

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 70



强健的一维守恒型 间断跟踪法

- 作者：刘妍
- 专业：计算数学
- 导师：茅德康



G643/166

001280789

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 70



强健的一维守恒型 间断跟踪法



贵阳学院图书馆



GXXX1280789

287082100

图书在版编目(CIP)数据

2005 年上海大学博士学位论文. 第 2 辑/博士论文编辑部编. —上海: 上海大学出版社, 2009. 6

ISBN 978-7-81118-367-2

I. 2… II. 博… III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2005 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 180878 号



2005 年上海大学博士学位论文

——第 2 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人: 姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 274.25 字数 7641 千

2009 年 6 月第 1 版 2009 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1~400

ISBN 978-7-81118-367-2/G·490 定价: 980.00 元(49 册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2005)

A Robust Front Tracking Method Based on Conservation in One Space Dimension

Candidate: Liu Yan

Major: Computational Mathematics

Supervisor: Mao Dekang

Shanghai University Press

• Shanghai •

答辩委员会评语 上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单:

主任:	陈恕行	教授,复旦大学	200433
委员:	贺力平	教授,上海交通大学	200030
	马和平	教授,上海大学	200436
	盛万成	教授,上海大学	200436
	许梦杰	教授,上海大学	200436
导师:	茅德康	教授,上海大学	200436

评阅人名单:

舒其望 教授,美国布朗大学
沈隆均 研究员,北京应用物理与计算数学研究所
100088

江 松 研究员,北京应用物理与计算数学研究所
100088

评议人名单:

王靖华 教授,中科院系统科学研究院 100080

滕振霖 教授,北京大学 100871

赵 宁 教授,南京航空航天大学 210016

贺国强 教授,上海大学 200436

答辩委员会对论文的评语

非线性双曲型守恒律方程组的数值模拟方法的研究历来是应用数学领域中的一个热点。间断跟踪法是一种很有效的计算流体力学 Euler 方程组的方法,但在方程组情况下实现高精度的计算是个很困难的问题。

刘妍同学的博士论文“强健的一维守恒型间断跟踪法”在文[29]的基础上对该文中提出的守恒型间断跟踪法作了进一步的发展和提高,其主要工作有以下几方面:

1. 在方程组情况时将该守恒型间断跟踪法发展为高精度,并对之作了严格的截断误差分析。

2. 设计了一些算法,使得该守恒型间断跟踪法能处理任意多个间断的运动和相互作用,算法因此强健化了。

3. 用 Fortran90 语言对 Euler 方程组编制了一个一般目标的程序,并用之作了大量的数值试验以说明算法的有效性和强健性。

刘妍的研究工作有很强的实际意义和应用背景,其结果很有创新性,并具有很好的发展前景。从论文中看刘妍对所涉及的知识领域有很全面的了解,并有很强的计算能力。

答辩委员会表决结果

刘妍同学的论文是一篇优秀的博士论文，答辩委员会一致通过，建议授予刘妍同学博士学位。

答辩委员会主席：**陈超行**

2004年6月18日

摘 要

本文进一步分析、推广和提高文[29]中提出的守恒型间断跟踪法。该跟踪法是以解的守恒性作为跟踪的机制,而不是象传统间断跟踪法那样利用 Rankine-Hugoniot 条件。在[29]中,当将该方法运用到方程组的情况时只有一阶精度。这是因为在方程组的情况,在被跟踪的间断处会有其他特征域的波,并且它们可能会穿过被跟踪的间断,这会影响算法的高精度实现。文[29]中所设计的技巧只能保证一阶精度。在本文中,我们设计了该算法在一维方程组情况的一种高精度实现,即通过适当地修正间断两侧的数值解来将间断一侧的其他特征域的波传到被跟踪间断的另一侧,以此来实现被跟踪间断线上的移动边界条件。我们通过在间断处解 Riemann 问题得到那些需要穿过被跟踪间断的其他特征域的波,并且采用了高阶的重构、高阶 Lagrange 插值和高阶的数值积分以及有限制的波分解等,来修正间断两侧的数值解。我们还对算法作了严格的局部截断误差分析,证明了该算法是高阶精度的。

我们还讨论了间断相互作用通过求解 Riemann 问题来实现和 Riemann 问题分解出来的需要被跟踪的间断所对应的网格上的数值解如何来确定的问题。我们还设计了一些规则来处理多个间断的情况,把间断的移动和相互作用的无穷多种情况进行了有限化处理,使得我们的算法可以做成一个强健的算法,它可以处理任意多个间断的移动和相互作用。

最后,我们将此算法应用到一维的 Euler 方程组上,其中处理了激波在固壁上的反射、自发生激波、推广到多介质流体等,并对算法用 Fortran90 语言按面向对象的编程方式进行了程序实现。从而完成了一个几乎可以处理任何情况的和捕捉法几乎一样强健的一维跟踪法。

关键词 守恒律,间断跟踪法,高阶精度,间断网格

Abstract

In this paper, we further analyze, improve and develop the conservative front-tracking method developed in [29]. In the method in [29], discontinuities are tracked by enforcing the conservation properties of the PDEs rather than by using the Rankine-Hugoniot condition. The method in [29] is only first order accurate when applied to systems of conservation laws. This is because in the system case near tracked discontinuities there are waves in other characteristic fields and they may propagate across the discontinuities. The method in [29] treats this propagate-across of waves in a first-order fashion. In this paper, we develop a high order treatment of this wave propagate-across on tracked discontinuities and thus enhance the accuracy of the method. We modify the solution on the two sides of the tracked discontinuities by using high order reconstruction procedure and solving Riemann problems at the tracked discontinuity positions to find out the propagating-across waves and then distribute them to the solution on the two sides. In the process, we also use high order Lagrange interpolations, numerical integrals of higher orders and limited wave decompositions. We present a rigorous analysis of truncation errors to show that the method equipped with the treatment

of wave propagate-across is high order accurate in some sense.

We also describe the treatment of collisions of discontinuities, in which Riemann problems are solved to find out the discontinuities that are needed to be further tracked. Then the corresponding discontinuity cells are determined. Certain rules are set in dealing with moving and collisions of arbitrary many discontinuities, and they finitelize the possible cases we will have in the algorithm. This makes it possible for us to build a “general-purposed and robust” front-tracking method.

Finally, we apply our front-tracking method to the Euler system of gas dynamics, in which shock reflection on solid walls is treated, spontaneous shock are captured and then tracked, and multifluid are concerned. Fortran90 language are used to code the algorithm in an Object-Oriented fashion. Thus, we have built an almost “general-purposed and robust” front-tracking method.

Key words conservation laws, front tracking, high order accuracy, discontinuity cell

目 录

第一章 引言	1
1.1 间断捕捉法	2
1.2 间断跟踪法	2
1.3 守恒型间断跟踪法	3
1.4 间断跟踪法的精度问题	4
1.5 本文的工作和结构	6
第二章 基本的概念和理论	8
2.1 守恒型方程组	8
2.2 有限体积法	20
第三章 算法的描述及其精度分析	27
3.1 单个间断时的算法	27
3.2 计算的第三步及其截断误差	37
3.3 两个间断的情况	42
3.4 多个间断及其相互作用的处理	52
第四章 守恒型间断跟踪法用于 Euler 方程组	56
4.1 修正的 r 阶 Lagrange 插值	56
4.2 间断位置的计算	56
4.3 自发生激波	57
4.4 推广到多介质流	58
4.5 激波对固壁的反射	58
4.6 程序编制	60

第五章 数值算例	65
第六章 结论	90
参考文献	92
近期主要工作	97
致谢	98

第一章 引言

随着计算机科学技术的飞速发展,计算流体动力学自 20 世纪 60 年代中期已形成一门独立的学科分支,成为研究流体运动规律和解决很多工程实际问题的三大手段(理论、实验和计算)之一。计算流体动力学(Computational Fluid Dynamics,简称 CFD)是利用计算机和数值方法求解满足定解条件的流体动力学方程(组)以获得流动规律和解决流动问题的专门学科。而守恒型方程(组)及其数值解法作为计算流体动力学的一个重要的组成部分也得到了快速的发展。它所关心的是对具有如下形式的守恒型方程(组)

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.1)$$

进行数值模拟。该守恒型方程(组)是由物理定律的积分形式得到的。其在工程技术领域有着很广泛的应用,很多重要的物理和力学现象都可归结为守恒型方程组。其中最著名的守恒型方程组是 Euler 方程组(2.26),它是由物理中的(质量,动量,能量)三大守恒定律得到的,是空气动力学的基本方程组,其在航空、航天及大气科学等领域中都有着很广泛的应用。

守恒型方程(组)(1.1)是拟线性双曲型方程(组)。对于它,无论所给的初值及边值条件如何光滑,它的解都会产生间断,而且间断既可以产生(自发生激波)又可以消失。另外解还有连续部分,它可以是简单波,如压缩波、稀疏波等。间断在物理和力学中就对应着激波和切向间断。激波在流体动力学中有着双重的重要性,它既是人们关心的一种物理现象,又是求解流体动力学方程(组)时需加以关注的数学特性。以上的这些特性给求解流体动力学方程组带来了数学上的和数值模拟上的困难。通常人们所使用的数值方法是在假设解

是光滑的前提下设计的。当解产生间断时,如果仍然用求光滑解有效的数值方法来求间断解,则往往会在间断附近出现非物理的振荡或间断磨损。数值解在间断附近出现非物理的振荡是因为算法非线性不稳定,而在间断处有磨损是因为在间断附近算法含有过多的粘性影响了精度。因此设计既稳定又是高阶精度的算法是守恒型方程(组)数值方法所需要面临的问题。

求解方程组(1.1)的数值方法可分为两大类:间断捕捉法和间断跟踪法。

1.1 间断捕捉法

间断捕捉法的特点是:在计算的过程中不考虑间断的存在而在整个流体的任何地方都用几乎同样的数值格式,借助方法所固有的数值耗散性效应(或者数值粘性效应),自动地捕获到所要计算的间断,它期望间断在数值解中表现为很窄的过渡层。该类方法的思想比较简单,便于编写程序。古典的人工粘性法以及各种具有数值耗散性的有限差分方法都属于此类。近十几年来,人们研究设计了一系列求解方程组(1.1)的高分辨率间断捕捉法,如 TVD 格式、TVB 格式、ENO 格式、PPM 格式和带子网格技巧的 ENO 格式及 WENO 格式等,见[6, 15—18, 40]。用这些差分格式计算得到的数值结果的精度比较高,基本上消除了在间断附近的非物理的振荡现象,同时对间断的磨损程度也比较低。但是间断捕捉法不能分辨出间断在网格内的确切位置和解的结构,并且在间断附近数值解的精度是 $O(1)$ 阶的。

1.2 间断跟踪法

与捕捉法不同的是,间断跟踪法(front tracking)是把间断作为移动的内边界来处理。这样整个求解区域就被间断线分为若干区域,

在每个区域中,解被假设为是光滑的,用计算光滑解有效的数值方法来求解这些区域中的数值解,而间断的移动要满足 Rankine-Hugoniot 条件。这可通过求解 Riemann 问题计算间断的移动速度,从而就可以确定间断在每一时间层上的间断位置。但这样处理之后,方程组(1.1)的守恒性一般不能保证。

较早的跟踪法思想可见 Richmyer 和 Morton 的文[37]。在过去的三十多年中,人们研究设计了很多这种类型的间断跟踪法,见[4, 7—12]我们称这类方法为**传统的间断跟踪法**。而关于跟踪法如何在一维空间的实现可见[14, 24, 25, 34]和[42]等。传统的间断跟踪法可对解的光滑部分和间断位置同时获得高精度。但是算法很复杂,并且用该类方法求解方程组(1.1)时会遇到下列问题:

(1) 由于将间断作为移动的内边界来处理,必然会用到非正规网格。因此当网格变得很小时就不可避免地会遇到由于 CFL 条件难以满足而发生的“小网格”问题;

(2) 传统的间断跟踪法假设解是分片光滑的,数值解的高精度和高分辨率依赖于每一时间层上的间断位置的精确计算。而当方程组(1.1)的解比较复杂,用分片光滑函数不能准确描述时,用该类算法就难以处理,例如当解在一个很小的区域内就有好几个自发生激波时,就属于这种情况;

(3) 在处理间断的相互作用时,该类方法主要借助于求解 Riemann 问题,但在将该类方法推广到高维空间时,如何求解高维 Riemann 问题也是一个难以解决的问题。

1.3 守恒型间断跟踪法

近几年来,茅德康(见[28—31]等)研究设计了一种基于解的守恒性质的间断跟踪法,它是利用守恒性来确定间断位置而不是像传统的间断跟踪法那样利用 Rankine-Hugoniot 间断条件。其基本思想来源于对间断捕捉法的如下观察: