该书是根据最新考试大纲编写而成的权威用书

最新全国成人高考（专升本）招生考试教程及模拟试卷精选

（非师范类）

高等数学（二）

成人高考命题研究组　编审

- 紧扣考试大纲
- 考试内容详述
- 考前模拟试卷
- 考生考试必备

中国档案出版社

最新全国成人高考（专升本）

招生考试教程及模拟试卷精选

（非师范类）

高等数学（二）

主　编：周敬治　　周建波

副主编：候集体　　李　平　　高先锋

编　者（排名不分先后）：

赵继德　孙志坚　李世明　王友云　李德强　姜徐玲

于秀云　刘安平　潘　莉　王艳平　胡淑毓　刘　岭

赵增绩　李　平　罗振声　吕蕴霞　孙少云　孙厚才

中国档案出版社

责任编辑/王晓蕾

出版/中国档案出版社(北京西城区丰盛胡同 21 号)
发行/中国档案出版社
印刷/北京建外印刷厂
规格/787×1092 1/16 印张/101 字数/2196 千字
版次/1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷
印数/500
定价/200.00 元(全套)

前　言

为了帮助报考各类成人高等学校(包括广播电视大学、职工高等学校、农民高等学校、管理干部学校、教育学院和教师进修学校、独立设置的函授学院、普通高等学校举办的成人高等学历教育等)考生系统复习课程,参加各类成人高等学校招生考试,我们特邀请了中国成人教育界历年对成人高考考试有专门研究的高等学校的专家、教授,根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校(专升本)招生复习考试大纲》,精心编写了这套丛书。该丛书依据最新成人高考新动态,导析重点、难点、焦点,融入最新成人高考科研成果。该丛书具有以下五大特点:

1. **全:考纲考点覆盖全**—每章都以强化练习题的方式覆盖所有的考纲考点。

2. **新:考试信息新**—体现了最新成人高考考题型、最新成人高考精神。

3. **准:扣紧考纲复习准**—严格按照最新考试大纲编写。

4. **真:题型题量模拟真**—题型和题量均与实际成人高考一致

5. **快:突击复习见效快**—针对性强,新颖独到。

本丛书最适宜于作为各"成人高考辅导班"师生的教学和课本用书。

本丛书考试大纲的要求,以章为单位编写,每章内容包括;要点、重点知识、知识点能力训练、参考答案。并附有国家教委制定的最新《全国各类成人高等学校(专升本)招生复习考试大纲》。

近几年的成人高考。在考查知识的同时,逐步加强了对能的考查。它要求考生对所学的内容能够融会贯通。在理解的基础上牢固地掌握必要的基本知识、技巧,重点放在系统地掌握知识之间有内在联系,形成一个科学合理的知识网络,并形成学科能力。只有这样,才能为进一步深入学习创造条件。本丛书的编写目的就在于帮助考生了解、掌握一个科学合理的知识网络,便于贮存,又便于提取应用,这亦是成人高考复习的目的。

掌握基本知识并将知识转化为能力还要靠训练。因此,本丛书还编写了足够量的能力训练题并附有详细解题答案。

本书的最大特点在于:按照考试大纲要求,针对成人考生复习时间短、基础不扎实的特点,按知识点一个一个地验收和检测。

"争渡,争渡,惊起一滩鸥鹭。"相信读者在认真读完本书后,能在成人高考中得心应手,取得满意成绩!

编者

1998 年 9 月

目　　录

第一章　函数、极限、连续

一　函数

（一）基本内容

1. 函数的概念

（1）函数的定义

在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，当变量 x 在其变化范围内取定某一个数值后，变量 y 按着一定的规律总有一个确定的值与之对应，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

x 叫自变量，y 叫因变量，f 表示 x 与 y 之间的对应规律，自变量 x 的取值范围，称为函数的定义域，因变量 y 的变化范围，称为函数的值域。定义域有时用字母 D 或 $D(f)$ 表示，值域有时用字母 Z 或 $Z(f)$ 表示。

在函数的定义中，如果对于每一个 $x \in D(f)$，都有唯一的 $y \in Z(f)$ 与之对应，那么就称这种函数为单值函数，否则就称多值函数。今后无特别说明，所研究的函数都是指单值函数。

两个函数只要定义域相同，对定义域内的每一个值，与之对应的两个函数的函数值都相同，这两个函数就相同。在某一个问题中，如果同时出现几个不同函数，要用不同的对应规律符号来区别它们。如果两个函数定义域相同，对应法则相同，只是表示自变量的字母不同，这两个函数仍是相同的。即函数与表示自变量的字母无关。

（2）确定函数的定义域

当我们在研究函数时，必须首先注意函数的定义域。对于反映实际问题的函数，其定义域要由所给问题的实际意义来确定。对于用数学式子表示的函数，确定其定义域应注意下面几点：

① 函数式里若有分式，分母的值不能为零；

② 函数式里若有偶次根式，根号里的整个式子必须大于或等于零；

③ 函数式里若有对数记号，要使真数为正；

④ 函数式里若有正切或余切函数，在正切、余切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$、$k\pi$（k 为整数）；

⑤ 函数式里若有反正弦或反余弦函数，在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1；

⑥ 若函数的表达式由若干项组成，则定义域是各项定义域的公共部分（交集）。

函数定义域常用区间表示，也可用不等式、集合等方式表示。

（3）分段函数

有时要考察这样的函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，要用两个或两个以上的表达式来表示。这类函数称为“分段函数”。

例如：

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$

都是分段函数，定义域都是$(-\infty, +\infty)$，其图形分别如图 1－1 和图 1－2 所示。

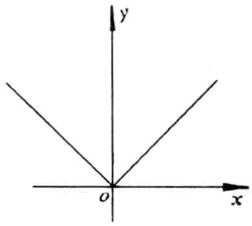


图 1－1

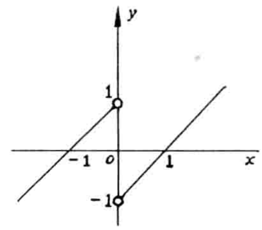


图 1－2

(4) 隐函数

有些函数它的因变量是用自变量表达式表示出来的，称为显函数。但是有些函数，它的因变量与自变量的对应规则是用一个方程

$$F(x,y) = 0$$

来确定的，称为隐函数。

例如方程

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

就可确定 $y = y(x)$ 的函数关系。解出 y 就是

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

几何上分别表示了上半圆周与下半圆周(二值函数)。

但要注意，并非所有方程都可确定函数关系的，同时也并非隐函数都可解出 y 来的(显化)。

2. 函数的几何特性

(1) 函数的奇偶性

定义：给定函数 $y = f(x)$

① 如果对所有的 $x \in D(f)$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

② 如果对所有的 $x \in D(f)$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 既非奇函数，也非偶函数，那末 $f(x)$ 叫做非奇非偶函数。

偶函数的图象是对称于 y 轴的；奇函数的图象是对称于原点的。如图 1－3 和图 1－4 所示。

(2) 函数的周期性

定义：对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的正数 l，使得对于定义域中的一切 x，等式

$$f(x+l)=f(x)$$

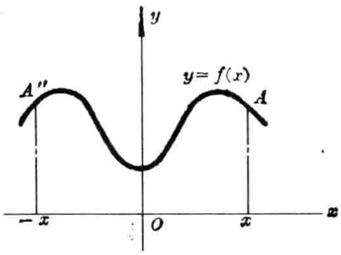


图 1 — 3

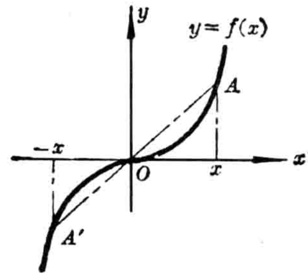


图 1 — 4

都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，l 叫做这个函数的周期。当 l 为正数时，$2l,3l\cdots,nl(n\in N)$ 也是它的周期。通常最小正数 l 称为周期函数的最小正周期。

一个以 l 为周期的周期函数，它的图象在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，有相同的形状。

(3) 函数的单调增减性

定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调增加的；

如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调减少的。

上述定义也适用于无限区间的情形。

严格单调增加的函数 $f(x)$ 的图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的(图 1 — 5)；严格单调减少的函数 $f(x)$ 的图形是沿 x 轴的正向逐渐下降的(图 1 — 6)。

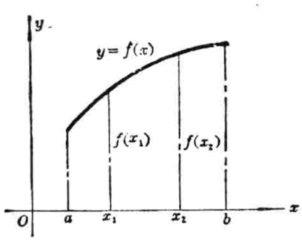


图 1 — 5

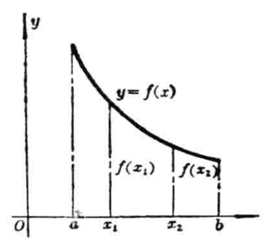


图 1 — 6

(4) 函数的有界性

定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义((a,b) 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分)，若存在一个正数 M，对于所有 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的。如果不存在这样的正数 M，则称

$f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间的范围内。

3. 反函数的概念

定义：设已知函数为 $y=f(x)$，如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称它为 $f(x)$ 的

反函数(此时,又称 $f(x)$ 为直接函数),记为 $x = f^{-1}(y)$。

习惯上将反函数 $x = f^{-1}(y)$ 中 x 与 y 互换而记为 $y = f^{-1}(x)$。

注意:

(1) 直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是同一条曲线,但是不同的函数;

(2) 直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形,是对称于直线 $y = x$,(是不同的曲线),是不同的函数;

(3) 直接函数的定义域和值域,恰为其反函数的值域和定义域。反之亦然。

4. 基本初等函数

基本初等函数是指:

(1) 常数函数　$y = c$(c 为常数);

(2) 幂函数　$y = x^{\alpha}$(α 为任何实数);

(3) 指数函数　$y = a^{x}(a > 0, a \neq 1)$,

特别当 $a = e \approx 2.71828\cdots$ 时,有 $y = e^{x}$;

(4) 对数函数　$y = \log_{a}x(a > 0, a \neq 1)$,

特别当 $a = e$ 时,有 $y = \ln x$,称为自然对数;

(5) 三角函数:

$y = \sin x$　　$y = \cos x$　　$y = \mathrm{tg} x$

$y = \mathrm{ctg} x$　　$y = \sec x$　　$y = \csc x$

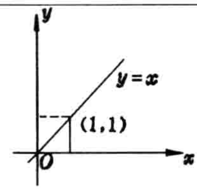
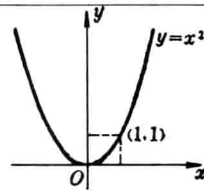
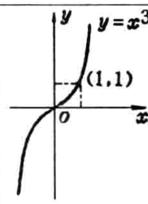
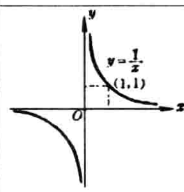
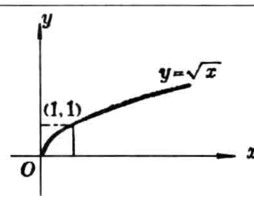
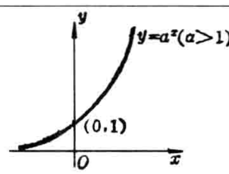
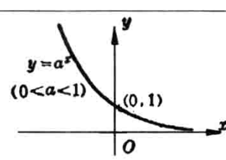
(6) 反三角函数:

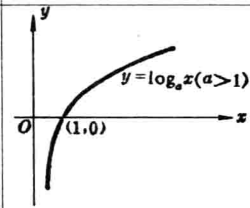
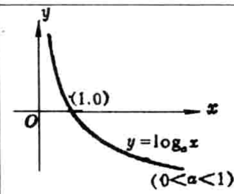
$y = \arcsin x$　　$y = \arccos x$

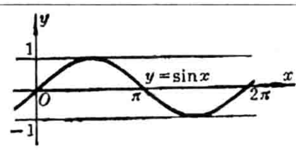
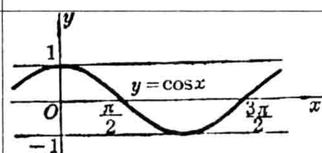
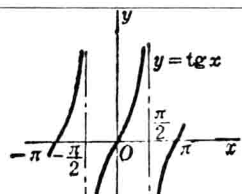
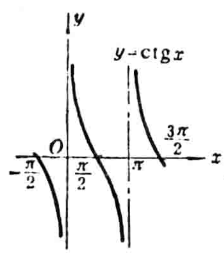
$y = \mathrm{arctg} x$　　$y = \mathrm{arcctg} x$

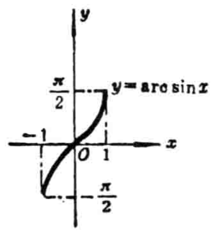
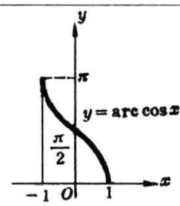
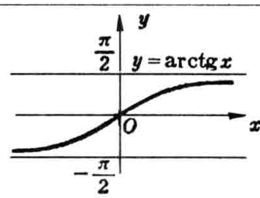
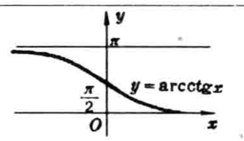
基本初等函数是我们分析、研究函数的基础,对它们的性质及图形,我们用表格形式详细附于下面(除去常数函数 $y = c$)。

基本初等函数总表:

	函数	定义域与值域	图象	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

	函　　数	定义域与值域	图　　象	特　　性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

	函　　数	定义域与值域	图　　象	特　　性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\mathrm{tg}x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加
	$y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq k\pi\ (k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

	函　　数	定义域与值域	图　　象	特　　性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少,有界
	$y=\mathrm{arctg}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\mathrm{arcctg}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

5. **复合函数、初等函数**

定义:设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,并且对于 x 值所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$ 有定义,则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的复合函数。x 是自变量,u 是中间变量。

实际上,复合函数就是将中间变量代入后所构成的函数。

但要注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的,例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数,由定义,对于 $u=x^2+3$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内的任何值 x 所对应的 u 值(都大于或等于3),$y=\arcsin u$ 都没有定义。就是说,$u=\varphi(x)$ 的值域必须取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内。另外,复合函数的中间变量也可能不止一个,即二个、三个以上等,例如 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由

$$y=e^u, u=\sqrt{v}, v=x^2+1$$

三个函数复合而成,其中 u、v 是中间变量。

在实际中,常常要考虑一个复合函数是由哪几个基本初等函数或简单函数(由基本初等函数经过四则运算)复合而成的。

初等函数是指:

由基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)和复合所构成的函数。初等函数

是能用一个式子表示的函数。

例如

$$y = \frac{2+x}{2-x}$$
$$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$y = \sin(3x-1)$$
$$y = \cos^2(\ln x)$$

等都是初等函数。

分段函数(除去能用一个式子表示的)通常都是非初等函数。

6. 几种常用的经济函数

成本函数　是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入总额。它是由固定成本与可变成本组成。

收益函数　是指生产者出售一定量产品所得到的全部收入。

利润函数　是指生产者的总收益去掉总成本后的所得。

需求函数　是指在一定价格下,消费者所需要的商品量。注意它是价格的递减函数。

供给函数　是指在一定价格下,生产者所提供的商品量。

7. 建立函数关系问题

为了解决应用问题,先要给问题建立数学模型,即建立函数关系(列函数式),其大体步骤如下:

(1) 分析实际问题中存在的各种量,弄清楚哪些是常量,哪些是变量,哪个变量作自变量,哪个变量作因变量。

(2) 根据变量间的依赖关系,列出函数式(若有两个自变量,则要找出它们之间的关系,消去多余的自变量)。

(3) 由实际问题的需要,求出函数的定义域。

列函数关系式的实际问题,我们将在后面结合最大(小)值的应用问题去领会。

(二) 基本要求

1. 理解函数的概念,掌握求函数的定义域和某些函数值域的方法。

2. 理解和掌握单调函数、有界函数、奇函数、偶函数与周期函数的概念,并会用定义判断所给函数的类别。

3. 理解和掌握函数的四则运算与复合运算,会分析复合函数的复合过程。

4. 掌握基本初等函数的简单性质及其图象。

5. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图象)。会求单调函数的反函数。

6. 会求分段函数的定义域、函数值,并能作出一些简单的分段函数的图象。

7. 会列出简单的经济和几何方面的实际问题的函数关系式。

(三) 解题范例

例 1　求下列函数的定义域:

(1)$y = \dfrac{2}{5-2x}$

(2)$y = \sqrt{1-x^2}$

(3) $y = \lg(2-x) + \arcsin\frac{x}{2}$

(4) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

解

(1) 要使函数式子有意义，必须使分母不为 0，即

$$5-2x \neq 0, \text{解得 } x \neq \frac{5}{2}$$

所以函数定义域为$(-\infty,\frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$。

(2) 要使函数式子有意义，必须使根式内大于或等于 0，即

$$1-x^2 \geqslant 0, x^2 \leqslant 1 \quad \text{即}$$

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

所以函数定义域为$[-1,1]$。

(3) 要使函数式子有意义，必须使两项同时有意义，为此，第一项中真数必须大于 0，即

$$2-x > 0 \tag{1}$$

第二项反正弦函数中 $|\frac{x}{2}| \leqslant 1$，即

$$-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1 \tag{2}$$

由 ① 得 $x < 2$，由 ② 得 $-2 \leqslant x \leqslant 2$

它们的共同部分（交集）为 $-2 \leqslant x < 2$，

所以函数定义域为$[-2,2)$。

(4) 要使函数式子有意义，根式必须大于或等于 0，即

$$\frac{x-2}{x+1} \geqslant 0$$

该不等式就是：

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\begin{cases} x-2 \leqslant 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \tag{2}$$

由 ① 得 $x \geqslant 2$，由 ② 得 $x < -1$

所以函数定义域为$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$。

例 2 函数 $y = \frac{3x}{x^2-5x+6}$ 的定义域是__________。

解 填$(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$

当分母 $x^2-5x+6=0$ 时，y 无意义，求解此方程

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$$

得根 $x=2, x=3$，即在数轴$(-\infty,+\infty)$上，将 $x=2, x=3$ 两点去掉就是函数 y 的定义域。故应填$(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$

例 3 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\lg(x+2)$ 的定义域为（ ）

A. $(-2,-1]\cup[1,+\infty)$ B. $(-\infty,-1)$

C. $(-2,+\infty)$ D. $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

解　选 A

第一项，当 $x^2-1\geqslant 0$ 时，即 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时，才有意义；

第二项，当 $x+2>0$，即 $x>-2$ 时，才有意义。

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,-1]U[1,+\infty)$，故应选择 A。

例 4　设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求：

(1) $f(x+a)\quad(a>0)$ 的定义域；

(2) $f(x^2)$ 的定义域。

解

(1) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以对函数 $f(x+a)$ 来说，只有当 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 时，$f(x+a)$ 才有意义。

由不等式 $0\leqslant x+a\leqslant 1$　　得　　$-a\leqslant x\leqslant 1-a$。

所以函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$。

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以对函数 $f(x^2)$ 来说，只有当 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 时，$f(x^2)$ 才有意义。

由不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$　　得　　$|x|\leqslant 1$，即得 $-1\leqslant x\leqslant 1$。

所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$。

例 5　已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-1)$、$f(\frac{1}{2})$、$f(3)$ 的值。

解

因为分段函数的定义域是有定义的各段的并集，即

$$\begin{aligned}D(f)&=(-\infty,0)U(0,1)U[1,5]\\&=(-\infty,0)U(0,5]\end{aligned}$$

$f(-1)$ 的值，因为 $-1\in(-\infty,0)$，所以必须用第一段的函数表达式去计算，即

$$f(-1)=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$

同理，$\frac{1}{2}\in(0,1)$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$3\in[1,5]$，$f(3)=2$。

例 6　下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的有（　　）

A. $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x}$，$g(x)=x-1$

B. $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$

C. $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

D. $f(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$，$g(x)=x$

解　选 D

A 中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)U(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，定义域不同，所以它们不是相同函数。

B 中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)U(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，定义域不同，所以它们不是相同函数。

C 中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$，但 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 对应规则与 $f(x)=x$ 是不同的，所以它们不是相同函数。

D 中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$，又由于 $\sin^2x+\cos^2x=1$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规则也相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的两个函数。

例 7 区别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^2+3x$

(2) $f(x)=\sin x+x^3$

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

解

(1) $f(x)=2x^2+3x$

定义域 $(-\infty,+\infty)$

$$f(-x)=2(-x)^2+3(-x)=2x^2-3x$$

所以，$f(x)=2x^2+3x$ 为非奇非偶函数。

(2) $f(x)=\sin x+x^3$

定义域 $(-\infty,+\infty)$

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin(-x)+(-x)^3=-\sin x-x^3\\&=-(\sin x+x^3)=-f(x)\end{aligned}$$

所以，$f(x)=\sin x+x^3$ 为奇函数

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

定义域 $(-\infty,-1)U(-1,1)U(1,+\infty)$

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}\\&=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}\\&=-\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\\&=-f(x)\end{aligned}$$

所以，$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数。

注意：由奇偶函数的定义，若所给函数定义域不是关于原点对称的，则该函数就一定不是奇偶函数。

例 8 设 $y_1=f_1(x)$、$y_2=f_2(x)$ 都是偶函数，其定义域均为 $D(f)$，试证明：

$f_1(x)\cdot f_2(x)$ 是偶函数。

证 设 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$

定义域为 $D(f)$

因为 $F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)$

$=f_1(x)\cdot f_2(x)$ （$f_1(x)$、$f_2(x)$ 为偶函数）

$=F(x)$

所以 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ 为偶函数，即
两个偶函数的乘积是偶函数。
同样可以证明下述相应结论：
两个奇函数乘积是偶函数。
奇函数与偶函数乘积是奇函数。
两个偶函数的和是偶函数。
两个奇函数的和是奇函数。

例 9 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$，证明 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数。

证 设 $F(x)=f(x)+f(-x)$

于是因为
$$F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]$$
$$=f(-x)+f(x)=F(x)$$
所以，$F(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数。

设 $G(x)=f(x)-f(-x)$

于是因为
$$G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]$$
$$=f(-x)-f(x)$$
$$=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$$
所以，$G(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数。

例 10 证明函数：

(1) $f(x)=|x|-3e^{x^2}$ 为偶函数

(2) $f(x)=\ln\dfrac{x+5}{x-5}$ 为奇函数

证

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

因为
$$f(-x)=|-x|-3e^{(-x)^2}$$
$$=|x|-3e^{x^2}=f(x)$$
所以，$f(x)$ 为偶函数。

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-5)\cup(+5,+\infty)$

因为
$$f(-x)=\ln\frac{-x+5}{-x-5}=\ln\frac{x-5}{x+5}$$
$$=\ln\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-1}=-\ln\frac{x+5}{x-5}$$
$$=-f(x)$$
所以，$f(x)$ 为奇函数。

例 11 求下列函数的周期

(1) $y=\sin 3x$

(2) $y=\sin^2 x$

解

(1) 因为 $y=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)$
$$=\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$