XIN SANDAO CONGSHU
新三导丛书

复变函数与积分变换

（高教社 · 西安交通大学 · 第四版）
（高教社 · 东南大学 · 第四版）

导教 · 导学 · 导考

王惠珍 赵伟舟◎编著

- 自主学习（课后习题详解）
- 课程过关（典型例题解析）
- 考研备考（考研真题分析）
- 教师备课（重点难点归纳）

西北工业大学出版社

新三导丛书

复变函数与积分变换
导教·导学·导考

（高教社·西安交通大学·第四版）

（高教社·东南大学·第四版）

王惠珍　赵伟舟　编著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、Fourier 变换、Laplace 变换. 主要内容结构为每章的内容导教、内容导学、典型例题解析，习题精解以及课程考试真题与参考答案. 以帮助读者抓住要点，把握实质，掌握方法，融会贯通，提高学习效率和与教学教育质量.

本书可供高等工科院校各专业的师生参考.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换导教·导学·导考/王惠珍，赵伟舟编著. —西安：西北工业大学出版社，2014.8

（新三导丛书）

ISBN 978-7-5612-4106-6

Ⅰ.①复… Ⅱ.①王…②赵… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教学参考资料②积分变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 190794 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　　1/16
印　　张：11.875
字　　数：364 千字
版　　次：2014 年 8 月第 1 版　　2014 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

前　言

随着信息化教育的迅速发展和知识爆炸时代的到来，现代科技对于数学课程的教与学都提出越来越高的要求.但是，与此同时，我国目前大学数学教育严重出现了高要求与学时少的突出矛盾.正是为了更好地解决这一矛盾，笔者在近30年的教学经验和对教案整理的基础上，编写了三导系列丛书之一——《复变函数与积分变换导教·导学·导考》，以帮助读者抓住要点，把握实质，掌握方法，融会贯通，提高教学和学习效率与教育质量.

本书共分为两部分:复变函数与积分变换，分别与高等教育出版社出版的下列教材相配套:西安交通大学编第四版《复变函数》和东南大学编第四版《积分变换》.

本书内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、Fourier 变换、Laplace 变换.各章主要内容结构为内容导教、内容导学、典型例题分析，习题精解以及课程考试真题与参考答案.本书可作为高等工科院校各专业的老师教学参考和学生自学参考书.每章的教学建议既可以帮助任课老师把握讲授要点及内容组织方法，又可以帮助学生透视知识系统脉络，掌握预习或课后复习方法;而重点、难点解析有助于帮助老师在教学组织中突出重点，化解难点，把握本质;也有助于学生在学的过程中深刻理解主要内容，掌握知识联系与区别，并结合典型例题分析，做到融会贯通，从细节的认识升华到全盘的系统认识，提高分析问题、解决问题的能力.

各章的教学建议和主要概念(包括教学基本要求，主要内容精讲，重点、难点解析和部分的典型例题分析)由王惠珍编写，部分例题分析、习题精选详解与以及课程考试真题与参考解答、插图由赵伟舟编写.

由于水平有限，不妥之处在所难免，恳望广大读者批评指正!

编著者

2014 年 5 月

目　录

第二部分 积分变换

绪　言

0.1　为什么要学习这门课

“复变函数与积分变换”课程包括“复变函数”和“积分变换”两个分支，是理工科院校大多数专业的一门必修专业基础课程，其理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性力学中的平面问题和通信工程、电气工程、信号处理及自动控制不可缺少的有力工具.

早在16世纪中叶，G. Cardano(1501—1576年)在研究一元二次方程时遇到了负数开平方的情况，首先引进了复数，然而在很长一段时间内，复数并不被人们所接受，通常被认为是没有意义的“虚数”. 直到18世纪，随着微积分的产生与发展，人们才真正开始将注意力转移到复数的“真实性”和“重要性”上来，特别是欧拉(L. Euler)的研究结果，例如欧拉公式深刻揭示了复指数函数与三角函数之间的关系. 随后，C. Wesse(1745—1818年)和R. Argand(1768—1822年)的研究结果——将复数用二维向量或点表示，以及K. F. Gauss(1777—1855年)与W. R. Hamilton(1805－1865)定义复数为有序实数对. 这些数学家的研究结果，为复变函数论的发展奠定了坚实的理论基础.

复变函数论产生于18世纪. 1774年，欧拉在他的一篇论文中考虑了由复变函数的积分导出的两个方程，而在比他更早时期，法国数学家达朗贝尔(D. Alembert, 1717—1783年)在他关于流体力学的论文中，就已经得到同样的两个方程. 因此后来人们就称这两个方程为“达朗贝尔-欧拉方程”. 随后，法国的拉普拉斯研究了复变函数的积分. 欧拉、达朗贝尔和拉普拉斯都是创建复变函数论的先驱. 到了19世纪，当柯西和黎曼研究流体力学时，对上述两个方程又做了更详细的研究，所以这两个方程也被称为“柯西-黎曼”条件. 柯西、黎曼和德国数学家维尔斯特拉斯为这门学科的发展做了大量的奠基工作.

复变函数论的全面发展是在19世纪，就像微积分的发展统治了18世纪的数学那样，复变函数这个新的分支统治了19世纪的数学. 当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且成为这个时期的数学盛宴. 也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一.

20世纪初，复变函数论又有了很大的进展，维尔斯特拉斯的学生——瑞典数学家列夫勒、法国数学家彭加勒、阿达玛等——都做了大量的研究工作，开拓了复变函数论更广阔的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献.

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数域内的推广和发展. 其主要任务是研究复变函数之间的依赖关系及复数域上的微积分，其主要研究对象是解析函数.

复变函数的柱石——柯西积分公式，把可微复函数与复幂级数联系起来，现代数学一刻也离不开它. 首先，黎曼利用它把zeta函数延拓到整个复平面，这一成果成为后世追随者的崇拜对象. 调和分析复方法，首先必须引用柯西积分公式. 由于其基础性的作用，代数复几何，如基本的霍奇定理、解析数论(更是完全依赖zeta函数的解析性质)及素数大定理的非初等证明，素数分布的诸多结论，都极端依赖于可微函数和幂解析的等价性. 复变函数可以通过共形映射为它的性质提供几何说明，共形映射在流体力学、空气动力学、弹性理论、静电场理论等方面都得到了广泛的应用. 留数理论将复变函数积分的计算大大简化.

现在复变函数已经深入到代数学、微分方程、积分方程、概率论与数理统计、拓扑学和解析数论等数学分支. 复变函数的理论和方法已被广泛应用于理论物理、电磁学、热学、流体力学、空气动力学、弹性力学、通信工程、电气工程、信号处理和自动控制等领域. 它是解决平面问题的有力工具，在描述波动、交流电、原子结构

中都具有很大的优越性.

例如在力学或物理学中,可以用复变函数来建立很多"稳定平面场"的数学模型:流体力学中的平面流速场的速度分布和静电学中的平面静电场的强度分布可用复变函数来表示.

俄国的茹柯夫斯基在设计飞机的时候,就用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题,他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面的问题上也做出了贡献.

而数学、自然科学和工程技术的不断发展又极大地推动了复变函数的发展,丰富了复变函数的内容. 近年来,关于广义解析函数论的理论和应用研究的发展也十分迅速.

随着工程技术(信号与系统、电工技术、无线电技术、信号处理等领域)的不断发展和需要,在复变函数论的基础上,形成了积分变换. 所谓积分变换,就是通过适当的积分运算,把某函数类 A 中的一个函数变成另一函数类 B 中的一个函数的变换. 工程技术中最常用的积分变换就是傅里叶变换和拉普拉斯变换.

积分变换起源于 19 世纪的运算危机. 英国著名的无线电工程师海维赛德(Heaviside)在求解电工学、物理学等领域的线性微分方程的过程中逐步形成了一种所谓的符号法,后来符号法又演变成现在的积分变换法. 积分变换法已成为求解微分方程或其他方程的简便有效的工具,通过积分变换,能够把分析运算(如微分、积分)转换为代数运算,把原来的微(积)分方程转换为代数方程.

积分变换的理论与方法不仅在数学的许多分支中得到广泛应用,而且作为一种研究方法和工具,在许多科学技术领域中(例如物理学、力学、无线电技术及信号处理等方面),无论是过去还是现在或者将来都发挥着极为重要的作用.

0.2 如何教好这门课

复变函数通常又称复分析,复变函数的许多概念、理论和方法都是实变函数在复数域内的推广与发展,因此复变函数与实变函数的内容之间有许多相似之处,但又有本质不同之处. 复变函数构建的是二维空间到二维空间的映射,抽象程度更高,理论推导更繁,遇到的问题更繁杂,学生理解起来难度相对较大,容易感到枯燥无味. 不少学生对复变函数学习并没有引起足够重视. 因此在复变函数教学中,要启发、引导学生善于比较,勤于思考,既要注意共同点,更要注意复数域上特有的性质与结果,抓住本质,融会贯通,同时还要注意激发学生学习这门课的兴趣. 要克服这些问题,我们在教学中进行了以下尝试:

(1)相关数学历史的渗透. 一方面,通过知识背景介绍,在枯燥的数学讲授中增加趣味性内容,以调动学生的学习兴趣和主动性. 特别是第一次课的内容包括复变函数的历史和涉及的数学家柯西、黎曼、傅里叶、拉普拉斯等的故事,这些历史故事的介绍不但可以抓住学生的兴趣点,使他们对复变函数中的重要定理产生好奇,在以后正式学习定理时能够更快记住和掌握. 另一方面,通过介绍数学家对知识的发现过程,培养学生追求真理的执著信念和正确的人生观、价值观. 从数学家的故事中,学生也会感受到数学大师们独特的思维方法和坚忍不拔的精神,从而鼓励学生积极思维,勇战困难.

(2)现代教学模式的应用. 复变函数与积分变换是解决实际问题的有力工具,在教学中需要注意两点:一是教师的基础知识传授;二是学生的自主学习与创新能力培养. 在教学过程中,尽量打破传统的教师主讲模式,将课堂作为学生参与数学活动的重要阵地之一,大力提倡"讲授+实践"和"以学为主,先学后教"的教学模式,理论与实践相结合,讲授与自学相结合,精讲多练,突出重点,化解难点,以此提高课堂效率,培养学生的建模思想和数学实践能力.

例如,积分变换属于基础性工程应用类的数学课程,是以复变函数为基础的积分运算,其理论、方法简单,但公式、性质多,学起来枯燥一些. 因此,当进行积分变换内容的教学时,应该以应用思想方法教学为重点,要更加注重应用性问题的解决和实践性的教学环节. 这样才能取得更好的教学效果,并对学生学习后继相应的专业课程打下良好的基础.

(3)现代教学法的应用. 传统的复变函数教学,多采用单纯的类比教学法,从高等数学的相关内容讲起.

但由于复变函数大多数都安排在第四学期，不少学生在学习复变函数时，已经遗忘了有关的高等数学知识.如果仅仅依赖大量的类比法教学，学生会有“重复感”而不能激起学习兴趣.因此，在教学过程中，可从一些有意义的相关实际背景问题出发，实施“例证式”等现代教学方法与传统“类比联想”教学方法相结合的思路进行课堂讲授.一方面，由于学生学习数学最怕的就是理论性强的定理，因此在讲复变函数的一些理论时可先从生动的实际例子入手，使学生真正感受到所学定理在实际中是有用的，是能解决实际问题的，避免学生对所学知识产生“无用论”的消极思维，从而激发了学生的兴趣，充分调动学生学习的主观能动性.例如，讲复变函数的第1章的辐角及其主值时，联想起如今大家都热衷的数码照相机.数码相机照出的照片好看，有立体感.在讲第3章柯西积分公式时，让学生思考如何测得一个球形物体球心的温度：如果球面各点的温度能够知道的话，则可利用柯西积分公式计算出球的中心温度值；当讲解析函数时，指出解析函数在电场的电位和电通的研究中的作用.另一方面，由于复变函数和积分变换是高等数学的后继课程，是高等数学的继续和发展，特别是复变函数的基本概念和定理，比如极限、连续、导数等都与高等数学中的一元函数的相应概念形式一致，而本质不同.因此，在教学过程中，要运用好类比联想法教学，培养学生使用已知知识的能力.例如，复与实极限类比，可导解析类比、结构的类比等.多年的教学实践证明，类比的过程是培养学生创造性思维的过程，通过联想使他们回忆高等数学的重要知识，也对高等数学的知识有了更高层次的认识，并掌握了复变函数与高等数学不一样的地方，激发了他们探索新知识的积极性.

(4)数学思想和应用方法的渗透.课堂讲授，针对相关概念、理论和方法，展示形成过程，挖掘潜在思想本质，提炼应用思想方法，启发拓展思路，介绍相关应用.这对于学生理解、掌握和应用知识是至关重要的，也使学生对该课程的适用性有了新的认识.

(5)第二课堂和实践课的开展.鼓励和指导学生尽可能多地阅读相关课外参考书或文献，将相关专业课的知识融进这门课，并通过数学建模或实践课让学生应用所学知识解决一些简单的实际问题，撰写心得体会或小论文.这对于让学生重视这门课，培养学生学习兴趣，提高自学能力、独立思考和创新应用能力是极其重要的.

(6)优化检测评价机制.过程监控是调整教学、改善效果的唯一依据，教学检测中注重知识和能力两方面检测，利用互联网、校园网由学生网上测试、网上批阅，及时反馈检测结果，以及时调整教学.

0.3　如何学好这门课

复变函数和积分变换是相关专业必修的重要基础理论课程，是信号处理、物理现象解析、工程运用的基本数学工具.因此要学好这门课程，学生在学习过程中需要注意以下几点。

(1)认识课程的重要性.查阅课程相关方面的史料及应用文献，培养浓厚的学习兴趣，充分发挥主观能动性.

(2)掌握类比、联想、总结、概括、推广的学习方法.好的学习方法，对于提高学习效率是至关重要的.通过应用类比、联想的方法，基于充分复习，顺利从回顾高等数学的知识点推广过渡到学习复变函数的相关知识点.做到从对一堂课内容的概括总结到一章内容的概括总结，再从第一节课到即学内容的概括总结；总结知识点之间的联系、常见问题、常用方法及步骤、总结应用思想，做到举一反三、融会贯通.

(3)分清异同，抓住本质.把握复变函数与高等数学的本质区别，掌握复变函数特有的性质、结果和研究方法.学生在学习中，只有勤于思考，善于比较，分清异同，抓住本质，才能加深理解，融会贯通.

(4)重视课前预习和课后演练.复变函数与积分变换具有概念抽象、公式定理繁多的特点，需要学生在课前复习或预习课后多计算、多演练、多实践，以此加深对抽象概念的理解.华罗庚曾经说过：“学数学就是做数学”.

(5)勤思考，多讨论，勤反馈.学生学习中遇到问题是必然的，积极面对问题、及时解决问题是必须的.避免问题日积月累，导致恶性循环，影响更多内容的学习.解决问题的主要途径、程序可概括为：首先是自己独立

尝试解决——针对问题所涉及的知识点,认真阅读课本和参考书的相关内容,努力回顾课堂老师所讲,经过认真思考,尝试寻找解决问题的办法;其次是请教身边学习好的同学,或者和周围同学共同讨论,找到解决问题的思路;最后是及时请教老师,弄清楚所学知识的来龙去脉和应用方法,既及时、很好地解决了问题,还能让老师及时了解学生掌握知识的情况,更好地调整教学策略,达到更好的教学效果.

第一部分　复变函数

第 1 章　复数与复变函数

1.1　内容导教

一、复数的概念、运算及其表示方法

复数的概念、运算及其表示方法是学习复变函数的基础. 教学中要强调以下几点：

(1)借助于复平面与平面直角坐标系的关系，建立复数与平面点的一一对应关系，复数的代数表达式与几何表达式(包括三角表示式、指数表示式)之间的关系及相互转化方法.

(2)注意辐角的多值性、复数乘积和商的辐角公式成立的特殊性.

二、平面图形的复数表示

平面图形(平面曲线或平面区域等)的复数表示(方程或不等式)是复变函数理论的几何基础，也是解决有关几何问题的重要方法，例如，向量的旋转就可以用该向量所表示的复数乘一个模为 1 的复数去实现. 因此，教学中要强调：

(1)平面曲线是平面上点的运动轨迹. 在复平面中，由于平面点与复数一一对应，因此平面曲线可与复数方程一一对应.

(2)平面区域则是由平面曲线所围成的图形，可以用复数不等式来表示.

(3)平面图形的复数表示式与其他表示式(如参数方程、直角坐标式)之间可以相互转化.

三、复变函数的概念

类似于实变函数是“实分析”的研究对象，复变函数是“复分析”的研究对象. 教学中应强调：

(1)复变函数实质：可理解为两个复平面上的点集之间的一种映射.

(2)复变函数与实变函数的异同点：复变函数定义形式与一元实变函数相似，但其实质上对应两个二元实变函数.

四、复变函数的极限与连续

类似于实分析，复变函数的极限是“复分析”研究问题的主要工具，连续是复变函数的重要性质和“复分析”研究问题的桥梁.

(1)应用“类比教学法”，把一元实变函数的极限与连续概念推广得到复变函数的极限和连续.

(2)教学中，要引导学生们注意：形式上，复变函数的极限与连续的定义、运算法则和许多性质都与一元实变函数相同；但实质上，一个复变函数的极限与连续却对应着两个二元实变函数的极限与连续.

1.2 内容导学

1.2.1 内容要点精讲

一、教学基本要求

(1)通过复习,熟练掌握和灵活应用复数的概念、运算及其表示方法,特别注意要正确理解辐角的多值性、复数乘积和商的复角公式成立的特殊性.

(2)了解平面曲线、平面区域等平面图形的概念及其复数表达式.

(3)理解复变函数的定义及其与映射的关系.

(4)理解复变函数极限与连续性的概念及其与实变函数相关概念的异同点.

(5)熟悉复变函数极限存在的充要条件及复变函数连续的充要条件,熟悉复变函数极限的运算法则,掌握复变函数极限存在性的判别方法和极限求法.

二、主要内容精讲

(一)复数及其运算

复数的概念、运算及其表示方法是学习复变函数的基础.

1. 复数与共轭复数的概念

定义 1.1 (复数与共轭复数) $\forall x, y \in \mathbf{R}$,称 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数,而称 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数.其中 i 称为虚数单位,x, y 分别称为 z 的实部和虚部,记作

$$x = \mathrm{Re}\,(z), \quad y = \mathrm{Im}\,(z)$$

[注] (1)$z = \mathrm{i}y$ 称为纯虚数,$z = x = x + 0\mathrm{i}$,则看作实数 x.

(2) 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

两个复数相等,当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

(3)$z = x + \mathrm{i}y = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$.

一个复数等于 0,当且仅当它的实部和虚部都等于 0.

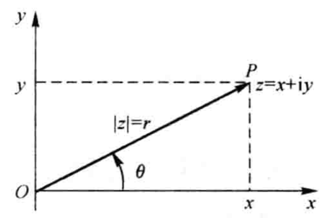


图 1-1

2. 复数的其他表示法

(1) 复平面与扩充复平面:在平面直角坐标系中,当 x 轴表示实轴,y 轴表示虚轴时,则 xOy 面称为复平面;而把包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.xOy 面上的点(x, y) 称为复平面上的点 $z = x + \mathrm{i}y$(见图 1-1).

(2) 复数的几何表示 —— 点与向径:如图 1-1 所示,在复平面上,复数 $z = x + \mathrm{i}y \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面点(x, y) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面向量 $\boldsymbol{OP}$.

(3) 复数的两要素表示 —— 复数的模与辐角(见图 1-1).

复数的模:向量 $\boldsymbol{OP}$ 的长度称为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的模,记作 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.且满足如下三角不等式:

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x| + |y|$$

复数的辐角:当 $z \neq 0$ 时,以正实轴为始边,以 z 对应的向量 $\boldsymbol{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角,记作 $\mathrm{Arg}z = \theta$.

特别地,称 $z \neq 0$ 在$(-\pi, \pi]$ 内的辐角 θ_0 为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\arg z = \theta_0$,且

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y\neq 0 \text{ 时}\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & \text{当 } x<0, y\neq 0 \text{ 时}\\ \pi, & \text{当 } x<0, y=0 \text{ 时}\end{cases}\quad \left(z\neq 0,-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}\right)$$

[注]　1) $\tan(\operatorname{Arg}z)=\tan(\arg z)=\dfrac{y}{x}$.

2) $\forall z\neq 0, \operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

即任何一个复数 $z\neq 0$ 都有无穷多个辐角，且任意两个辐角之差为 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

3) 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部、虚部与其模、辐角的关系为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\text{，　或　} r=\sqrt{x^2+y^2}\text{，}\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

(4) 复数的三角表示：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

(5) 复数的指数表示：$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

例如，复数 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$，由于 $x<0, y<0$，故 z 位于第三象限，则

z 的模为 $$r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{12})^2+(-2)^2}=4$$

z 的辐角为 $$\theta=\operatorname{Arg}z=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$$

z 的三角表达式为 $z=4\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$，$z$ 的指数表达式为 $z=4\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$.

又例如，复数 $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$，由于 $x=\sin\dfrac{\pi}{5}>0, y=\cos\dfrac{\pi}{5}>0$ 位于第一象限，且

$$r=|z|=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}}=1$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10}$$

故 $\theta=\dfrac{3\pi}{10}$(求辐角的一种特殊方法).

因此，z 的三角表达式为 $z=\cos\dfrac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{10}$，$z$ 的指数表达式为 $z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}$.

辐角及其主值的应用实例：数码照相机．数码相机照出的照片好看，有立体感.

(6) 复数的另一几何表示形式——复球面：与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面．其中复球面上南极 S 对应于复平面的原点 $z=0$(二者重合)，北极 N(以过南极 S 且垂直于复平面的直线与球面的交点) 对应于复平面上的"无穷远点"(即模为 $+\infty$ 的点，记作 $z=\infty$)(见图 1-2)，复球面上的其他点与复平面内的其他点一一对应.

[注]　复球面上的点与扩充复平面内的点一一对应.

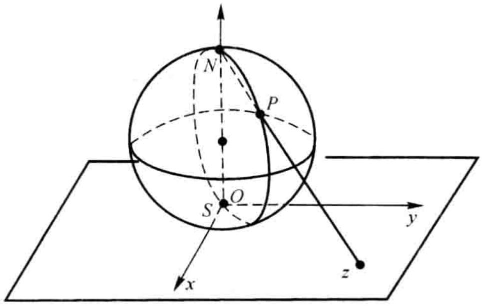


图　1-2

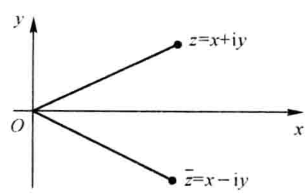


图　1-3

3. 复数的运算

设 $z = x + \mathrm{i}y, z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k) = r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}(k = 1,2)$，则有：

(1) 共轭复数：$\bar{z} = x - \mathrm{i}y \Rightarrow |z| = |\bar{z}|, \arg z = -\arg \bar{z}$（$z$ 不在原点和负实轴上）

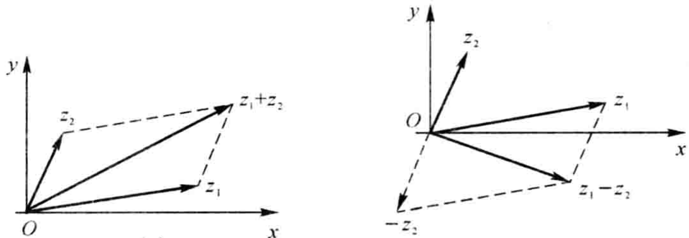
可见，一对共轭复数 z 与 $\bar{z}$ 在复平面上的位置是关于实轴对称的(见图 1-3).

(2) 加减法：$z_1 \pm z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \xlongequal{\Delta}$

$$r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \left(r = \sqrt{(x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2},\quad \theta = \arctan\frac{y_1 \pm y_2}{x_1 \pm x_2}\right)$$

两个复数的加、减法在复平面上与向量的加、减法一致(见图 1-4)，且满足三角不等式(见图 1-5)：

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$$



(a) (b)

图 1-4

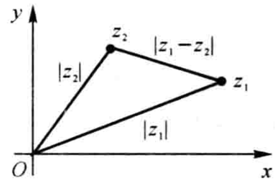


图 1-5

(3) 乘积(见图 1-6)：$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2) =$

$$r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 \end{cases}$$

定理 1.1 （复数的乘积） 两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角之和.

[注] 由于辐角的多值性，上述辐角之间的等式两端都是由无穷多个数构成的两个数集，等式的实质是：等式两端可能取的值的全体是相同的. 也就是说，对于左端的任一值，右端必有一值和它相等，并且反过来也一样.

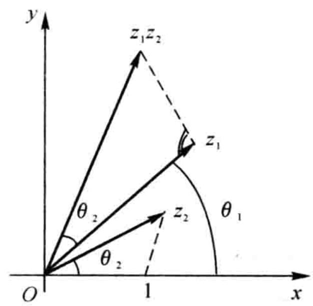


图 1-6

(4) 商：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \dfrac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} =$

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2 \end{cases}$$

定理 1.2 （复数的商） 两个复数的商的模等于它们模的商；两个复数的商的辐角等于被除数和除数的辐角之差.

(5) 乘幂：$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n个} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \Rightarrow$

$$\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}z \\ (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \quad \text{（棣莫弗(De Moivre)公式）} \end{cases}$$

$$z^{-n} \xlongequal{\Delta} \frac{1}{z^n} = r^{-n}(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta) = r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

(6) 方根：$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

事实上，设 $w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$w=\sqrt[n]{z}\Rightarrow w^n = z \Rightarrow \begin{cases}\rho^n = r\\ \cos n\varphi = \cos\theta\\ \sin n\varphi = \sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ n\varphi = \theta+2k\pi(k=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

因此，$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

[注]　由于正、余弦函数的周期性，当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 $w=\sqrt[n]{z}$ 的 n 个相异的根；当 k 取其他整数时，这些根又重复出现. 在几何上，$w=\sqrt[n]{z}$ 的 n 个相异的根正好是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

运算规律：

交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1z_2=z_2z_1$；

结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$；

分配律：$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$；

共轭运算律：$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，　$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，

$$\bar{\bar{z}}=z,\ z\bar{z}=[\mathrm{Re}\,(z)]^2+[\mathrm{Im}\,(z)]^2=x^2+y^2=|z|^2,$$
$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,(z)=2x,\quad z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,(z)=2\mathrm{i}y.$$

[注]　复数的加、减法运算一般用代数表示法；乘、除法及开方运算一般用三角表示式或指数表示式.

4. 平面曲线及其复数表示

在复平面中，由于平面点与复数一一对应，因而平面曲线可与复数形式的方程一一对应.

设平面曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

则 C 的复数形式方程为 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$（$t$ 为参数）.

当 $x(t)$，$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续时，称 C 为平面上的一条连续曲线；

当 $x'(t)$，$y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时，则 C 称为光滑曲线；由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.

没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当(Jardan)曲线(即简单曲线自身不会相交).

而称起点与终点重合的简单曲线 C 为简单闭曲线(简单闭曲线把整个复平面唯一地分成3个互不相交的点集：C，C 的内部及 C 的外部.

如图1-7所示，设 C：$z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 为一连续曲线，$z(a)$，$z(b)$ 分别是 C 的起点和终点.

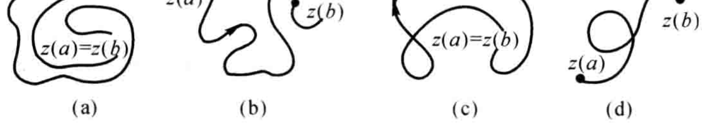


图　1-7

(a) 简单，闭；(b) 简单，不闭；(c) 不简单，闭；(d) 不简单，不闭