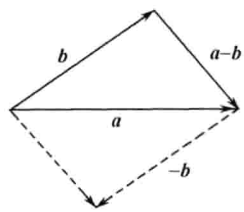

图 8 - 7

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

从图 8 - 7 上可以看出,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的起点是 $\boldsymbol{b}$ 的终点,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的终点是 $\boldsymbol{a}$ 的终点,即若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点,那么由向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点的有向线段就表示为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由以上可以看出,以 AB、AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线就是向量的和与差. 即向量 $\overrightarrow{AC}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;则向量 $\overrightarrow{DB}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8 - 8).

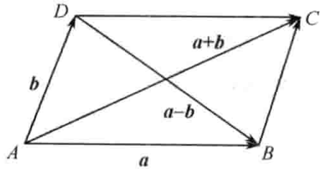

图 8 - 8

由图 8 - 8 以及由三角形两边之和大于第三边的原理,可得到下面的结论:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中,等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

向量的加法满足下列运算律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由图8-4容易验证交换律是成立的. 下面验证结合律. 如图8-9所示,可知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

因此结合律也成立.

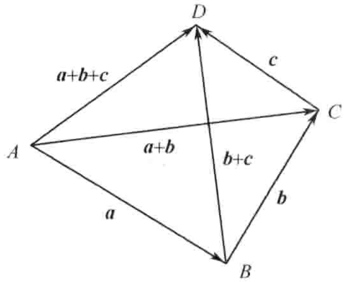

图8-9

2. 向量与数的乘法

设 λ 是一个实数,$\boldsymbol{a}$ 是一个向量,规定 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**乘积** $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

它的方向为:当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,方向是任意的.

这样规定的运算也简称为向量的数乘运算.

特别地,当 $\lambda=\pm 1$ 时,有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

向量的单位化:与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,通常记作 $\boldsymbol{a}^0$. 则有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

向量与数的乘积运算满足下面的运算律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减法运算和向量的数乘运算统称为向量的线性运算.

注意到向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,有下面给出两个向量平行的充要条件.

定理　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　根据向量的数乘运算,充分性是显然的,下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,取实数 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,那么

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$