数学分析在初等数学中的运用与例题选讲

王见勇　编著

苏州大学出版社
Soochow University Press

数学分析在初等数学中的运用与例题选讲

王见勇　编著

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析在初等数学中的运用与例题选讲/王见勇编著. —苏州：苏州大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5672-1020-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… Ⅲ.①数学分析-应用-初等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 008971 号

数学分析在初等数学中的运用与例题选讲

王见勇 编著

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市十梓街 1 号 邮编:215006)

苏州恒久印务有限公司印装

(地址:苏州市友新路 28 号东侧 邮编:215128)

开本 880×1230 1/32 印张 6 字数 165 千

2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5672-1020-2 定价:26.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020

苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言
PREFACE

近年来，在教育面向世界、面向未来的大背景下，原本属于大学数学分析课程的极限、导数与积分等内容，以比较直观与降低要求的面目出现在了新课标与某些中学课堂上，在高考试题中也多有体现.

笔者在总结多年中师与大学师范数学教学经验的基础上，编著了本书，专门讲述数学分析的理论与方法在初等数学中的运用. 本书共分极限、导数与微分、积分与级数四章. 每一章的内容包括基本理论、方法及其在初等数学中如何使用的例子，用数学分析的基本理论解释中学教材中某些用初等数学知识无法讲透的内容. 例如，推导中学数学公式，解释中学数学用表的制作原理等. 本书对基本理论的选取以在中小学数学中有比较直接的应用为原则，定理能证则证，不证的给予说明，相对自成体系. 由于笔者的目标是引导数学师范生与中小学数学教师从数学分析的高度把握初等数学，所以例子成了本书的重要组成部分. 全书选用例子 120 多个，绝大多数取自中小学数学教材与相关资料. 分章来看，第一章对实数理论，第二章对函数凹凸性与不等式理论，第三章对中学数学公式的推导，第四章对中学数学用表的编制原理等分别给予了重点关注.

本书可以作为师范院校数学专业的专科、本科、研究生教材以及中小学数学教师培训教材或参考书，也可以作为中学生的课外读物. 对于师范专业本、专科生来说，教师可以在讲完数学分析后单独开课，也可以在讲授数学分析的同时插入本书的相关章节.

本书在选题与写作过程中得到了钱国华教授的大力支持与鼓励，书中采用了闫萍老师提供的许多例子与建议，特此致谢. 有些例子选自他人的论文，由于分布较分散，并未在参考文献中一一列出，特此一并致谢. 初次尝试，材料选取与体系安排很难把握，书中难免存在一些缺点甚至错误，诚请专家与读者不吝指正.

王见勇

2015 年 1 月于苏州常熟

目录
CONTENTS

第一章
极限理论及其应用

能否正确理解极限的定义，利用定义证明一些简单极限，并会使用极限方法解决一些简单问题，是体现一个人数学功底的重要标志.虽然中学只要求学生能用“无限趋近”的定性描述初步了解极限的含义，会凭直观计算一些简单数列与函数的极限，但是对于教师来说，只有深刻理解极限的定义，并会使用定义证明一些简单极限，才能深入浅出地讲解极限的概念、性质，引领学生初步构建极限的思维与方法体系.为了揭示极限的本质属性，有别于通常教材中使用的不等式语言，本章第一节利用邻域语言给出各种极限的统一定义，这样对极限的刻画变得直观、简洁、容易掌握.本章第二至四节介绍极限理论在实数表示方面的应用，第五节介绍极限思想在初等数学解题中的应用.

§1.1　极限的统一定义

极限描述当自变量按照某种方式趋近某数(可以是无穷)时函数值的变化趋势.由于自变量与函数值的变化情况多种多样，按照传统的不等式方法，不同情况的极限需用不同格式来定义，这就使得极限定义纷繁复杂，初学者望而生畏，难以驾驭.但是只要仔细观察，不难发现各种极限所具有的共性与相通的灵魂，如果采用邻域方法，便可

给出各种极限的统一定义.

定义 1.1(极限的统一定义)　设 a,b 是两个广义实数(即可以是(正、负)无穷),函数 $f(x)$ 在点 a 附近(某去心邻域内)有定义.若对于任意给定的($\forall$)b 的邻域 $V(b)$,存在($\exists$)a 的邻域 $U(a)$,使当 $x\in \mathring{U}(a)$(去心邻域)时总有 $f(x)\in V(b)$,则称**当 x 趋于 a 时 $f(x)$ 以 b 为极限**,记为

$$\lim_{x\to a}f(x)=b \tag{1.1}$$

或

$$f(x)\to b(x\to a). \tag{1.2}$$

当极限 b 存在且有限时,称 $f(x)$**当 x 趋于 a 时收敛(到 b)**;否则,称 $f(x)$**当 x 趋于 a 时发散.**

在定义 1.1 中,自变量 x 所趋近的 a 有六种情况:有限数 x_0,x_0^-(x_0 左),x_0^+(x_0 右),∞,$+\infty$,$-\infty$;函数 $f(x)$趋近的极限 b 有四种情况:有限数 A,∞,$+\infty$,$-\infty$.这就是说,定义 1.1 包含了传统教材中的 24 种不同形式的函数极限.若再考虑到数列 $x_n=f(n)$的自变量只有 $n\to\infty$一种变化方式,用邻域语言给出的统一定义 1.1 涵盖了传统意义下用不等式语言给出的全部 28 种不同形式的极限[1~3].现在只要掌握了有限数 x_0(或 A),x_0^-,x_0^+ 与无穷大∞,$+\infty$,$-\infty$的邻域的六种不同表现形式,则统一定义 1.1 立即就可翻译成传统意义下的 28 种不同极限的定义.

我们将这种既简洁又能发掘系列事物共同本质的教学法称为“系统教学法”.使用“系统教学法”常能帮助我们收到事半功倍的教学效果.

下面使用不等式与区间方法,分别给出六种邻域的不同表现形式(其中 $\delta>0,M>0$):

(1) 有限数 x_0(或 A)的邻域为

$$U(x_0,\delta)=\{x\in\mathbf{R}:|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

相应的去心邻域为

$$\begin{aligned}\mathring{U}(x_0,\delta)&=U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}\\&=\{x\in\mathbf{R}:0<|x-x_0|<\delta\}\\&=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta);\end{aligned}$$

(2) x_0 的左邻域(或 x_0^- 的邻域)为

$$\begin{aligned}U(x_0^-,\delta)&=\{x\in\mathbf{R}:|x-x_0|<\delta,x<x_0\}\\&=\{x\in\mathbf{R}:x_0-\delta<x<x_0\}=(x_0-\delta,x_0);\end{aligned}$$

(3) x_0 的右邻域(或 x_0^+ 的邻域)为

$$\begin{aligned}U(x_0^+,\delta)&=\{x\in\mathbf{R}:|x-x_0|<\delta,x>x_0\}\\&=\{x\in\mathbf{R}:x_0<x<x_0+\delta\}=(x_0,x_0+\delta);\end{aligned}$$

(4) ∞的邻域为

$$\begin{aligned}U(\infty,M)&=\{x\in\mathbf{R}:|x|>M\}\\&=\{x\in\mathbf{R}:x<-M\text{ 或 }x>M\}\\&=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty);\end{aligned}$$

(5) $-\infty$的邻域为

$$U(-\infty,M)=\{x\in\mathbf{R}:x<-M\}=(-\infty,-M);$$

(6) $+\infty$的邻域为

$$U(+\infty,M)=\{x\in\mathbf{R}:x>M\}=(M,+\infty).$$

除有限点 x_0 的邻域与去心邻域不同外,其他五种情况的邻域与去心邻域一致. 邻域既可用不等式刻画,也可用区间刻画. 由于不等式具有较好的运算性质,极限的传统定义顺理成章地采用了不等式语言描述. 利用六种邻域的不等式形式,可将统一定义 1.1 翻译为传统意义下的 28 种不同极限,下面只举六种为例:

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\in\mathbf{R}$ 的定义是:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$;

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$的定义是:

$\forall M>0,\exists\delta>0$,使当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,$f(x)<-M$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\in\mathbf{R}$ 的定义是:

$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,使当 $x<-M$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$;

(Ⅳ) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\in\mathbf{R}$ 的定义是:

$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,使当 $|x|>M$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$;

(Ⅴ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\in\mathbf{R}$ 的定义是:

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $n>N$ 时,$|x_n-A|<\varepsilon$;

(Ⅵ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$的定义是:

$\forall M>0,\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $n>N$ 时,$|x_n|>M$.

为了理解极限的本质,利用统一定义 1.1 给出的邻域刻画比较简洁、直观,但要证明一个极限,则用由不等式刻画的传统定义比较方便.这时极限的证明就转化为从目标不等式出发的解不等式问题,而解不等式则是我们熟悉的操作.例如,要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\in\mathbf{R}$,就是对于任意给定的一个 $\varepsilon>0$,从目标 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发,通过解此不等式,找出一个适当的 $\delta>0$,使当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.以下是取自中学教材与复习资料的几个例子[11].

例 1.1 证明:

(1) 当 $|a|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$;

(2) 当 $a=1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$;

(3) 当 $|a|>1$ 或 $a=-1$ 时,数列 $\{a^n\}$ 发散.

证明 (1) 分析 对于任意给定的小于 1 的正数 $\varepsilon>0$,不等式 $|a^n-0|<\varepsilon$ 等价于 $|a|^n<\varepsilon$,两边取对数得 $n\ln|a|<\ln\varepsilon$.由 $|a|<1$ 可知 $\ln|a|<0$,故不等式的解为 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}(>0)$.

证明 当 $|a|<1$ 时,对于任意给定的小于 1 的正数 $\varepsilon>0$,取自然数 $N>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$,则当 $n>N$ 时,$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$.由以上分析可知这时不等式 $|a^n-0|<\varepsilon$ 恒成立,故由定义(Ⅴ)可知,当 $|a|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

(2) 当 $a=1$ 时,$\{a^n\}=\{1,1,\cdots,1,\cdots\}$是由 1 构成的常数列,故

由定义(V)可知

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 1.$$

(3) 当$|a|>1$时,随着n的增大,$|a^n|$越来越大,故$\{a^n\}$发散;当$a=-1$时,数列$\{a^n\}=\{-1,1,\cdots,-1,1,\cdots\}$的元在$-1$与$+1$间来回跳动,这时$\{a^n\}$也发散. □

例 1.2　证明$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

分析　对于任意给定的$\varepsilon>0$,当$x\neq1$时,

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|\frac{(x-1)^2}{x-1}\right|=|x-1|,$$

故不等式$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$等价于$|x-1|<\varepsilon$.

证明　对于任意给定的$\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon$,则当$0<|x-1|<\delta$时$x\neq1$,且$|x-1|<\varepsilon$.由以上分析可知这时$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$总成立,故由定义(Ⅰ)可知

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$ □

例 1.3　证明$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

分析　对于任意给定的$\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{1}{x^2}-0\right|=\frac{1}{x^2}<\varepsilon,$$

只要不等式$|x|>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$成立.

证明　对于任意给定的$\varepsilon>0$,取定正数$M=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,则当$x<-M$时由$|x|>M=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$与以上分析可知$\left|\dfrac{1}{x^2}-0\right|=\dfrac{1}{x^2}<\varepsilon$总成立,故由定义(Ⅲ)可知

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0. \qquad \square$$

当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$时,称函数 $f(x)$**在** x_0 **点连续**;当 $f(x)$在区间 I 上(内)每一点都连续时,称 $f(x)$**在** I **上(内)连续**. 在有界闭区间上连续的函数具有许多非常好的性质,详细内容可以参看文献[1~3]等.

§1.2　用极限方法将无限循环小数化成分数

数学的发展水平是人类文明与进步程度的重要指标,而数的范围的扩充是数学发展的一个又一个里程碑. 我们默认读者已经熟悉自然数、整数、分数与小数的概念与运算等[7,13]. 分数容易理解,小数方便运算,二者各有所长. 本节讨论分数与小数的互化问题,特别是如何用极限方法将无限循环小数化成分数. 本节的"分数"特指分子、分母均是整数的分数,分母自然不能为 0. 我们将正无限循环小数

$$a.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}\cdots$$

用

$$a.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}\overline{q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}}$$

表示,负无限循环小数

$$-a.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}\cdots$$

用

$$-a.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}\overline{q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}}$$

表示,其中 a 是十进制非负整数,q_i 是取自 0,1,2,…,9 的十进制整数. 以下涉及的整数或小数均指十进制数,不再每次声明.

对于 0,1 之间的既约分数$\frac{a}{b}$,用长除法可以将其表示成小数

$$\frac{a}{b}=0.q_1q_2q_3\cdots,$$

其中 q_i 是取自 0,1,2,…,9 的整数. 设求得第 i 步商数字 q_i 时的余数是 r_i,如果记 $q_0=0$,$r_0=a$,那么

$$a=bq_0+r_0,10r_{i-1}=bq_i+r_i,0\leqslant r_i<b(i=1,2,\cdots),$$

其中 r_i 是某个满足条件的非负整数. 当第一个为 0 的余数是 r_i 时,$\frac{a}{b}$可以表示成有限小数

$$\frac{a}{b}=0.q_1q_2\cdots q_i. \tag{1.3}$$

当余数列$\{r_i\}$恒不为 0 时,由 $0\leqslant r_i<b$ 或 r_i 是不超过 b 的正整数可知,正整数列$\{r_i\}$中至少有两项相等. 于是存在最小下标 τ 与自然数 s 使 $r_\tau=r_{\tau+s}$,并且(当 $s>1$ 时)$r_\tau,r_{\tau+1},r_{\tau+2},\cdots,r_{\tau+s-1}$互不相等. 由

$$10r_\tau=bq_{\tau+1}+r_{\tau+1},10r_{\tau+s}=bq_{\tau+s+1}+r_{\tau+s+1}$$

可知

$$b(q_{\tau+1}-q_{\tau+s+1})=r_{\tau+s+1}-r_{\tau+1}.$$

于是,若 $r_{\tau+s+1}-r_{\tau+1}\neq0$,则$|r_{\tau+s+1}-r_{\tau+1}|\geqslant b$,这与 $0\leqslant r_{\tau+1}<b$,$0\leqslant r_{\tau+s+1}<b$ 的假设矛盾. 因此 $q_{\tau+1}=q_{\tau+s+1}$,$r_{\tau+1}=r_{\tau+s+1}$. 依此类推可以得到 $q_{\tau+2}=q_{\tau+s+2}$,$r_{\tau+2}=r_{\tau+s+2}$等,最后得到 $q_{\tau+s}=q_{\tau+2s}$,$r_{\tau+s}=r_{\tau+2s}$. 再由后者出发,可以得到一个新的循环,最后得到$\frac{a}{b}$的无限循环小数的表示:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=0.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}\cdots\\&=0.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}\overline{q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

对于大于 1 的分数$\frac{a}{b}$,可以通过将其先写成一个自然数 m 与 0,1 之间分数之和的办法,将其表示成有限小数

$$\frac{a}{b}=m.q_1q_2\cdots q_i \tag{1.5}$$

或无限循环小数

$$\frac{a}{b}=m.q_1q_2\cdots q_{\tau-1}\overline{q_\tau q_{\tau+1}\cdots q_{\tau+s}}. \tag{1.6}$$

对于负分数，只需在表达式(1.3)～(1.6)前增加负号即可. 例如，通过长除法可以得到以下三个分数的小数表示：

$$\frac{1}{4}=0.25,$$

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\overline{3},$$

$$\frac{323}{308}=1.04870129870129\cdots=1.04\overline{870129},$$

$$-\frac{323}{308}=-1.04870129870129\cdots=-1.04\overline{870129}.$$

反过来，对于有限小数 $m.q_1q_2\cdots q_i$，可先将其写成

$$m.q_1q_2\cdots q_i=m+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\cdots+\frac{q_i}{10^i}, \tag{1.7}$$

再通过分数加法运算与约分化简便可得其分数表示. 例如，

$$0.018=\frac{1}{10^2}+\frac{8}{10^3}=\frac{18}{1000}=\frac{9}{500}.$$

但是要将一个无限循环小数表示成一个分数却颇费周折，只有动用数列极限工具才能完成. 下面我们将通过三个例子来解决这种表达问题.

例 1.4 将正无限循环小数

$$x=a.\overline{k_1k_2\cdots k_m}$$

用分数表示，其中 $a\geqslant 0$ 是整数，$k_i(i=1,2,\cdots,m)$是取自 $0,1,\cdots,9$ 的整数，$k_m\neq 0$.

解 令整数

$$c=k_1 10^{m-1}+k_2 10^{m-2}+\cdots+k_m,$$

即 c 就是 10 进制整数 $k_1k_2\cdots k_m$. 由定义可知

$$x=a+c\cdot 10^{-m}+c\cdot 10^{-2m}+\cdots+c\cdot 10^{-nm}+\cdots,$$

其小数部分是等比数列$\{c\cdot(10^{-m})^n\}_{n=1}^{+\infty}$的部分和的极限. 由于部分和为

$$S_n=c\cdot 10^{-m}+c\cdot 10^{-2m}+\cdots+c\cdot 10^{-nm}$$
$$=\frac{c\cdot 10^{-m}-c\cdot(10^{-m})^{n+1}}{1-10^{-m}},$$

于是由$0<10^{-m}<1$与例1.1可知以上的部分和有极限

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{c\cdot 10^{-m}-c\cdot(10^{-m})^{n+1}}{1-10^{-m}}=\frac{c\cdot 10^{-m}}{1-10^{-m}}=\frac{c}{10^m-1}.$$

于是得到无限循环小数x的分数表示

$$x=a+\frac{c}{10^m-1}=\frac{c-a+a\cdot 10^m}{10^m-1}, \tag{1.8}$$

其中分子与分母均是整数.

例如,由公式(1.8)立即得到

$$3.578578\cdots=3.\overline{578}=\frac{578-3+3\cdot 10^3}{10^3-1}=\frac{3575}{999}.$$

例 1.5　将正无限循环小数

$$x=a.b_1\cdots b_n\overline{k_1k_2\cdots k_m}$$

用分数表示,其中$a\geqslant 0$是整数,b_i,k_j是取自$0,1,\cdots,9$的整数,$k_m\neq 0$.

解　现在对正整数

$$b=a\cdot 10^n+b_1\cdot 10^{n-1}+\cdots+b_n,$$

小数

$$10^n x=b.\overline{k_1k_2\cdots k_m}$$

是例1.4中讨论过的正无限循环小数. 由公式(1.8)可知对于整数

$$c=k_1 10^{m-1}+k_2 10^{m-2}+\cdots+k_m,$$

有

$$10^n x=\frac{c-b+b\cdot 10^m}{10^m-1},$$

从而

$$x=\frac{c-b+b\cdot 10^m}{10^n\cdot(10^m-1)}. \tag{1.9}$$

例如,对于正循环小数

$$x=3.30578578\cdots=3.30\overline{578},$$

由公式(1.8)可知

$$10^2x=330.\overline{578}=\frac{578-330+330\cdot 10^3}{10^3-1},$$

从而

$$x=3.30\overline{578}=\frac{578-330+330\cdot 10^3}{10^2\cdot(10^3-1)}.$$

也可由公式(1.9),利用 $b=330,c=578$ 直接得到

$$x=3.30\overline{578}=\frac{c-b+b\cdot 10^m}{10^n\cdot(10^m-1)}$$
$$=\frac{578-330+330\cdot 10^3}{10^2\cdot(10^3-1)}=\frac{330248}{99900}=\frac{82562}{24975}.$$

例 1.6 对于负无限循环小数

$$x=-a.b_1\cdots b_n\overline{k_1k_2\cdots k_m}(n\geqslant 0,m\geqslant 1),$$

其中 a 是非负整数,b_i,k_j 是取自 $0,1,\cdots,9$ 的整数,$k_m\neq 0$,由公式(1.9)得到

$$-x=a.b_1\cdots b_n\overline{k_1k_2\cdots k_m}=\frac{c-b+b\cdot 10^m}{10^n\cdot(10^m-1)},$$

其中正整数

$$b=a\cdot 10^n+b_1\cdot 10^{n-1}+\cdots+b_n,$$
$$c=k_1\cdot 10^{m-1}+k_2\cdot 10^{m-2}+\cdots+k_m.$$

从而

$$x=-\frac{c-b+b\cdot 10^m}{10^n\cdot(10^m-1)}. \tag{1.10}$$

例如,

$$-3.102\overline{23}=-\frac{23-3102+3102\cdot 10^2}{10^3\cdot(10^2-1)}=-\frac{307121}{99000}.$$