轴流式叶轮机械的最佳气动设计问题

薛 明 伦

中国科学院北京力学研究所

1975年12月

轴流式叶轮机械的最佳气动设计问题

轴流式叶轮机械三元流动的一般气动计算方法已经建立。我们知道，在边界给定条件下，即规定子午面的形状和流量，对于反问题的气动计算，存在而且仅存在一个自由度，这提供我们一个任意选择某一应变量的自由——通常是流型的选择。如果边界也是可以变化的，那么反问题的设计可以归结为有二个自由度的气动计算。这二个自由度是：

1. 子午面上平均半径的形状〔 $r_{cp} = f(z)$ 〕和平均半径上轴向速度的分布。这实际上就是在一定流量下确定子午面通道的形状。

2. 每一个轴向断面上流型的分布。

这种自由度在气动设计时实际上通过参数选择来表达。

然而对于工程实践来讲，这种自由度仅仅只有相对的意义。一般的做法是：由于有自由度，我们可以计算几个不同的方案，然后根据所设计装置的实践要求，在效率、重量、强度、尺寸、加工性等等方面进行综合的比较，最后定出一个方案。由此可见，在一定的比较条件下，"自由"将消失，总是只有一个设计从各方面综合比较来看是几个方案中最佳的。

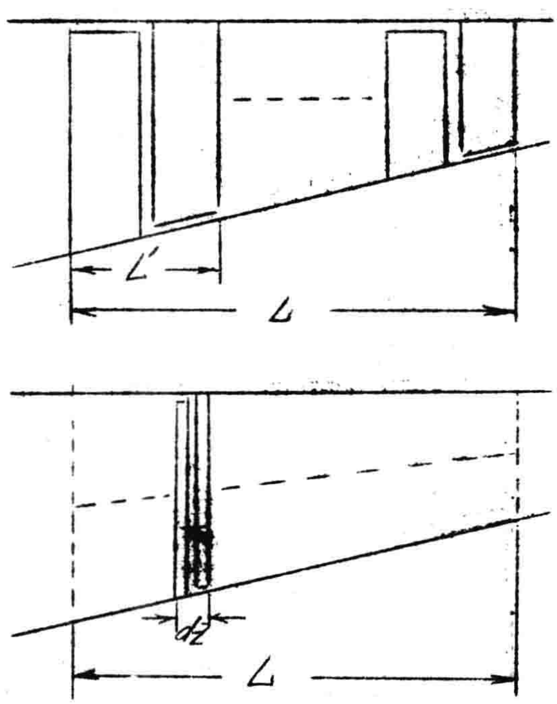
对于轴流式叶轮机械的设计来讲，进行这种比较的理论基础是缺乏的。本文的目的在于提供一个关于在一定的比较条件下最佳气动设计方法，由于最佳条件的补充，"自由度"将消失，参数选择能有较合理的根据。对于不同的对象，最佳条件可以有各种不同的提法，下面的分

析基于一个典型的提法，因而提供的不仅是一个结果，而且是一个思路。

首先研究第一个自由度问题。问题的提法是：在给定初终滞止态的条件下，求平均半径上轴向流速的分布 $C_{z平均} = f(r_{cp}, z)$ 使整个叶轮机的轴向长度最短。当然，问题还可以有很多其他提法，这里分析的只是一种。

为了能用分析的方法来解这个问题，我们必须建立一个新的流动模型——无限多级的模型。这个模型应该反映所探讨的问题的本质。我们把讨论限制在每一级是轴向进气和出气，这是高效能压气机的基本形式。

真实工作过程为经过有限级数，长度L后，气体滞止焓提高 Δi^*，而效率是 η^*。这样一个工作过程完全可以用无限多数来代替。每一无限小级在 dz 距离内滞止焓提高 di^*，而效率为 η 在积分后在长度L内滞止焓同样提高 Δi^*，而效率是 η^*。



每一无限小级的作功量

$$di^* = \frac{A}{2g} \omega d(rC_u)$$

经过这样的模型变换后，我们可以写出基本方程组如下：

$$\gamma C_z 2\pi r_{cp} h = G$$

$$\frac{di^*}{dz} = \frac{A}{2g}\omega\frac{d(rC_u)}{dz}$$

$$= \frac{A}{2g}\frac{\omega r_\varphi}{C_z}\left[\frac{1}{r_\varphi}\frac{d(rC_u)}{C_z dz}\right]C_z^2 \qquad (2)$$

$$T ds = (1-\eta) di^* \qquad (3)$$

$$p = \gamma R T \qquad (4)$$

和 $$i^* = c_p T + \frac{A}{2g}C_z^2 \qquad (5)$$

$$s - s_0 = c_p \ln\frac{T}{T_0} - AR\ln\frac{p}{p_0} \qquad (6)$$

对于压气机设计来说，作为一个设计假设，可以令*

$$\frac{\omega r_\varphi}{C_z} = \frac{u_\varphi}{C_z} = \alpha = 常数$$

由方程(2)可以看出

$$\frac{1}{r_\varphi C_z}\frac{d(r_\varphi C_z)}{dz} \approx \frac{1}{C_z}\frac{dC_u}{dz} \approx \frac{1}{C_{z\varphi}}\frac{\Delta C_u}{L_1} = \beta$$

β 代表气流的折转率，它的设计值和极限值可以由平面翼栅或叶片元素数据来确定。折转率和效率之间有一定关系，在一次近似中可以看作是一一对应，而和其他因素无关。如果用的是同一个系列的翼栅数据，设计值对多级叶轮机械来说可以假定为同一值即 β ＝常数。但由于它和效率之间有一定的关系（β 愈大，单位长度内作功量愈大但效率愈低），所以 β 的选择不是任意的，而是根据效率来决定的，即

$$\beta = f(\eta)$$

在作了上述假定和说明后，我们可以看到上列7个方程包含8个未

* 这仅作为特例计算而引起，也可以是别的关系式。

知数即P，γ，T，i^*，S，C_z，r_{cp}，h，因此必须再补充一个方程才能求出确定解，这个条件在我们的问题中就是使设计的通道长度为最短的条件，即

$$L=\int_0^L dz=\text{最短}$$

方程(8)可以写成

$$L=\int_0^L dz=\int\frac{di^*}{\frac{A}{2g}\alpha\beta C_z^2}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{1-\eta}Tds}{\frac{A}{2g}\alpha\beta C_z^2}=\text{最短} \qquad (9)$$

由于

$$C_z^2=\frac{2g}{A}(i^*-i)$$

$$=\frac{2g}{A}\left[\frac{1}{1-\eta}\int_{S_1}^{S}Tds+i_1^*-\varphi T\right] \qquad (9a)$$

把(10)代入(9)得

$$L=\int\frac{\frac{1}{1-\eta}Tds}{\alpha\beta\left[\frac{1}{1-\eta}\int_{S_1}^{S}Tds+i_1^*-\varphi T\right]}=min \qquad (9b)$$

令

$$\int_{S_1}^{S}Tds=\xi$$

$$\text{则}\quad \frac{d\xi}{ds}=\xi'=T$$

代入（９６）后得：

$$L=\int_{S_1}^{S_2}\frac{\frac{1}{1-\eta}\xi'ds}{\alpha\beta\left[\frac{1}{1-\eta}\xi+i_1^*-\varphi\xi'\right]}$$

$$=\int F(\xi,\xi')ds=min \qquad (10)$$

对应于这一泛函的欧拉方程有一次积分式如下:

$$F - \xi' F_{\xi'} = K_1$$

即

$$\xi' = K_1 \left[i_1^* + \frac{1}{1-\eta} \xi - \varphi \xi' \right]$$

我们看到由于

$$i_1^* + \frac{1}{1-\eta} \xi - \varphi \xi' \propto \frac{A}{2g} C_z^2$$

因而得 $\frac{C_z^2}{T}$ = 常数

即 M_z =常数

可以看到在上述假定下，平均半径处轴向速度沿轴向的最佳分布是满足 M_z =常数的条件。对压气机来说，轴向温度由于是逐级增加的，因而轴向速度和相应的平均半径应该是逐级增加的。而对透平则正好相反。这一点和强度上的要求也一致，是目前轴流式叶轮机械的普遍形式。

由于 M_z=常数，从(3)式可以积分得

$$s_2 - s_1 = (1-\eta) c_p \left(1 + \frac{k-1}{2} M_z^2\right) \ln \frac{i_2^*}{i_1^*}$$

在 i_1^*，i_2^*，s_1，s_2 即初终滞止态确定后，可以看到如微元级级效率 η 较高，则 M_z 可以较高，反之如效率愈低，则 M_z 愈低。

从上式可以定出

$$M_{z\text{最佳}} = \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\frac{s_2 - s_1}{\ln \frac{i_2^*}{i_1^*} (1-\eta)} \frac{1}{c_p} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

这时以(2)式可以积分得

$$z - z_1 = \frac{1}{\alpha\beta} \ln \frac{i^*}{i_1^*} \frac{\left(1 - \frac{k-1}{2} M_z^2\right)}{\frac{k-1}{2} M_z^2}$$

给出了滞止焓和位置的关系，在等 M_z 情况下，温度T，S，P，γ，c_z，rc_φ，h 对Z的关系都可以得出。

$$\frac{T}{T_1}=\frac{T^*}{T_1^*}\frac{\left(1+\frac{k-1}{2}M_{z1}^2\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_z^2\right)}=\frac{i^*}{i_1^*}$$

从(3)式

$$s-s_1=(1-\eta)c_p\left(1+\frac{k-1}{2}M_z^2\right)\ln\frac{i^*}{i_1^*}$$

从(6)式

$$\frac{p}{p_1}=\exp\left\{\left[\frac{k}{k-1}-(1-\eta)\frac{k}{k-1}\left(1+\frac{k-1}{2}M_z^2\right)\right]\ln\frac{i^*}{i_1^*}\right.$$

而

$$\frac{\gamma}{\gamma_1}=\frac{p}{p_1}\frac{T_1}{T}$$

$$\frac{c_z}{c_{z1}}=\frac{M_zT}{M_{z1}T_1}=\frac{T}{T_1}=\frac{i^*}{i_1^*}$$

$$\frac{rc_\varphi}{rc_{\varphi1}}=\frac{u_\varphi}{u_{\varphi1}}=\frac{c_z}{c_{z1}}=\frac{i^*}{i_1^*}$$

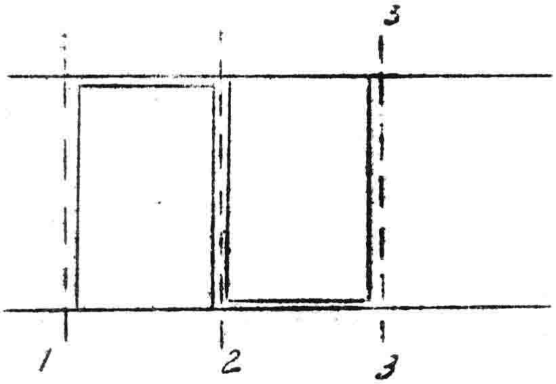
$$\frac{h}{h_1}=\frac{\gamma c_z rc_\varphi}{(\gamma c_z rc_\varphi)_1}=\frac{\gamma_1}{\gamma}$$

变分问题还可以根据具体情况给出不同的提法，上面给出的仅是一个特例。

下面我们讨论第二个自由度的问题，也就是最佳流型问题。

问题的提法是：在给定流量和总级作功量的条件下，求2－2截面上的流型使级的总效率最高。

假定：1－1，3－3截面都是轴向进出气。



先考虑不可压缩（或低速）的情况，级的总效率最高，相当于

$$I = \int 2\pi r \rho c_{z,3} (p_3^* - p_1^*) dr = 最大 \qquad (13)$$

而限制条件是:

$$\left.\begin{aligned} &\int 2\pi r \rho c_z dr = G = 常数 \\ 和\quad &\int 2\pi r \rho c_z (p_{3s}^* - p_1^*) dr = \Delta H = 常数 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

由于

$$p_3^* - p_1^* = p_{3s}^* - p_1^* - (\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^*)$$

其中 $\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^*$ 为沿一根流线从1－1到3－3截面的总压损失。

从简单径向平衡方程

$$\frac{dp^*}{dr} = \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d(rc_u)^2}{dr} + \frac{dc_z^2}{dr}\right] \qquad (15)$$

在3－3截面 $c_{u_3} = 0$ ，可以得到

$$c_{z,3} = \sqrt{c_{z,3\varphi}^2 + \frac{2}{\rho}(p_3^* - p_{3\varphi}^*)}$$

而

$$p_{3s}^* - p_1^* = \rho\omega(c_u r)$$

代入(13)式后得

$$I = 2\pi\rho \int r c_{z,3} (p_3^* - p_1^*) dr$$

$$= 2\pi\rho\int r\sqrt{C_{z3q}^2 + \frac{2}{\rho}\left(p_2^* - p_{3q}^*\right)}\left(p_2^* - p_1^*\right)dr$$

$$= 2\pi\rho\int r\sqrt{C_{z3q}^2 + \frac{2}{\rho}\left(p_{1s}^* - p_{3q}^* - \Delta p_{1-2}^* - \Delta p_{2-3}^*\right)}$$

$$\times\left[\rho\omega(C_{2u}r) - \Delta p_{1-2}^* - \Delta p_{2-3}^*\right]dr$$

$$= 2\pi\rho\int r\sqrt{C_{z3q}^2 + \frac{2}{\rho}\left[\rho\omega r(C_{2u}r) - (\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^*)\right]}$$

$$\times\left[\rho\omega(C_{2u}r) - (\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^*)\right]dr$$

$$= 2\pi\rho\int F\,dr = 最大$$

总压损失 $\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^*$ 除和流型有关外，还和稠度有关，例如用扩散因子D综合数据时就是这样。不过稠度沿叶高分布很大程度上取决于结构和强度，同时照顾到气动要求。所以在第一次近似中可以假定 σ 是 r 的已知函数，在求出最佳流型后，如需要，再作适当的调整。一般地说，如果

$$\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^* = f(C_{2u}, r)$$

这样泛函 $I = 2\pi\rho\int F(C_{2u}, r)dr$ 的变分问题就是求对应的欧拉方程 $\frac{\partial F}{\partial(C_u r)} = 0$ 的解。

令 $\frac{\partial F}{\partial(C_u r)} = 0$ 得

$$C_{z,3q}^2 + \frac{3}{\rho}\left[\rho\omega(C_{2u}r) - f\right] + p_1^* - p_{3q}^* = 0$$

方程中包含二个待定常数 C_{z3q}^2，p_{3q}^* 这可以把(16)式代入(14)式的二个限制方程来确定。

下面我们看一个特殊情况，如

$$\left.\begin{array}{l}\Delta p_{1-2}^* + \Delta p_{2-3}^* = k(C_{2u} r) \qquad k\text{—常数} \\ \text{且} \quad p_1^* \quad \text{常数}\end{array}\right\} \quad (17)$$

则以(16)式可得

$$C_{2u} r = \text{常 数}$$

我们看到，自由旋涡流型是最佳流型是在 比较有限制的条件下〔条件(17)〕得到的。

对于可压缩流动，也可以写出相应的泛函方程

$$I = \int 2\pi r \rho C_z (p_3^* - p_1^*) = \text{最大}$$

而限制方程是

$$\int 2\pi r \rho C_z dr = G = \text{常数}$$

$$\int 2\pi r \rho C_z (i_3^* - i^*) dr = \Delta H = \text{常数}$$

小　　结

由于补充了最佳条件消除了设计中的自由度，　参数选择有一合理的理论基础。从变分原理出发，证明了：

1.轴流式压气机设计如长度为最短，则轴向速度沿轴向应该是逐步增加的，在一定的条件下，等 M_z 设计接近最佳方案，透平则反之。

2.最佳流型对应于一定流量和总作功量下最小损失，自由旋涡流型仅是在相当有限制的条件下才是最佳的。