高等学校数理类基础课程“十二五”规划教材

数学建模教程

隋树林　主编　　杨树国　朱善良　副主编

化学工业出版社

高等学校数理类基础课程“十二五”规划教材

数学建模教程

隋树林　主编　　杨树国　朱善良　副主编

化学工业出版社

本书作者把多年数学建模课程教学、数学建模竞赛培训经验与一般理工科院校的学生实际相结合，重点介绍了常用的数学建模方法．内容包括数学建模概论、初等建模方法、差值拟合方法、数学规划方法、微分方程方法、图论方法、不确定信息处理方法、常用统计与随机分析方法及现代优化方法等．本书将数学模型、数学方法和数学软件通过实际案例有机地结合在一起，对每种建模方法都从数学原理、软件实现、应用案例三个方面加以介绍，使得读者不仅了解每种建模方法的基本理论和应用领域，还能够借助数学软件将此方法应用于实践．读者只需具备高等数学、线性代数和概率统计方面的基础知识便可以阅读，学习本书．

本书可作为高等院校理工科各专业本科生、研究生数学建模课程的教材，也可作为大学生参加各类数学建模竞赛的培训教材以及科研工作者和工程人员的参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

数学建模教程/隋树林主编．—北京：化学工业出版社，2015.2
高等学校数理类基础课程“十二五”规划教材
ISBN 978-7-122-22752-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①隋… Ⅲ.①数学建模-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 007150 号

责任编辑：郝英华　　装帧设计：韩　飞
责任校对：吴　静

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京永鑫印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 19½　字数 353 千字　2015 年 5 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：39.00 元

前 言

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学，它既是一门理性思维科学，也是一门实用科学．传统的数学课程教学侧重于介绍数学的理论、方法和解题技巧，突出对学生进行严格的科学思维方法的训练，对数学的应用介绍得相对较少，致使不少学生虽然学了多年的数学知识，却不能有效地应用这些知识解决实际问题．

数学建模是运用数学的思想方法、数学的语言去近似地刻画一个研究对象，构建一座沟通现实世界与数学世界的桥梁，并以计算机为工具，应用现代计算技术，达到解决各种实际问题的目的．近几十年来，随着科学技术的发展，尤其是计算机技术的迅猛发展，数学建模不仅在传统的物理、普通工程技术等领域的作用更加重要，而且迅速扩展到从自然科学技术到工农业生产建设、从经济活动到社会生活的各个领域．数学科学与计算机技术相结合，产生了一种新的技术——数学技术，“高技术本质上是数学技术”的观点已被越来越多的人所接受．正是在这样的背景下，国内外高校的专家开始有意识地将数学建模的思想引入到高校课程中，并组织开展了一系列课外科技活动，如美国大学生数学建模竞赛和中国大学生数学建模竞赛等，以提高大学生应用数学的能力．

数学建模课程自 20 世纪 80 年代进入我国大学以来，课程建设发展迅猛，越来越多的高校开设了与数学建模相关的课程，如数学建模、数学实验、科学计算与数学建模等，一些学校将数学建模课程在专业培养方案中确定为主干课程，从教学法规上确立了数学建模课程的重要基础性地位．教材建设是数学建模课程建设的重要一环，十几年来，本书笔者一直从事数学建模课程的教学和指导数学建模培训及竞赛的工作，初步摸索到了一些培养应用型人才的教学经验，也积累了一批较为实用的教案，本书就是在此基础上编写而成的．

本书将数学模型、数学方法和数学软件有机地结合在一起，侧重于培养学生分析问题、利用现代技术解决实际问题的能力．全书以涉及的数学建模方法为主线进行编排，每一章讨论一种类型的建模方法．一般先简单介绍这一章所涉及数学建模方法的基本思想，以应用为目的，不做过多的理论阐述，然后通过应用案例，结合 Matlab、Lingo 等数学软件介绍该方法的使用，并将源程序提供给学生，使学生在构建数学模型的同时，也能进行上机实验，从

而为学生提供数学建模全过程的训练.

本书的第1章、第8章由杨树国执笔，第2章、第7章由朱善良执笔，第3章、第5章由段得玉执笔，第4章、第6章由王天顺执笔，第9章由隋树林执笔，全书由隋树林统稿.

本书的知识内容、范围、深度及广度能够满足理工科学生对数学建模能力培养的要求，适合于40左右学时的本专科教学要求，也可作为研究生数学建模课程和各种数学建模竞赛的培训教材．各章内容和问题基本上是独立的，教师、学生或其他读者可根据各自的需要选用或阅读．本书配有内容丰富的电子课件可免费赠送给采用本书作为教材的院校使用，如有需要，请发邮件至 cipedu@ 163. com 索取.

由于笔者的学识有限，不妥之处在所难免，敬请专家和读者批评指正.

编者

2014 年 12 月

目 录

第 7 章 不确定信息处理方法 173

第 8 章 常用统计与随机分析方法 204

第 9 章 现代优化方法 311

第 1 章

数学建模概论

数学模型是沟通实际问题和数学理论与方法之间联系的桥梁．本章主要讨论数学建模的意义、方法和步骤，使读者对数学建模有初步的了解和认识．

1.1 什么是数学模型

现实世界中任何一种物质系统及其运动都有其质的规定性，又有其量的规定性，是质和量的统一．数学正是一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，因此可以毫不夸张地说，数学可以用来解决一切相关的科学技术问题．

数学是在人类改造自然、征服自然的过程中产生和发展起来的，自诞生之日起，它就和人们的生活实际密切相关．随着对客观世界认识的不断发展，人们已不满足对研究对象本质和属性的定性描述，而是越来越深入地研究事物的数量特征、数量关系与数量变化，定量分析已经成为人们深刻认识客观事物的主要方式，究其本质，就是运用数学的思想和方法来分析研究客观规律．正因为如此，数学不但广泛应用于自然科学和工程技术，而且与各学科领域的结合越来越深入．特别是随着时代的进步和发展，数学在理论上更抽象、在方法上更综合、在应用上更广泛，新的数学分支层出不穷，相互交叉，相互渗透，大量新兴的数学方法正在被有效地应用，因此深入研究数学在各领域中的应用已成为亟待解决的问题．

数学源于现实，又高于现实．运用数学的思想和方法解决实际问题，首先要对实际问题进行一定的抽象与简化，用数学的语言和方法建立一个描述该问题的数学模型；其次利用数学的方法和手段对数学模型进行求解；最后再将结果或结论应用于实际，经受实践的检验．如果模型或其结果与实际不符，还需要对模型进一步修正；建立模型、求解模

型、检验模型、修正模型……如此循环往复，就是数学应用于实际问题的必经之路和真实写照．

数学模型是为一定的目的对现实世界而做的抽象、简化的数学结构，它是运用数学的语言和工具，如数学符号、数学公式、程序、图、表等，刻画客观事物的本质属性与内在联系，是现实世界的简化而本质的描述．21 世纪是迈向知识经济的时代，科学技术的竞争十分激烈，而数学是科技发展必不可少的组成部分，许多科学技术问题归根结底是数学问题，数学问题的解决要靠模型来实现，因此可以说，科学就是通过对数学模型的研究来阐明真实世界的客观规律．

当然，除了数学模型外，还有其他各种形式的模型．任何一个模型都可以看成一个真实系统某一方面的理想化．它们可以是对实体的模拟，如展览厅中模型飞机的形状；或者是对实体某些属性的模拟，如一张地质图是某地区地貌情况的模拟．与形形色色的模型相对应，它们在现实世界里的原始参照物通称为原型．用模型替代原型的方式来分类，模型可以分为物质模型（形象模型）和理想模型（抽象模型）．前者包括直观模型、物理模型等，后者包括思维模型、符号模型、数学模型等．

① 直观模型　指那些供展览用的实物模型以及玩具、照片等，通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真．这类模型的效果是一目了然的．

② 物理模型　主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型，它不但可以显示原型的外形或某些特征，而且可以用来进行模拟实验，间接地研究原型的某些规律．如波浪水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能，风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性．有些现象直接用原型研究非常困难，更可借助于这类模型，如地震模拟装置、核爆炸反应模拟设备等．应注意验证原型与模型间的相似关系，以确定模拟实验结果的可靠性．物理模型常可得到实用上很有价值的结果，但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点．

③ 思维模型　指通过人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验形式直接储存于人脑中，从而可以根据思维或直觉作出相应的决策．如汽车司机对方向盘的操纵、一些技艺性较强的工种(如钳工)的操作，大体上是靠这类模型进行的．通常说的某些领导者凭经验作决策也是如此．思维模型便于接受，也可以在一定条件下获得满意的结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点，难以对它的假设条件进行检验，并且不便于人们的相互沟通．

④ 符号模型　是在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等，

按一定形式组合起来描述原型．如地图、电路图、化学结构式等，具有简明、方便、目的性强及非量化等特点．

数学对其他学科的作用，在很大程度上是通过建立和求解数学模型来实现的．建立数学模型是数学应用的关键而重要的一步．建立数学模型的过程称为数学建模，即运用数学思想和方法分析问题、解决问题的全过程，由此可见，数学建模是一种数学的思考方法．从科学角度上看，数学建模就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具．如当生物医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型后，他可以用来分析药物的疗效，从而有效地指导临床用药，厂长经理们筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，是为了获取尽可能高的经济效益．

作为一名初学者，首先应当清楚“数学建模”完全不同于其他数学分支，学习该课程的困难不在于学习和理解所用的数学，而在于明白在何处用它，怎样用它，而“学着用”数学和“学”数学是根本不同的，掌握建立数学模型所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也迥然不同．因为在实际工作中，纯粹只用现成的数学就能解决的实际问题几乎没有，而遇到的大多都是数学知识和其他学科知识混杂在一起的问题，其中数学的奥妙不是现成或明摆着，而是暗藏在深处，需要努力挖掘．

著名德国数学家 H. G. Grassmann 认为：“数学除了锻炼敏锐的理解力，发现真理外，它还有另一个训练全面考虑科学系统的头脑的开发功能”．数学建模不同于其他数学分支，从教学的角度来看，重点不是学习理解数学知识本身，而在于数学方法的掌握、数学思维的建立．开设数学建模课程是为了使学生将学习过的数学方法和知识同周围的现实世界联系起来，甚至和真正的实际应用问题联系起来，不仅应使学生知道数学有用、怎样用，更要使学生体会到在真正的应用中还需要继续学习．为使学生们能将学过的数学知识与方法应用于实践，笔者认为开设数学建模课程应以介绍数学建模的一般方法为主线，着重训练运用数学知识建立数学模型的技能技巧、着重能力和相关素质的培养．

1.2　数学模型的特点和分类

（1）数学模型的特点

模型多种多样，数学模型与其他模型相比，有自己的特点．

① 模型的逼真性和可行性．利用数学模型来解决问题，所建立的模型必须与研究对象相符，不能脱离研究对象，即要具有逼真性．但一个模型越逼真，建立起来就越困难，处理起来也就越困难，反倒不容易

达到通过建模对研究对象进行分析、预报、决策或者控制的目的，即实用上不可行；另一方面，越逼真的模型常常越复杂，即使数学上能处理，这样的模型应用时所需要的“代价”也相当高，而高“代价”不一定与复杂模型取得的“效益”相匹配，所以建模时往往需要在模型的逼真性与可行性，“代价”与“效益”之间作出折衷和抉择．

② 模型的渐进性．对一个实际问题的建模通常不可能一次成功，往往要经过反反复复的建模过程才能实现．包括去伪存真、删繁就简、反复检验、不断修正等，以获得越来越符合实际的数学模型．这其中有问题本身复杂性的原因，也有人们的认识和实践能力不足的缘故，所以各门学科中的数学模型都存在着一个推陈出新或者不断完善的过程．从19世纪力学、热学、电学等许多学科由牛顿力学的模型主宰，到20世纪爱因斯坦相对论模型的建立，都是模型渐进性的明显例证．

③ 模型的强健性．数学模型的建立往往是在模型假设的基础上进行的，而模型假设一般是对实际问题的简化，是一个化繁为简的过程，不可能太准确；模型中的参数和信息也来自于对研究对象的观测，观测数据有可能存在着误差．一个好的数学模型应该具有强健性，即当模型假设改变时，可以导出模型结构的相应变化；当观测数据有微小改变时，模型参数也只有相应的微小变化，但不能变化太大．

④ 模型的可转移性．模型是现实对象抽象化、理想化的产物，是一种高度的概括和综合，它不应为研究对象所独有，可以转移到相关的研究对象，这些对象可以属于同一领域，也可能来自不同领域．如生态、经济、社会等领域内的模型就常常来自物理领域．模型的这种性质显示了它的应用广泛性．

⑤ 模型的非预制性．目前人们虽然已经建立了很多不同类型、应用广泛的模型，但是实际问题多种多样、千差万别，不可能把一个或一类模型在各种问题中通用，必须根据问题的实际情况，建立符合问题需要的数学模型，模型的这种非预制性使得一个问题的模型没有固定或者是唯一的答案，在建模过程中常常会有新的数学思想、方法或概念的产生，促进了数学本身的发展．

⑥ 模型的条理性．从建模的角度考虑问题，可以促使人们对现实对象的分析更全面、更深入、更具条理性，这样即使建立的模型由于种种原因尚未达到实用的程度，对问题的研究也是有利的．

⑦ 模型的技艺性．建模的方法与其他一些数学方法如方程解法、规划问题解法等是根本不同的，无法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧．有人说，建模目前与其说是一门技术，不如说是一种艺术、是技艺性很强的技巧．经验、想像力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等

在建模过程中起的作用，往往比一些具体的数学知识更大．

⑧ 模型的局限性．数学建模时，需要对研究对象进行一定的简化或假设，所得到的模型一般是现实对象简化、理想化的产物，这使得数学模型虽具有一定的普适性，但也存在着特殊性和局限性，一旦将模型的结论应用于实际问题，那些被忽视、简化的因素必须加进去，此时模型就要进行修正，所以说模型的通用性是相对的、有限制的；另外，由于人们认识能力和科技水平以及数学学科本身的限制，对不少实际问题很难建立比较完善的模型．如一些内部机理复杂、影响因素众多、测量手段不够完善、技艺性较强的生产过程，像生铁冶炼过程，只靠数学建模本身是无法揭示其内在规律的．

（2）数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类，常用的分类有如下几种．

① 按照模型的应用领域．根据模型的应用领域或所属学科，可将数学模型分为：人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等．范畴更大一些则形成许多边缘学科如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等．

② 按照建立模型的数学方法．可将数学模型分为：初等模型、几何模型、微分方程模型、统计回归模型、数学规划模型等．

③ 按照模型的表现特性．

a. 确定性模型和随机性模型：取决于是否考虑随机因素的影响．近年来随着数学的发展，又有所谓突变性模型和模糊性模型．

b. 静态模型和动态模型：取决于是否考虑时间因素引起的变化．

c. 线性模型和非线性模型：取决于模型的基本关系，如微分方程是否是线性的．

d. 离散模型和连续模型：指模型中的变量（主要是时间变量）取为离散还是连续．

虽然从本质上讲，大多数实际问题是随机性的、动态的、非线性的，但是由于确定性、静态、线性模型容易处理，并且往往可以作为初步的近似来解决问题，所以建模时，常先考虑确定性、静态、线性模型．连续模型便于利用微积分方法求解析解，作理论分析，而离散模型便于在计算机上作数值计算，所以用哪种模型要看具体问题而定．在具体的建模过程中将连续模型离散化，或将离散变量视作连续的，也是常采用的方法．

④ 按照建模目的．数学模型有描述模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等．

⑤ 按照对模型结构的了解程度．数学模型可分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型等．此时把研究对象比喻成一只箱子，要通过建模来揭示它的本质和规律．白箱主要指系统的内部机理已经基本清楚，如力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题．这种问题的模型大多已经基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题；灰箱主要指系统的内部机理尚不十分清楚，如生态、气象、经济、交通等领域中的一些模型，在建立和改善模型方面都有不同程度的工作去做；黑箱则指系统的内部机理完全不清楚，如生命科学和社会科学等领域中一些机理很不清楚的现象．

有些工程技术问题，虽然主要基于物理、化学原理，但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因，也常作为灰箱或黑箱模型处理．当然，白、灰、黑之间并没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的．

1.3 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的，由于建模的目的不同、分析方法不同、采用的数学工具不同等，故所得的模型也会千差万别．但是建立模型的基本方法和过程大致是一样的．

（1）数学建模基本方法

一般来说，数学建模方法可分为机理分析和测试分析两种．机理分析是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律，所建立的模型常有明确的物理或现实意义．测试分析将研究对象看作一个“黑箱”系统（意思是它的内部机理看不清楚），通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析，按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型．

面对一个实际问题用哪一种方法建模，主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的．如果掌握了一些内部机理的知识，模型也要求具有反映内在特征的物理意义，建模就应以机理分析为主．而如果对象的内部规律基本上不清楚，模型也不需要反映内部特性（例如仅用于对输出作预报），那么就可以用测试分析．对于许多实际问题往往将两种方法结合起来建模，即用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数．机理分析当然要针对具体问题来做，不可能有统一的方法，因而主要是通过实例研究来学习；测试分析有一套完整的数学方法，以动态系统为主的测试分析称为系统辨识，是一门专门学科．本书以后所说的数学建模主要指机理分析．

（2）数学建模的一般步骤

建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与问题性质、建模目的等有关．下面介绍的是机理分析方法建模的一般过程，如图 1-1 所示．

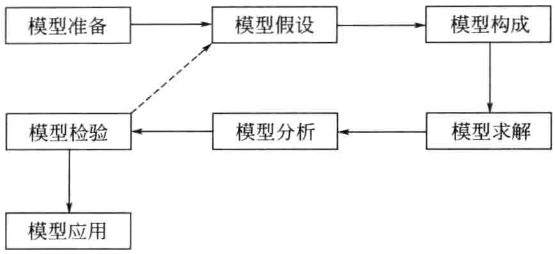

图 1-1　数学建模步骤示意图

① 模型准备．要求建模者了解问题的实际背景，明确建模目的，搜集必要的信息如现象、数据等，尽量弄清对象的主要特征，形成一个比较清晰的“问题”，由此初步确定用哪一类模型．明白情况才能方法正确，在模型准备阶段要深入调查研究，虚心向实际工作者请教，尽量掌握第一手资料．

② 模型假设．根据对象的特征和建模目的、抓住问题的本质、忽略次要因素、作出必要合理的简化假设，对于建模的成败来说是非常重要和困难的一步．假设作得不合理或太简单，会导致错误的或无用的模型；假设做得过分详细，试图把复杂对象的众多因素都考虑进去，会使你很难或无法继续下一步的工作．常常需要在合理与简化之间作出恰当的折衷．通常作假设的依据：一是出于对问题内在规律的认识；二是来自对现象、数据的分析，以及二者的综合．想象力、洞察力、判断力以及经验，在模型假设中起着重要作用．

③ 模型构成．根据所作的假设，用数学的语言、符号描述对象的内在规律，建立包含常量、变量等的数学模型，如优化模型、微分方程模型、差分方程模型、图的模型等．这里除了需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较为广阔的应用数学方面的知识．要善于发挥想象力，注意使用类比法，分析对象与熟悉的其他对象的共性，借用已有的模型．建模时还应遵循的一个原则是：尽量采用简单的数学工具，因为你的模型总是希望更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏．

④ 模型求解．可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方法，特别是数学软件和计算机技术．

⑤ 模型分析．对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的强健性分析等．

⑥ 模型检验．把求解和分析结果翻译回到实际问题，与实际的现