普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学教程

主编 张雄

Gaodeng Shuxue Jiaocheng

陕西师范大学出版总社有限公司

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学教程

主编　张　雄

编者　（按姓氏音序排序）

白改艳　杜　娟　丁剑浩　窦晓峰

刘　波　李晓鑫　权利娜　熊文井

杨小鹏　张存侠　张艺林

陕西师范大学出版总社有限公司

图书代号 JC13N0832

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程 / 张雄主编. —西安：陕西师范大学出版总社有限公司，2013.8

ISBN 978-7-5613-7186-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 166406 号

高等数学教程

主　　编 / 张　雄
责任编辑 / 叶向东　裴黎黎
责任校对 / 裴黎黎
封面设计 / 鼎新设计
出版发行 / 陕西师范大学出版总社有限公司
(西安市长安南路 199 号　邮编 710062)
网　　址 / http://www.snupg.com
经　　销 / 新华书店
印　　刷 / 陕西奇彩印务有限责任公司
开　　本 / 787mm×1092mm　1/16
印　　张 / 19.5
字　　数 / 450 千
版　　次 / 2013 年 8 月第 1 版
印　　次 / 2013 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-5613-7186-2
定　　价 / 39.00 元

读者购书、书店添货如发现印刷装订问题，请与本社高教出版分社联系调换。
电话：(029)85303622(兼传真) 85307826。

前言

Preface

本教材是根据普通高等学校本科《高等数学》课程教学大纲而编写，适合于本、专科专业教学使用。专科生使用时教师可根据教学计划作适当删减，这样的好处是既能保证其教学质量，又能使学有余力的学生系统学习其他高等数学知识，让专科和本科的范围有一个比较和衔接。本科生教学使用时，根据不同专业的教学需要，教师也可适当调整。我们编写本书的基本理念是“厚基础、宽口径、重技能”。

本书由长期担任该课程教学及其研究的教师集体编写而成，是集体智慧的结晶。主编张雄教授制定编写计划和章节结构并负责统稿，具体编写分工是：白改艳（第 1 章）、窦晓峰（第 2 章）、张艺林（第 3 章）、刘波（第 4 章）、熊文井（第 5 章）、杜娟（第 6 章）、杨小鹏（第 7 章、第 10 章）、张存侠（第 8 章）、李晓鑫（第 9 章）、权利娜（第 11 章）、丁剑洁（第 12 章）。编写过程中，参考了大量的文献资料，在此，对其作者和同行一并表示谢意。限于水平，本书一定还有不少的缺点和不足，恳请读者和同行在使用过程中提出批评指正，以便进一步修改完善。

编者

2013 年 6 月

目录

CONTENTS

第1章　函数、极限与连续

第一节　集合与函数…………………………………（1）

第二节　极限的概念…………………………………（7）

第三节　无穷小量与无穷大量……………………………（10）

第四节　函数极限的性质与运算法则…………………（13）

第五节　极限存在准则与两个重要极限………………（15）

第六节　函数的连续与间断……………………………（16）

第七节　闭区间上连续函数的性质……………………（18）

习题1 ………………………………………………（20）

第2章　导数与微分

第一节　导数的概念 …………………………………（22）

第二节　函数的求导法则………………………………（27）

第三节　导数基本公式与高阶导数……………………（31）

第四节　隐函数及由参数方程所确定函数的导数…………………………………………………（34）

第五节　函数的微分…………………………………（38）

习题2 ………………………………………………（42）

第3章　微分中值定理及导数的应用

第一节　微分中值定理…………………………………（45）

第二节　罗必达法则…………………………………（48）

第三节　函数的单调性判别法…………………………（51）

第四节　函数的极值与最值……………………………（52）

第五节　曲线的凸凹与拐点……………………………（54）

第六节　函数图形的描绘………………………………（55）

第七节　导数在经济分析中的应用……………………（58）

习题3 ………………………………………………（59）

第4章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质……………… (61)

第二节 不定积分的计算……………………… (65)

第三节 分部积分法…………………………… (70)

第四节 几种特殊类型函数的积分…………… (72)

习题4 ……………………………………… (76)

第5章 定积分及其应用

第一节 定积分的概念与性质………………… (78)

第二节 微积分的基本定理…………………… (86)

第三节 定积分的换元积分法与分部积分法

……………………………………………… (88)

第四节 定积分的几何应用…………………… (91)

习题5 ……………………………………… (95)

第6章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量及其运算………………………… (98)

第二节 空间坐标系中的向量………………… (103)

第三节 平面及其方程………………………… (110)

第四节 空间直线及其方程…………………… (113)

第五节 曲面及其方程………………………… (116)

第六节 空间曲线及其方程…………………… (122)

习题6 ……………………………………… (125)

第7章 多元函数微积分及其应用

第一节 多元函数的基本概念 ……………… (128)

第二节 偏导数与全微分……………………… (135)

第三节 多元复合函数的求导法则…………… (142)

第四节 隐函数求导公式……………………… (147)

第五节 多元函数微分法的几何应用………… (150)

第六节 多元函数的极值与最值……………… (153)

习题7 ……………………………………… (160)

第8章 多元函数积分

第一节 二重积分的概念与性质……………… (162)

CONTENTS

第二节　二重积分的计算…………………… (164)
第三节　二重积分的应用…………………… (175)
第四节　第一类曲线积分…………………… (180)
第五节　对面积的曲面积分………………… (184)
习题 8 ……………………………………… (187)
第 9 章　常微分方程
第一节　微分方程的基本概念……………… (191)
第二节　一阶微分方程……………………… (192)
第三节　可降阶的高阶微分方程…………… (197)
第四节　线性微分方程解的一般理论……… (200)
第五节　二阶常系数线性微分方程………… (201)
习题 9 ……………………………………… (207)
第 10 章　无穷级数
第一节　数项级数的概念和性质…………… (209)
第二节　数项级数的收敛判别……………… (213)
第三节　幂级数……………………………… (219)
第四节　泰勒级数…………………………… (224)
习题 10 …………………………………… (231)
第 11 章　线性代数
第一节　行列式……………………………… (233)
第二节　克莱姆(Cramer)因法则 ………… (244)
第三节　矩阵………………………………… (248)
第四节　线性方程组………………………… (259)
习题 11 …………………………………… (270)
第 12 章　概率论与数理统计
第一节　随机事件及其概率………………… (272)
第二节　随机变量…………………………… (279)
第三节　数理统计基础……………………… (287)
第四节　参数估计与假设检验……………… (290)
习题 12 …………………………………… (297)
参考文献…………………………………… (302)

CONTENTS

第 1 章　函数、极限与连续

第一节　集合与函数

一、集合的概念

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫集合(简称集).集合具有确定性(给定集合的元素必须是确定的)和互异性(给定集合中的元素是互不相同的).比如“身材较高的人”不能构成集合,因为它的元素不是确定的.

我们通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$,否则就说不属于 A,记作 $a\notin A$.通常把

全体整数组成的集合叫做整数集,记作 $\mathbf{Z}$;全体有理数组成的集合叫做有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;全体实数组成的集合叫做实数集,记作 $\mathbf{R}$.

1. 集合的表示方法

(1)列举法:把集合的元素一一列举出来,并用“{ }”括起来表示集合.

(2)描述法:用集合所有元素的共同特征来表示集合.

2. 集合间的基本关系

(1)子集:一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素,我们就说 A,B 有包含关系,称集合 A 为集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(2)相等:如果集合 A 是集合 B 的子集,且集合 B 是集合 A 的子集,此时集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全一样,因此集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

(3)真子集:如果集合 A 是集合 B 的子集,但存在一个元素属于 B 但不属于 A,我们称集合 A 是集合 B 的真子集.

(4)空集:我们把不含任何元素的集合叫做空集.记作 $\varnothing$,并规定,空集是任何集合的子集.

(5)由上述集合之间的基本关系,可以得到下面的结论:

①任何一个集合是它本身的子集.即 $A\subseteq A$.

②对于集合 A,B,C,如果 A 是 B 的子集,B 是 C 的子集,则 A 是 C 的子集.

③我们可以把相等的集合叫做“等集”,这样的话,子集包括“真子集”和“等集”.

3. 集合的基本运算

(1)并集:一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集.记作 $A\cup B$.(在求并集时,它们的公共元素在并集中只能出现一次.)即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

(2)交集:一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集. 记作 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

(3)补集

①全集:一般地,如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集. 通常记作 U.

②补集:对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集. 简称为集合 A 的补集,记作 C_UA. 即

$$C_UA=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

4. 集合中元素的个数

(1)有限集:我们把含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限个元素的集合叫做无限集.

(2)用 card 来表示有限集中元素的个数. 例如 $A=\{a,b,c\}$,则 $\mathrm{card}(A)=3$.

(3)一般地,对任意两个集合 A,B,有 $\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A\cup B)+\mathrm{card}(A\cap B)$

二、常量与变量

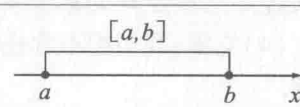
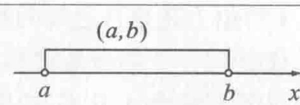
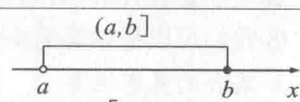
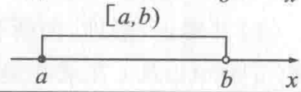
1. 变量的定义

我们在观察某一现象的过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,我们把它称为**常量**;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,我们则把它称为**变量**.

注:在过程中还有一种量,它虽然是变化的,但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的,我们则把它看做常量.

2. 变量的表示

如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示其变化范围. 在数轴上来说,区间是指介于某两点之间的线段上点的全体.

区间名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,b]$或$[a,b)$	 

以上我们所述的都是有限区间,除此之外,还有无限区间:

$[a, +\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为 $\{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$；

$(-\infty, b)$：表示小于 b 的实数的全体，也可记为 $\{x \mid -\infty < x < b\}$；

$(-\infty, +\infty)$：表示全体实数，也可记为 $\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$.

注：其中 $-\infty$ 和 $+\infty$，分别读作"负无穷大"和"正无穷大"，它们不是数，仅仅是记号.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$. 满足不等式 $|x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域，点 a 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径；满足不等式 $0 < |x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 去心邻域.

三、函数

1. 函数的定义

设 x, y 为某过程中的两个变量，如果当变量 x 在其变化范围 D（D 为实数集合）内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**. 记作 $y = f(x), x \in D$.

变量 x 的变化范围 D 叫做这个**函数的定义域**. 通常 x 叫做**自变量**，y 叫做**函数值（或因变量）**，变量 y 的变化范围叫做这个**函数的值域**，f 称为函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则.

注： 为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y = f(x)$ 或 $y = F(x)$ 等等来表示. 这里的字母"f"，"F"表示 x 与 y 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用不同的字母来表示的. 如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 这里我们只讨论单值函数.

2. 函数相等

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域. 由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称这两个**函数相等**.

3. 函数的表示方法

（1）解析法：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法. 例如，直角坐标系中，半径为 r，圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$.

（2）表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法. 例如，在实际应用中，我们经常会用到的平方表，三角函数表等都是用表格法表示的函数.

（3）图示法：用坐标平面上的曲线来表示函数的方法即是图示法. 一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量.

四、函数的简单性态

1. 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们就称 $f(x)$ 在区间 I 有界，否则便称无界.

注： 一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数.

例如,函数 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大,即:对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小,即:对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少**的.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的,在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 叫做偶函数;如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 叫做奇函数.

注:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的数 l,使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$ 叫做**周期函数**,l 是 $f(x)$ 的周期.

注:我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x,\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

五、反函数

1. 反函数的定义

设有函数 $y=f(x)$,若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时,变量 x 在函数的定义域内必有一值 x_0 与之对应,即 $f(x_0)=y_0$,那么变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数用 $x=\varphi(y)$ 来表示,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,但是习惯用 x,y 分别表示自变量和因变量,所以 $x=\varphi(y)$ 习惯写成 $y=f^{-1}(x)$.

注:由此定义可知,函数 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数.

2. 反函数的存在定理

若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格增(减),其值域为 $\mathbf{R}$,则它的反函数必然在 $\mathbf{R}$ 上确定,且严格增(减).

注:严格增(减)即是单调增(减).

例如,$y=x^2$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$. 对于 y 取定的非负值,可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 如果我们不加条件,那么由 y 的值就不能唯一确定 x 的值,也就是在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上,函数不是严格增(减),故其没有反函数. 如果我们加上条件,要求 $x\geqslant 0$,那么对 $y\geqslant 0$,$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant 0$ 时的反函数. 即函数在此要求下严格增.

3. 反函数的性质

在同一坐标平面内,$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如，函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的. 如下图1－1－1所示.

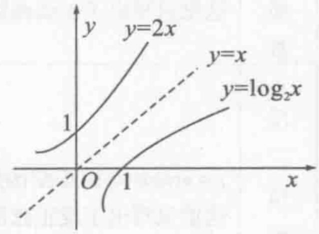


图 1－1－1

六、复合函数

定义　若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 叫做中间变量.

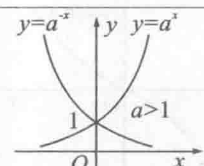
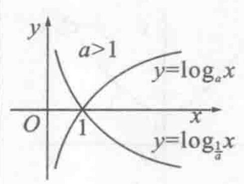
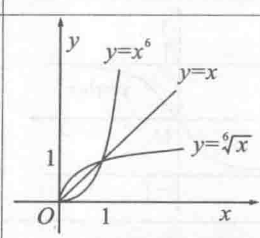
注：并不是任意两个函数就能复合；复合函数还可以由更多函数构成.

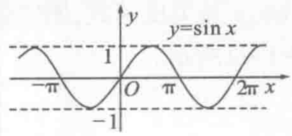
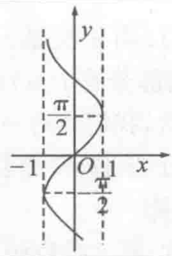
例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的. 因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），使 $y=\arcsin u$ 都没有定义.

七、初等函数

1. 基本初等函数

我们最常用的有五种基本初等函数，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数. 下面我们用表格来把它们总结一下：

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x\ (a>0$，且 $a\neq1)$		a) 不论 x 为何值，y 总为正数； b) 当 $x=0$ 时，$y=1$.
对数函数	$y=\log_a x\ (x>0$，且 $a\neq1)$		a) 其图形总位于 y 轴右侧，并过 $(1,0)$ 点； b) 当 $a>1$ 时，在区间 $(0,1)$ 的值为负，在区间 $(1,+\infty)$ 的值为正，在定义域内单调增.
幂函数	$y=x^a$（a 为任意实数）	这里只画出函数图形的一部分.	令 $a=\dfrac{m}{n}$， a) 当 m 为偶数，n 为奇数时，y 是偶函数； b) 当 m,n 都是奇数时，y 是奇函数； c) 当 m 为奇数，n 为偶数时，y 在区间 $(-\infty,0)$ 无意义.

三角函数	$y=\sin x$(正弦函数) 这里只写出了正弦函数		a)正弦函数是以 2π 为周期的周期函数; b)正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$.
反三角函数	$y=\arcsin x$(反正弦函数) 这里只写出了反正弦函数		由于此函数为多值函数,因此我们将此函数限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,并称其为反正弦函数的主值.

2. 初等函数

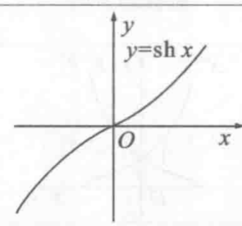
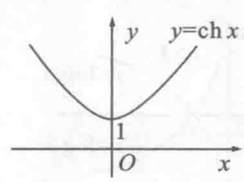
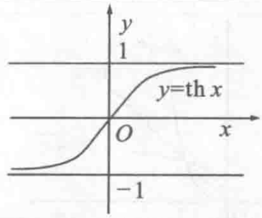
由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数.

例如,$y=2^{\cos x}+\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 9x)$ 是初等函数.

八、双曲函数及反双曲函数

1. 双曲函数

在应用中我们经常遇到的双曲函数是:(用表格来描述)

函数的名称	函数的表达式	函数的图形	函数的性质
双曲正弦	$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$		a)其定义域为 $(-\infty,+\infty)$; b)是奇函数; c)在定义域内是单调增.
双曲余弦	$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$		a)其定义域为 $(-\infty,+\infty)$; b)是偶函数; c)其图像过点 $(0,1)$.
双曲正切	$\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$		a)其定义域为 $(-\infty,+\infty)$; b)是奇函数; c)其图形夹在水平直线 $y=-1$ 及 $y=1$ 之间,在定域内单调增.

我们再来看一下双曲函数与三角函数的区别:

双曲函数的性质	三角函数的性质
$\mathrm{sh}\,0=0,\mathrm{ch}\,0=1,\mathrm{th}\,0=0$	$\sin 0=0,\cos 0=1,\tan 0=0$
$\mathrm{sh}\,x$ 与 $\mathrm{th}\,x$ 是奇函数，$\mathrm{ch}\,x$ 是偶函数	$\sin x$ 与 $\tan x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数
$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$	$\sin^2x+\cos^2x=1$
它们都不是周期函数	它们都是周期函数

双曲函数也有和差公式：

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y$;

$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y$;

$\mathrm{th}(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{th}\,x\pm\mathrm{th}\,y}{1\pm\mathrm{th}\,x\mathrm{th}\,y}$.

2. 反双曲函数

双曲函数的反函数称为反双曲函数.

(1)反双曲正弦函数 $\mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　其定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2)反双曲余弦函数 $\mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$　其定义域为$[1,+\infty)$；

(3)反双曲正切函数 $\mathrm{arth}\,x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　其定义域为$(-1,1)$.

第二节　极限的概念

一、数列的极限

我们先来回忆一下初等数学中学习的数列的概念.

数列　若按照一定的法则，有第一个数 a_1，第二个数 a_2，…，依次排列下去，使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 a_n，那么，我们称这列有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为数列. 数列中的每一个数叫做数列的项. 第 n 项 a_n 叫做数列的一般项或通项.

注：我们也可以把数列 a_n 看做自变量为正整数 n 的函数，即：$a_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数.

极限　极限的概念是求实际问题的精确解而产生的.

例如，我们可通过作圆的内接正多边形，近似求出圆的面积.

设有一圆，首先作圆内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作圆的内接正二十四边形，其面积记为 A_3；依次循环下去(一般把内接正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n)可得一系列内接正多边形的面积：$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$，它们就构成一列有序数列. 我们可以发现，当内接正多边形的边数无限增加时，A_n 也无限接近某一确定的数值(圆的面积)，这个确定的数值在数学上被称为数列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ (读作 n 趋近于无穷大)时的极限.

注：上面这个例子就是我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)的割圆术.

1. 数列的极限

定义 1 一般地,对于数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 来说,若存在任意给定的正数 ε(不论其多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a,就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限,或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的,习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

注:此定义中的正数 ε 只有任意给定,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 且定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ε 是有关的,它是随着 ε 的给定而选定的.

2. 数列的极限的几何解释

在此我们可能不易理解这个概念,下面我们再给出它的一个几何解释,以使我们能理解它. 数列 x_n 极限为 a 的一个**几何解释**:将常数 a 及数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来,再在数轴上作点 a 的 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,如下图 1-2-1 所示.

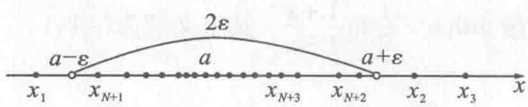


图 1-2-1

因不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ 等价,故当 $n>N$ 时,所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内,而只有有限个(至多只有 N 个)在此区间以外.

注:至于如何求数列的极限,我们以后会学习到,这里我们不做讨论.

3. 数列的有界性

对于数列 x_n,若存在着正数 M,使得一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$,则称数列 x_n 是有界的,若正数 M 不存在,则可说数列是无界的.

定理 1.1 若数列 x_n 收敛,那么数列 x_n 一定有界.

注:有界的数列不一定收敛,即:数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件. 例如,数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1}$ 是有界的,但它是发散的.

二、函数的极限

学习了数列的极限,已经知道数列可看做一类特殊的函数,即自变量取 $1\to\infty$ 内的正整数,若自变量不再限于正整数的顺序,而是连续变化的,就成了函数. 下面我们来学习函数的极限.

函数的极限有两种情况:a)自变量无限增大;b)自变量 x 任意地接近于有限值 x_0,或者说趋于有限值 x_0(记作 $x\to x_0$),对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形,如果在这时,函数值无限接近于某一常数 A,就称函数存在极限. 我们已知道数列的极限的情况,那么函数的极限如何呢?

下面我们结合着数列的极限来学习一下函数极限的概念.

1. 自变量趋向无穷大时函数的极限

如果在 $x\to\infty$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A,那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 精确地说,就是

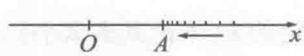
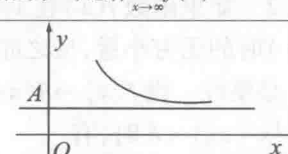
定义 2　设函数 $y=f(x)$,若对于任意给定的正数 ε(不论其多么小),总存在着正数 X,使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x,所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

定义 2 可简单地表达为:

$$\lim_{x\to\infty}=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当}|x|>X\text{时,有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

下面我们用表格把函数的极限与数列的极限对比一下:

数列的极限的定义	函数的极限的定义
存在数列 $a_n=f(n)$ 与常数 A,任给一正数 $\varepsilon>0$,总可找到一个正整数 N,对于 $n>N$ 的所有 a_n 都满足 $\|a_n-A\|<\varepsilon$,则称数列 a_n 当 $n\to\infty$ 时收敛于 A,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.	存在函数 $y=f(x)$ 与常数 A,任给一正数 $\varepsilon>0$,总可找到一个正数 X,对于适合 $\|x\|>X$ 的一切 x,都满足 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$,则称函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.
	

从上表我们发现了什么? 试思考之.

2. 自变量趋向有限值时函数的极限

我们先来看一个例子.

函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,当 $x\to1$ 时函数值的变化趋势如何? 函数在 $x=1$ 处无定义. 我们知道对实数来讲,在数轴上任何一个有限的范围内,都有无穷多个点,为此我们把 $x\to1$ 时函数值的变化趋势用表列出,如下:

x	…	0.9	0.99	0.999	…	1	…	1.001	1.01	1.1	…
$f(x)$	…	1.9	1.99	1.999	…	2	…	2.001	2.01	2.1	…

从中我们可以看出 $x\to1$ 时,$f(x)\to2$. 而且只要 x 与 1 有多接近,$f(x)$ 就与 2 有多接近. 或者说,只要 $f(x)$ 与 2 只差一个微量,就一定可以找到一个 δ,当 $|x-1|<\delta$ 时满足 $|f(x)-2|<\delta$.

定义 3　设函数 $f(x)$ 在某点 x_0 的某个去心邻域内有定义,且存在常数 A,如果对任意给定的 ε(不论其多么小),总存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时存在极限,且极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

注:在定义中为什么是在去心邻域内呢?

这是因为我们只讨论 $x \to x_0$ 的过程，与 $x = x_0$ 出现的情况无关. 此定义的核心问题是：对任意给出的 ε，是否存在正数 δ，使其在去心邻域内的 x 均满足不等式.

第三节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

1. 无穷小量的定义

以零为极限的变量称为**无穷小量**. 简称**无穷小**.

定义 1　设有函数 $f(x)$，对于任意给定的正数 ε（不论其多么小），总存在正数 δ（或正数 M），使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > M$）的一切 x，所对应的函数值满足 $|f(x)| < \varepsilon$ 不等式，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时为**无穷小量**. 简称**无穷小**. 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \left(或 \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\right).$$

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小.

2. 有极限的变量与无穷小量之间的关系

研究无穷小量的重要原因是因为有极限的变量与无穷小量之间有着密切的关系.

定理 1.2　如果函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时有极限 A，则差 $f(x) - A = \alpha$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量，反之亦成立.

证明　必要性　设 $f(x) \to A (x \to x_0)$，则对任意给定的 ε（不论其多么小），总存在正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

令 $f(x) - A = \alpha$，则 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量，且

$$f(x) = A + \alpha.$$

这就证明了 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小 α 之和.

充分性　设 $f(x) = A + \alpha$，其中 A 是常数，α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量，于是

$$|f(x) - A| = |\alpha|.$$

因 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小，所以对任意给定的 ε（不论其多么小），总存在正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

即

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

这就证明了 A 是 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限.

类似地可证明当 $x \to \infty$ 时的情形.

此定理说明无穷小量是有限函数的代表，说明有限函数都可表示为它的极限与无穷小量之和的形式.

3. 无穷小量的性质

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

证明　考虑两个无穷小的和.