

微积分

导读

W E I J I F E N D A O D U

李湘云 著 ●



WEIJIFEN DAODU

WEIJIFEN DAODU

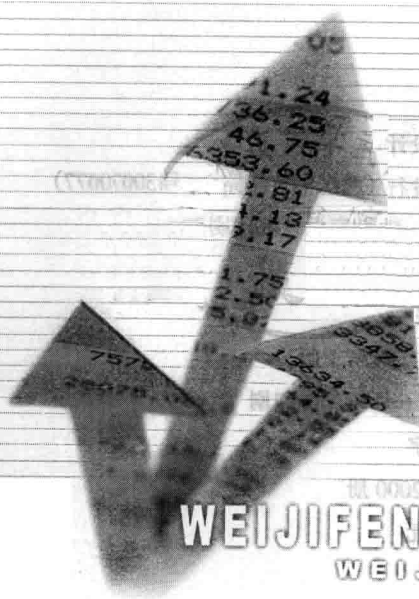
崇文书局

微积分

导读

WEIJIFEN DAODU

李湘云 著 ●



WEIJIFEN DAODU

WEIJIFEN DAODU

崇文书局

(鄂) 新登字 07 号

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分导读/李湘云著.

- 武汉: 崇文书局, 2003

ISBN7-5403-0661-0

I. 微… II. 李… III. 微积分 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 070102 号

责任编辑: 蔡夏初

封面设计: 戴旻

出版发行: 崇文书局 (武汉市黄陂路 75 号 430077)

印 刷: 湖北省林业勘察设计院印刷厂

开 本: 850×1168 1/32

印 张: 12.625

版 次: 2003 年 6 月第 1 版

印 次: 2003 年 6 月第 1 次印刷

字 数: 328 千字

印 数: 0001-2000 册

定 价: 18.00 元

前 言

微积分是高等数学的重要组成部分,也是广大学生学习相关课程,尤其是当前较为热门的经济和管理类课程,以及其他学科领域中进行理论学习和实践的基础。为帮助广大学生及数学爱好者更好地学习这门课,根据目前各级各类高等学校基础数学课程中微积分教学大纲的要求,作者以二十多年的微积分教学心得为蓝本,撰写了本书。

《微积分导读》由基本概念学习与理解、思考问题常用方法和有关定理证明三部分组成。它可供高等学校各层次的大学生(专科、电大、函大、高等教育自修考试、专升本、本科)学习《微积分》时使用,也可作为报考硕士研究生的读者复习高等数学微积分部分的学习指导。

本书的出版得力于崇文书局的大力支持,武汉部分高校的同行们对本书提出了十分精到的意见,在此统诚致谢!

由于著者学识所限,书中的疏漏、错误之处实所避免,恳请读者方家不吝赐教,以便再版时修正。

李 湘 云

二零零三年五月

目 录

第一部分 基本概念学习与理解

§ 1.1 函数

一、函数的定义、定义域及基本要素	(1)
1. 函数的定义	(1)
2. 函数定义域的确定	(2)
3. 确定一个函数的基本要素	(3)
二、任何周期函数都有最小正周期吗?	(3)
三、任何两个奇函数之积仍为奇函数吗?	(4)
四、函数 $y = f(x)$ 与其反函数相同的条件	(4)
五、任何两个函数不一定可以复合成复合函数	(5)
六、初等函数与非初等函数;代数函数与超越函数	(6)
1. 初等函数与非初等函数	(6)
2. 代数函数与超越函数	(6)

§ 1.2 极限

一、极限的分析定义	(7)
1. 数列的概念	(7)
2. 怎样理解数列极限的分析定义	(7)
3. 怎样理解函数极限的分析定义	(8)
4. 函数极限与数列极限的联系	(9)
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 能同时成立吗?	(10)
二、无穷小量与无穷大量	(12)
1. 怎样理解无穷小量与无穷大量的概念?	(12)

2. 数列 x_n 与无穷小量的关系 (12)
3. 数列的敛散性与无穷小量、无穷大量的关系 (13)
4. 有界变量不一定是无穷小量, 无界变量不一定是无穷大量
..... (14)
5. 无穷个无穷小量的和不一定是无穷小量 (15)
6. 无穷个无穷小量的积不一定是无穷小量 (16)
7. 两个非无穷小量的和或积一定不是无穷小量吗?
..... (17)
8. 两个无穷小量的商不一定是无穷小量 (17)
9. 两个无穷大量的和不一定是无穷大量 (18)
10. 两个非无穷大量的积一定不是无穷大量吗? (19)
11. 无穷小量与无穷大量的积不一定是无穷小量 (19)
12. 两个无穷大量的商不一定是无穷大量 (20)
13. 正确理解无穷小量的阶 (21)
14. 任何两个无穷小量都可以比较吗? (22)
15. 无穷小量的等价替换 (23)
16. 如何理解无穷小量的主部 (24)

三、有界、无界数列的收敛与发散 (25)

1. 有界的数列不一定收敛, 但无界的数列一定发散 ... (25)
2. 单调的数列一定收敛吗? 收敛的数列一定单调吗?
..... (26)

四、两个重要极限 (27)

1. 两个极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 的重要性
..... (27)
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 的极限值 e 为什么是无理数 2.718281...?
..... (27)

§ 1.3 函数的连续性

一、正确理解函数的连续与间断…………… (29)

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义的几种形式…………… (29)
2. 怎样判断函数在给定点处的连续与间断? …………… (30)
3. 存在在每个无理点处都连续,而在每个有理点处都不连续的函数吗? …………… (30)
4. 如果对任意正数 ϵ , 函数 $f(x)$ 在 $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ 上都连续, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内、在 $[a, b]$ 上一定连续吗? …………… (31)
5. 开区间内的连续函数不一定有最大值和最小值…………… (32)
6. 如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内一定有根吗?…………… (32)

二、函数的一致连续性与连续性…………… (33)

1. 函数在区间内的一致连续性与连续性的区别与联系…………… (33)
2. 开区间内的连续函数不一定一致连续…………… (33)
3. 如果 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, $f(a^+)$ 及 $f(b^-)$ 都存在且有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定一致连续吗?…………… (34)

三、函数连续性的运算性质…………… (35)

1. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处都间断, 则 $f(x) + g(x)$ 和 $f(x) \cdot g(x)$ 在点 x_0 处一定间断吗?…………… (35)
2. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(x)$ 在点 x_0 处间断, 则 $f(x) + g(x)$ 和 $f(x) \cdot g(x)$ 在点 x_0 处的连续性又如何?…………… (35)
3. 间断函数平方后仍为间断函数吗?…………… (36)

四、复合函数的连续性…………… (36)

1. 设 $g(x)$ 在点 x_0 处间断, $g(x_0) = u_0$, $f(u)$ 在点 u_0 处连续, 则复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处一定间断吗?…………… (36)
2. 设 $g(x)$ 在点 x_0 处间断, $g(x_0) = u_0$, $f(u)$ 在点 u_0 处间

断,则复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处一定间断吗? (37)

3. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 且极限 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 一定成立吗? (38)

4. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 且在点 x_0 的邻域内 $g(x) \neq u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 一定成立吗? (39)

5. 设 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(x_0) = u_0$, 极限 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]$ 一定成立吗? (40)

6. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $f(u)$ 在点 u_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]$ (41)

五、初等函数的连续性 (42)

§ 1.4 导数与微分

一、导数的概念、可导与连续的关系 (42)

1. 可导与连续的关系 (42)

2. 函数的导函数不一定连续 (44)

3. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$? (44)

4. 如果导函数有间断点, 则是第几类间断点呢? (46)

5. 如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 但无界, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 内亦无界 (47)

6. 如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 与 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$ 不能互推 (47)

7. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内可导, 由极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 的存在不一定能推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 的存在, 反之亦然 (49)

二、导数运算性质..... (49)

1. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处都不可导, 则 $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ 在点 x_0 处一定不可导吗? (49)

2. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, $g(x)$ 在点 x_0 处不可导, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在点 x_0 处一定不可导吗? (50)

三、复合函数导数..... (50)

1. 设 $g(x)$ 在点 x_0 处不可导, $u_0 = g(x_0)$, $f(u)$ 在点 u_0 处可导, 则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处一定不可导吗? (50)

2. 设 $g(x)$ 在点 x_0 处可导, $u_0 = g(x_0)$, $f(u)$ 在点 u_0 处不可导, 则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处可导吗? (50)

3. 设 $g(x)$ 在点 x_0 处不可导, $u_0 = g(x_0)$, $f(u)$ 在点 u_0 处也不可导, 则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 处可导吗? (51)

4. 如何求复合函数的导数? (51)

四、高阶导数与微分..... (52)

1. 高阶导数的求法 (52)

2. 为什么说, 函数的微分是函数增量的线性主部? ... (54)

3. 为什么自变量的微分等于自变量的增量? (55)

§ 1.5 中值定理与导数的应用

一、中值定理..... (55)

1. 当罗尔定理的条件不满足时, 定理的结论不一定成立 (55)

2. 当拉格朗日中值定理的条件不满足时, 定理的结论不一定成立 (57)

3. 当柯西中值定理的条件不满足时, 定理的结论不一定成立 (58)

二、罗必塔法则的灵活运用..... (59)

1. 任何“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式都可以用罗必塔法则求极限吗?	(59)
2. 任何“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式都可以用罗必塔法则求极限吗?	(60)
3. 可用罗必塔法则求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 吗?	(60)
4. 可用罗必塔法则证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 吗?	(61)
5. 可否直接用罗必塔法则求数列的极限?	(61)
三、导数的应用之一——函数的单调性	(63)
1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 如果 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的有限个点或无穷多个离散点处为零, 在其余各点处均为正, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定单调增加吗?	(63)
2. 由 $f'(x_0) > 0$, 可判定 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内单调增加吗?	(64)
3. 单调函数的导函数一定单调吗?	(65)
四、导数的应用之二——极值性	(65)
1. 函数的极值与最值的区别与联系	(65)
2. 函数的驻点不一定是极值点	(66)
3. 函数在不可导点处不一定有极值	(66)
4. 当函数在驻点处的二阶导数等于零时, 如何判断函数在该驻点处的极值情况?	(66)
5. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极大值, 能否肯定: $f(x)$ 在点 x_0 的某充分小的邻域内, 在点 x_0 的左侧单调增加, 而在右侧单调减少?	(67)
五、导数的应用之三——导数在经济问题中的应用	(68)
1. 边际函数	(68)

2. 函数的弹性	(72)
3. 需求弹性	(78)
4. 需求弹性对总收益的变化	(83)
5. 经济批量的求法	(90)

§ 1.6 不定积分

一、不定积分的概念	(97)
1. 怎样理解原函数的概念?	(97)
2. 一切初等函数都有原函数吗?	(98)
3. 怎样理解不定积分的概念?	(99)
4. 同一个被积函数的不定积分可以有不同的表达式吗?	(100)
5. 初等函数的不定积分都可以表示成有限形式吗?	(102)
二、正确运用不定积分的换元法和分部积分法	(102)
1. 如何使用第一类换元法求不定积分?	(102)
2. 如何使用第二类换元法求不定积分?	(105)
3. 如何使用分部积分法求不定积分?	(107)
三、有(无)理式不定积分的巧妙运用	(109)
1. 如何求有理函数的不定积分	(109)
2. 如何求三角函数的有理式的不定积分?	(110)
3. 如何求形如 $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 的无理函数的不定积分?	(113)

§ 1.7 定积分及其应用

一、定积分的概念	(115)
1. 怎样理解定积分的定义	(115)
2. 如何根据定积分的定义求定积分的值	(118)

二、微积分基本定理、牛顿——莱布尼兹公式…………… (120)

1. 已知 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 可用牛顿——莱布尼兹公式证明 $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx (b > a)$ 吗? …………… (120)

2. 可根据 $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx (b > a)$ 来证明 $\int_a^a f(x) dx = 0$ 吗? …………… (121)

3. 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有原函数时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积 …………… (121)

4. 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一定具有原函数…………… (122)

5. $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一定可积…………… (122)

6. 如何正确使用牛顿——莱布尼兹公式? …………… (123)

三、定积分的计算及其应用…………… (124)

1. 如何正确使用定积分的换元公式? …………… (124)

2. 定积分的应用——元素法…………… (125)

§ 1.8 级数

一、级数的概念…………… (128)

1. 怎样理解无穷级数及其和的概念? …………… (128)

2. 级数的敛散性与数列的敛散性的联系…………… (129)

3. 一般项趋于零的级数一定收敛吗? …………… (130)

二、正项级数…………… (131)

1. 正项级数的比值判别法可能失效吗? …………… (131)

2. 正项级数的根值判别法可能失效吗? …………… (133)

3. 在正项级数的积分判别法中, 函数 $f(x)$ 的单调性这个条件不可省略…………… (134)

4. 正项级数的敛散性判别法不可直接应用于任意项级数 …	(135)
三、交错级数 …	(136)
1. 在交错级数的莱布尼兹判别法中, 数列 u_n 的单调性这个条件不可省略 …	(136)
四、绝对收敛 …	(137)
1. 级数的绝对收敛和收敛的区别与联系 …	(137)
2. 级数的绝对收敛性在级数理论中所起的作用 …	(138)
3. 一致收敛的函数项级数一定收敛吗? 一定绝对收敛吗? …	(140)
4. 函数项级数的一致收敛性在级数理论中起什么作用? …	(142)
五、幂级数 …	(144)
1. 幂级数的收敛域有何特点? …	(144)
2. 当两个幂级数的收敛半径相等时, 它们的收敛区间不一定相同 …	(146)
3. 当幂级数逐项微分或逐项积分后所得幂级数的收敛区间有可能会发生变化 …	(146)
4. 在点 $x = 0$ 的邻域内具有各阶导数的任何函数都可以展开为 x 的幂级数吗? …	(147)
5. 展开式 $(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ 在什么区间上成立? …	(149)

§ 1.9 多元函数的微分法及其应用

一、二元函数的概念、极限、连续 …	(151)
1. 如何理解二元函数的概念? …	(151)
2. 怎样理解二元函数的极限? …	(152)

3. 二元函数极限的分析定义对 P_0 是函数定义区域 D 的边界点的情形是否适用? (154)

4. 如果在求二元函数 $\frac{xy}{x+y}$ 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 的极限时, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 于是 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r(\cos \theta + \sin \theta)} = 0$ 对吗? (155)

5. 如果一元函数 $f(x, y_0)$ 和 $f(x_0, y)$ 分别在 x_0 和 y_0 连续, 则二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不一定连续 (156)

二、偏导数 (157)

1. 可把偏导数的记号(如 $\frac{\partial z}{\partial x}$) 看成商或分数吗? (157)

2. 任何二元连续函数不一定存在偏导数 (158)

3. 偏函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处都存在, 则 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 处一定连续吗? (159)

三、全微分 (160)

1. $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 都存在, 则 $f(x, y)$ 在点 P_0 的全微分不一定存在 (160)

2. 如果 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有界, 则 $f(x, y)$ 在点 P_0 的全微分 $(dz|_{(x_0, y_0)})$ 不一定存在 (161)

3. 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的全微分存在, 则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 P_0 处不一定连续 (162)

4. 如果在点 $P_0(x_0, y_0)$, 函数 $f(x, y)$ 沿任一方向 α 的方向导数都存在, 则 $f(x, y)$ 在点 P_0 的全微分一定存在吗? (163)

5. 多元函数全微分的运算法则 (164)

四、多元复合函数的导数 (165)

1. 多元复合函数求导公式的规律 (165)

2. $u = \varphi(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, $z = f(u)$ 在相应的点 u 也可微, 则 $dz = f'(u)du$ 成立吗? (167)

3. 设 $z = f(u, v)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 都存在, $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ 的导数 $\frac{du}{dt}$ 和 $\frac{dv}{dt}$ 也都存在, 则全导数公式 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$ 不一定成立 (168)

4. 隐函数存在定理在隐函数的研究中所起的作用 ... (169)

五、多元函数的极值 (171)

1. 对于任何二元函数, $f''_{xy} = f''_{yx}$ 不一定成立 (171)

2. 拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 在极坐标系中的形式 (172)

3. 二元函数的极值点不一定是驻点, 反之亦然 (173)

4. 如果二元连续函数在某区域内只有一个极值, 且是极大(小)值, 则它不一定是函数在该区域上的最大(小)值 (174)

5. 在区域内连续的二元函数在该区域内是否有可能具有多个极大值, 而无极小值? (175)

6. 如何求函数在某区域上的最大(小)值? (176)

7. 如何求解条件极值? (178)

§ 1.10 重积分

一、直角坐标系下二重积分的概念与计算 (183)

1. 二重积分的定义 (183)

2. 如何化二重积分为二次积分? (184)

3. 怎样交换二次积分的次序? (187)

4. 在直角坐标系中任何二重积分不一定都可化成二次积分	(189)
二、极坐标系下二重积分的计算	(190)
1. 怎样利用极坐标计算二重积分	(190)
2. 在哪些情况下适宜于用极坐标计算二重积分?	(191)
三、二重积分的换元法	(194)
1. 如何理解二重积分的换元公式?	(194)
2. 当二重积分的积分区域 D 包含原点时, 换元公式	
$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ 是否仍然成立	(197)
四、三重积分的概念与计算	(198)
1. 三重积分的定义	(198)
2. 如何化三重积分为三次积分?	(199)
3. 三重积分的换元公式	(201)
4. 在哪些情况下适宜于用柱面坐标、球面坐标来计算三重积分?	(202)
5. 由定积分、二重、三重积分引出的 n 重积分的概念	(204)

§ 1.11 微分方程与差分方程

一、微分方程及其解	(206)
1. 怎样理解微分方程的通解和特解	(206)
2. 变量可分离的微分方程及其解	(208)
二、常数系数线性微分方程	(211)
1. 用常数变易法求解线性微分方程	(211)
2. 怎样求解常数系数线性微分方程?	(215)
3. 全微分方程的解	(217)

三、积分因子与变量代换	(218)
1. 怎样找积分因子?	(218)
2. 变量代换在求解微分方程中所起的作用	(223)
四、线性微分方程的一般解法	(224)
1. 怎样求解一般的线性微分方程?	(224)
2. 用消元法求解常系数线性微分方程组	(228)
五、一阶差分方程的解法	(229)
1. 差分的概念	(229)
2. 差分方程的概念	(231)
3. 一阶常系数线性差分方程的解法	(232)

第二部分 思考问题常用方法

§ 2.1 分析法与综合法

一、思路相反两种方法	(241)
二、一类不等式的证题思路	(246)
1. 利用拉格朗日(Lagrange)中值定理	(247)
2. 利用函数的单调性	(251)
3. 利用函数的最大(小)值	(258)
三、微积分最基本的思考方法	(260)

§ 2.2 数形结合法

一、由曲线的切线所想到的	(272)
二、定积分的几何意义给我们的启发	(280)

§ 2.3 分段处理法

一、分段处理法	(288)
---------------	-------