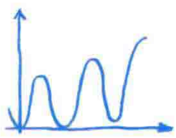
刘罗华　肖海青　主编

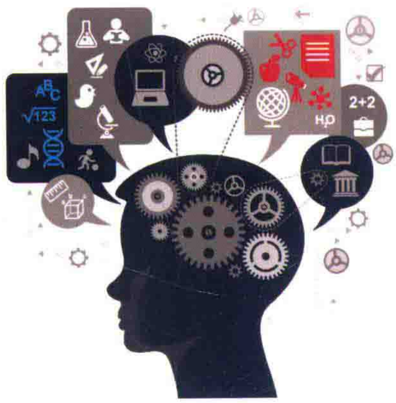
线性代数学习指导

大学数学学习指导丛书

MATHEMATICS

AXIOM THEOREM CALCULATION





湘潭大学出版社

大学数学学习指导丛书

线性代数学习指导

主　编　刘罗华　肖海青
副主编　周　道　徐承杰　张锡鸽

湘潭大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导 / 刘罗华，肖海青主编. — 湘潭：湘潭大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-81128-741-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘…②肖… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第177335号

责任编辑：王亚兰
封面设计：闪电工作室
出版发行：湘潭大学出版社
社　　址：湖南省湘潭市 湘潭大学出版大楼
电话(传真)：0731-58298966 0731-58298960
邮　　编：411105
网　　址：http://press.xtu.edu.cn/
印　　刷：湘潭地调彩印厂
经　　销：湖南省新华书店
开　　本：787×1092 1/16
印　　张：6
字　　数：146 千字
版　　次：2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81128-741-7
定　　价：11.00 元

前　言

线性代数是理工类、经济类、管理类等专业的一门重要的基础课，也是理学、工学、经济学、管理学硕士研究生入学统一考试的主要课程之一。该课程具有高度抽象、逻辑严密、符号独特、方法灵活等特点，使初学者感到困难。学好线性代数的关键在于理清线性代数的概念、掌握解题方法，大量演练习题是达到这一目的必不可少的环节。数学家苏步青曾经说过"学数学最好的方法就是做数学"。针对这种状况，我们编写了这本《线性代数学习指导》。本书既可以作为高等院校线性代数的教学辅导参考书，也可以作为数学爱好者学习线性代数的补充读物。

本学习指导是根据工科院校线性代数的教学大纲、考试大纲以及全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求，按照《线性代数》(复旦大学出版社出版)教材章节的顺序来编写的。内容分为四部分：第一部分为每章的基本知识、基本练习题和自测题。基本知识内容与教材紧密衔接，主要介绍本章的主要内容、学习重点和难点；精选的既基本又典型的各类练习题与教材密切同步配套，便于学生课后巩固基本知识及掌握解题方法；每章附综合自测题，意在学到哪，自测到哪，便于学生及时检验和消化所学知识。第二部分为期末模拟试题，提供各类综合模拟题给学生在该课程考试前复习备考。第三部分是所有习题及模拟题的参考答案，意在帮助学生找出解题中的不足之处。第四部分为数学竞赛模拟试题。通过数学竞赛模拟题，帮助学生了解数学竞赛的难度和要求，便于学生掌握各类数学竞赛动态，提高学生的数学应用能力。

本书由刘罗华、肖海青任主编，周道、徐承杰、张锡鸽任副主编，段卫龙、侯爱玉、黄力、刘琛、董宁、陈运胜、余波、刘丽君、李世霖、刘其林、唐杰等老师也参加了本书的编写，朱善华教授、叶国柄教授等为本书的编写提出了许多宝贵意见。

本书的编写得到了湖南工业大学教务处和湖南工业大学理学院的大力支持，在此深表谢意！

由于编写者水平有限，书中有不足之处，恳请大家批评指正！

编　者

2014.7

目　　录

第一章　n 阶行列式

基本要求

1. 理解行列式定义，掌握每一个元素的余子式和代数余子式的含义。
2. 熟练掌握行列式性质，并能利用性质及按行(列)展开求行列式。
3. 理解克拉默法则，会利用它求解一类线性方程组。

学习重点

行列式的性质及计算。

学习难点

n 阶行列式定义。

习题一　二阶与三阶行列式、n 阶行列式的定义

1. 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性。

(1) 217986354　　(2) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$

2. 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ 。

3. 求一个二次多项式 $f(x)$ ，使得 $f(1)=0$、$f(2)=3$、$f(-3)=28$ 。

4. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数。

5. 利用对角线法则求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ 的值。

习题二　行列式的性质

1. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \neq 0$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13}-5a_{12} & \frac{1}{2}a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23}-5a_{22} & \frac{1}{2}a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33}-5a_{32} & \frac{1}{2}a_{32} \end{vmatrix} =$（　）。

A. $3k$　　B. $-3k$　　C. $-15k$　　D. $-5k$

2. 判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项，并说明理由。

3. 若 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_1 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} =$ ______ D。

4. 计算行列式 $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 的值。

5. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$ 的值。

习题三　行列式按一行(列)展开

一、填空题

1. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} -7 & 6 & -2 \\ -8 & 3 & -6 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{11}=$________。

2. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=$________。

3. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 中，$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$________。

二、计算 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

三、证明：$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 。

习题四　克拉默法则

1. 用克拉默法则解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

2. λ 取何值时，齐次方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解。

自测题

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 填上适当的数字,使 72 ____ 43 ____ 1 为奇排列。

2. 四阶行列式 $D=|a_{ij}|_{4\times4}$ 中,含 a_{24} 且带负号的项为________。

3. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=d$,则 $\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix}=$ ________。

4. 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的展开式中 x 的系数是______。

5. 设 M_{ij}、A_{ij} 分别是行列式 D 中元素 a_{ij} 的余子式、代数余子式,则 $M_{i,i+1}+A_{i,i+1}=$ ______。

二、判断题(每小题 3 分,共 15 分)

1. n 阶行列式 D 中有多于 n^2-n 个元素为零,则 $D=0$ 。 ( )

2. $D=0$,则互换 D 的任意两行或两列,D 的值仍为零。 ( )

3. 排列 $\cdots i\cdots j\cdots$ 与排列 $\cdots j\cdots i\cdots$ 排列的逆序数相差 1。 ( )

4. $D=|a_{ij}|_{3\times3}$,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$ 。 ( )

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$,若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq0$,使得 $\boldsymbol{AB}=0$,则 $\lambda=1$。 ( )

三、计算题(每小题 10 分,共 60 分)

1. (10 分) 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$ 的值。

2. (10 分) 求行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ 5 & 0 & 6 & 2\end{vmatrix}$ 的值。

3. (10 分) 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 5 & 7 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 。

4. (10 分) 已知 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$，求第一行元素的代数余子式 A_{11}、A_{12}、A_{13}、A_{14} 。

5.（10 分）求 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & x \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ x & a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$ 的值。

6.（10 分）利用克拉默则解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

四、证明题(每小题 5 分,共 10 分)

1.（5 分）证明：$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

2.（5 分）n 阶行列式 D 的每行元素之和为 C,则 D 的每列元素的代数余子式之和为 $\dfrac{D}{C}$ 。

第二章　矩阵

基本要求

1. 理解矩阵的概念，知道零矩阵、对角矩阵、单位矩阵、对称矩阵等特殊的矩阵。

2. 熟练掌握矩阵的线性运算（即矩阵的加减法与矩阵的数乘）、矩阵的乘法、矩阵的转置、方阵的行列式以及它们的运算规律。

3. 理解可逆矩阵的概念与性质以及矩阵可逆的充要条件；理解伴随矩阵的概念与性质，会用伴随矩阵求矩阵的逆矩阵，能用初等变换求矩阵的逆；会求矩阵的秩。

4. 知道分块矩阵及其运算规律。

学习重点

矩阵的线性运算，矩阵乘法，逆矩阵的概念、性质，利用伴随矩阵求逆矩阵、矩阵的秩。

学习难点

矩阵的乘法，逆矩阵，分块矩阵。

习题一　矩阵的概念、矩阵的运算

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 。

2. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个反对称矩阵，试证：

(1) $\boldsymbol{A}^2$是对称矩阵；

(2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵；

(3) $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件为：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，问：

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗？

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗？

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗？此等式成立的条件是什么？

习题二　逆矩阵、分块矩阵

一、判断下列说法是否正确：

1. 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆。（　）
2. 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆。（　）
3. 若 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都可逆。（　）

二、判断下列矩阵是否可逆，如果可逆，并求出其逆矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

三、设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=0$，证明：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

四、解矩阵方程 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&0&4\\0&-1&5\end{pmatrix}$。

五、设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆的矩阵，求分块矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。