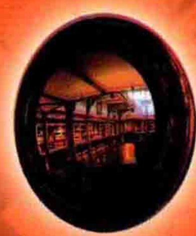

Canadian Mathematical Olympiad Tests

历届加拿大数学奥林匹克试题集

刘培杰 主编

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Canadian Mathematical Olympiad Tests

历届加拿大数学奥林匹克试题集

● 刘培杰 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第1届至第42届加拿大数学奥林匹克试题及解答，并在附录部分提供了加拿大为参加国际数学奥林匹克准备的训练题. 本书详细地对每一道试题进行了解答，且注重了初等数学与高等数学的联系.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

历届加拿大数学奥林匹克试题集/刘培杰主编. 一哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5603-3669-5

Ⅰ.①历… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第187430号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 18.25 字数 340千字
版 次 2012年8月第1版 2012年8月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3669-5
定 价 38.00元

目　录 | Contents

第 1 届加拿大数学奥林匹克　1969 年 ……… 1

第 2 届加拿大数学奥林匹克　1970 年 ……… 7

第 3 届加拿大数学奥林匹克　1971 年 ……… 11

第 4 届加拿大数学奥林匹克　1972 年 ……… 15

第 5 届加拿大数学奥林匹克　1973 年 ……… 19

第 6 届加拿大数学奥林匹克　1974 年 ……… 23

第 7 届加拿大数学奥林匹克 30
1975 年

第 8 届加拿大数学奥林匹克 34
1976 年

第 9 届加拿大数学奥林匹克 38
1977 年

第 10 届加拿大数学奥林匹克 42
1978 年

第 11 届加拿大数学奥林匹克 46
1979 年

第 12 届加拿大数学奥林匹克 49
1980 年

第 13 届加拿大数学奥林匹克 53
1981 年

第 14 届加拿大数学奥林匹克 56
1982 年

第 15 届加拿大数学奥林匹克 61
1983 年

第 16 届加拿大数学奥林匹克 65
1984 年

第 17 届加拿大数学奥林匹克 68
1985 年

第 18 届加拿大数学奥林匹克 72
1986 年

第 19 届加拿大数学奥林匹克 77
1987 年

第 20 届加拿大数学奥林匹克 82
1988 年

第 21 届加拿大数学奥林匹克 86
1989 年

第 22 届加拿大数学奥林匹克 89
1990 年

第 23 届加拿大数学奥林匹克 94
1991 年

第 24 届加拿大数学奥林匹克 97
1992 年

第 25 届加拿大数学奥林匹克 102
1993 年

第 26 届加拿大数学奥林匹克 107
1994 年

第 27 届加拿大数学奥林匹克 112
1995 年

第 28 届加拿大数学奥林匹克 1996 年 115

第 29 届加拿大数学奥林匹克 1997 年 119

第 30 届加拿大数学奥林匹克 1998 年 122

第 31 届加拿大数学奥林匹克 1999 年 128

第 32 届加拿大数学奥林匹克 2000 年 133

第 33 届加拿大数学奥林匹克 2001 年 137

第 34 届加拿大数学奥林匹克 2002 年 143

第 35 届加拿大数学奥林匹克 2003 年 148

第 36 届加拿大数学奥林匹克 2004 年 152

第 37 届加拿大数学奥林匹克 2005 年 156

第 38 届加拿大数学奥林匹克 2006 年 161

第 39 届加拿大数学奥林匹克 166
2007 年

第 40 届加拿大数学奥林匹克 170
2008 年

第 41 届加拿大数学奥林匹克 175
2009 年

第 42 届加拿大数学奥林匹克 180
2010 年

附录 185

§ 1 代数 185
§ 2 不等式 209
§ 3 数论 223
§ 4 几何 234
§ 5 组合及其他 256

参考文献 272

后记 273

第 1 届加拿大数学奥林匹克

1969 年

1 证明:如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$,并且 P_1,P_2,P_3 不全为零,那么对每个正整数 n,有$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{P_1a_1^n+P_2a_2^n+P_3a_3^n}{P_1b_1^n+P_2b_2^n+P_3b_3^n}$.

证　令 $k=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$,那么 $a_1=kb_1,a_2=kb_2,a_3=kb_3$,则

$$\begin{aligned}&P_1a_1^n+P_2a_2^n+P_3a_3^n\\=&P_1(kb_1)^n+P_2(kb_2)^n+P_3(kb_3)^n\\=&k^n(P_1b_1^n+P_2b_2^n+P_3b_3^n)\end{aligned}$$

所以
$$\frac{P_1a_1^n+P_2a_2^n+P_3a_3^n}{P_1b_1^n+P_2b_2^n+P_3b_3^n}=k^n=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n$$

2 已知 $c>1$.求证:两数$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$,$\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$ 中的一个总是大于另一个.

证法 1　对于一切的 $c>1$ 都有

$$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$$

因为这个不等式等价于下面的不等式

$$\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}<2\sqrt{c}\quad（注意两边都是正的）$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1})^2<4c$$

$$\Leftrightarrow c+1+2\sqrt{c+1}\sqrt{c-1}+c-1<4c$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{c^2-1}<2c$$

$$\Leftrightarrow c^2-1<c^2$$

上式显然对一切的 c 都成立.

证法 2　因为$\sqrt{c+1}+\sqrt{c}>\sqrt{c}+\sqrt{c-1}>0$,所以

$$\frac{1}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}<\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$$

即
$$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$$

3 设 c 是直角三角形斜边的长，另两边的长是 a 和 b. 求证：$a+b\leqslant\sqrt{2}c$. 等式什么时候成立？

证法 1 因为

$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$

$$2(a^2+b^2)\geqslant 2ab+a^2+b^2=(a+b)^2$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a+b$$

即

$$\sqrt{2}c\geqslant a+b$$

当且仅当 $a=b$ 时等式成立.

证法 2 可知

$$\begin{aligned}a+b&=c(\sin A+\sin B)\\&=\sqrt{2}c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)\\&=\sqrt{2}c\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\\&\leqslant\sqrt{2}c\end{aligned}$$

当且仅当 $A=\frac{\pi}{4}$ 即 $a=b$ 时等式成立.

4 设 ABC 是等边三角形，P 是三角形内任意点. 作三角形三边的垂线 PD,PE,PF，垂足为 D,E,F. 试证：不管 P 在哪里，总有 $\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

证 令 $a=AB=BC=CA$，$\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，这个面积也是 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$ 的面积之和，所以

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2&=\frac{a}{2}\cdot PD+\frac{a}{2}\cdot PE+\frac{a}{2}\cdot PF\\&=\frac{a}{2}(PD+PE+PF)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{PD+PE+PF}{3a}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

5 设 ABC 是边长为 a,b,c 的三角形，$\angle C$ 的平分线交 AB 于 D. 求证：CD 的长是 $\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

证法 1　如图 1.1,设 $CD=x$,则 $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}ax\cdot\sin\frac{C}{2}$,$\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,因此

$$\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

所以
$$CD=x=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

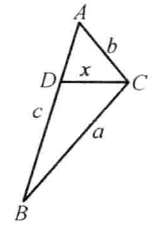

图 1.1

证法 2　由正弦定理得

$$AD=\frac{x\sin\frac{C}{2}}{\sin A},BD=\frac{x\sin\frac{C}{2}}{\sin B}$$

相加得

$$c=x\sin\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)$$
$$=\frac{x}{2\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)$$
$$=\frac{x}{2\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=\frac{cx(a+b)}{2ab\cos\frac{C}{2}}$$

所以
$$CD=x=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

证法 3　如图 1.2,过 B 作直线平行于 CD,交 AC 的延长线于 E,则 $\angle CBE=\angle BCD=\angle ACD=\angle E=\frac{\angle ACB}{2}$,所以

$$CE=CB=a$$
$$BE=2a\cos\frac{C}{2}$$

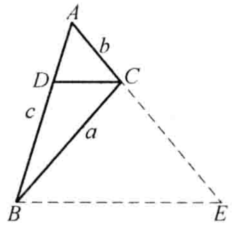

图 1.2

而
$$\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{AE}$$

即
$$\frac{CD}{2a\cos\frac{C}{2}}=\frac{b}{a+b}$$

所以
$$CD=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

6 求 $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+(n-1)\cdot(n-1)!+n\cdot n!$ 的和，这里 $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$.

解 因为 $k\cdot k!=(k+1)!-k!,k=1,2,3,\cdots$

所以

$$\begin{aligned}&1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+(n-1)\cdot(n-1)!+n\cdot n!\\=&(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+[n!-(n-1)!]+\\&[(n+1)!-n!]\\=&(n+1)!-1\end{aligned}$$

(此结果由数学归纳法也容易得出).

7 求证：方程 $a^2+b^2-8c=6$ 无整数解.

证 每个整数具有形式 $4n,4n+1,4n+2,4n+3$ 之一，它们的平方是 $16n^2,16n^2+8n+1,16n^2+16n+4,16n^2+24n+9$，故被 8 除的余数是 0，1 或 4，这三个数中任何两数（可以相同）的和不等于 6，所以 a^2+b^2 不可能等于 $8c+6$，即没有整数 a,b,c 满足 $a^2+b^2-8c=6$.

8 设 f 是具有下列性质的函数：

(1) $f(n)$ 对每个正整数 n 有定义；

(2) $f(n)$ 是整数；

(3) $f(2)=2$；

(4) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ 对一切的 m 和 n 成立；

(5) 当 $m>n$ 时，$f(m)>f(n)$.

试证：$f(n)=n$.

证法 1 首先注意

$$2=f(2)=f(1\cdot 2)=f(1)\cdot f(2)=f(1)\cdot 2$$

所以

$$f(1)=1$$

而且

$$f(2^2)=f(2\cdot 2)=f(2)\cdot f(2)=2^2$$

$$f(2^3)=f(2\cdot 2^2)=f(2)\cdot f(2^2)=2^3$$

$$\vdots$$

所以 f 对 $k=0,1,2,3,\cdots$ 有

$$f(2^k)=2^k$$

现在考虑 2 的两个相继方幂及其间的整数

$$2^k < 2^k + 1 < 2^k + 2 < \cdots < 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}$$

它们满足

$$2^k < f(2^k + 1) < f(2^k + 2) < \cdots < f(2^{k+1} - 1) < 2^{k+1}$$

这表明 $f(2^k + j), j = 1, 2, \cdots, 2^k - 1$ 是 2^k 和 2^{k+1} 之间的 $2^k - 1$ 个相异整数,而 2^k 和 2^{k+1} 之间恰好有 $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$(个)整数,所以 $f(2^k + j) = 2^k + j$.

综上所述,对一切自然数 n,都有

$$f(n) = n$$

证法 2　如前,注意 $f(2^k) = 2^k, k = 0, 1, 2, \cdots$. 由性质(5)看出 $f(n+1) > f(n)$,即 $f(n+1) \geqslant f(n) + 1$,于是

$$\begin{aligned} f(n) &\geqslant f(n-1) + 1 \\ &\geqslant f(n-2) + 2 \geqslant \cdots \geqslant f(1) + n - 1 = n \end{aligned} \quad ①$$

$$\begin{aligned} f(n+k) &\geqslant f(n+k-1) + 1 \geqslant f(n+k-2) + 2 \geqslant \cdots \\ &\geqslant f(n+1) + k - 1 \geqslant f(n) + k \end{aligned}$$

再用反证法证明对一切自然数 n,都有

$$f(n) \leqslant n \quad ②$$

假设对某个自然数 n,有

$$f(n) > n$$

因为　$2^n > n, 2^n - n > 0$

所以

$$\begin{aligned} 2^n &= f(2^n) = f(n + 2^n - n) \\ &\geqslant f(n) + 2^n - n \\ &> n + 2^n - n = 2^n \end{aligned}$$

这显然矛盾.

由式①,②可得,对一切自然数 n,有

$$f(n) = n$$

证法 3　(归纳法)首先注意 $f(1) = 1$,现在假定对 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ 有 $f(k) = k$,我们来证明 $f(n+1) = n + 1$.

如果 $n + 1 = 2j$,那么 $1 \leqslant j \leqslant n$,从而

$$f(n+1) = f(2j) = f(2) \cdot f(j) = 2j = n + 1$$

如果 $n + 1 = 2j + 1$,那么 $1 \leqslant j < n$,从而

$$\begin{aligned} 2j = f(2j) &< f(2j+1) < f(2j+2) \\ &= 2f(j+1) = 2(j+1) = 2j + 2 \end{aligned}$$

这样　$2j < f(2j+1) < 2j + 2$

而 $f(2j+1)$ 是整数,所以

$$f(n+1) = f(2j+1) = 2j + 1 = n + 1$$

因而对一切自然数 n,有 $f(n) = n$.

9 证明：半径为 1 的圆的内接四边形最短边不大于$\sqrt{2}$.

证 四边形的顶点把圆周分成四个弧，弧长和为 2π，所以最小的弧长不超过$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，对应的弦长不大于$\sqrt{2}$.

10 如图 1.3，设 ABC 是等腰直角三角形，它的腰长是 1. P 是斜边 AB 上的一点，由 P 到其他两边的垂足是 Q 和 R. 考虑三角形 APQ 和 PBR 的面积，以及矩形 $PQCR$ 的面积，证明：无论 P 怎样选取，这三个面积中最大的至少是$\frac{2}{9}$.

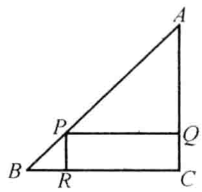

图 1.3

证法 1 按题意，只要证明所述的三个面积中有一个不小于$\frac{2}{9}$就可以了.

设 $x=BR=RP=QC$，那么 $1-x=RC=PQ=AQ$. 如果 $x\geqslant\frac{2}{3}$，那么

$$S_{\triangle BRP}=\frac{x^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

如果 $x\leqslant\frac{1}{3}$，那么 $1-x\geqslant\frac{2}{3}$，从而

$$S_{\triangle AQP}=\frac{1}{2}(1-x)^2\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

如果$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$，那么

$$-\frac{1}{6}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{6}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{36}$$

从而

$$S_{\text{矩形}PQCR}=x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$>\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$$

证法 2 如图 1.4，画三条曲线 $y=\frac{x^2}{2}$，$y=x(1-x)$ 和 $y=\frac{1}{2}(1-x)^2$，且注意到 $0\leqslant x\leqslant 1$，三个 y 值中最大的至少是$\frac{2}{9}$.

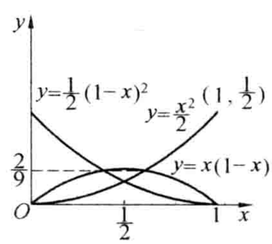

图 1.4

第 2 届加拿大数学奥林匹克

1970 年

1 求所有三数组(x,y,z)，使得其中任何一数加上其他两数的积，结果都是 2.

解 求解的方程组是

$$\begin{cases} x+yz=2 & ① \\ y+zx=2 & ② \\ z+xy=2 & ③ \end{cases}$$

由式 ① − ② 和式 ② − ③ 分别得

$$(x-y)(1-z)=0$$
$$(y-z)(1-x)=0$$

有四种可能情况

$$x-y=0=y-z, x-y=0=1-x$$
$$1-z=0=y-z, 1-z=0=1-x$$

由第一种情况得 $x=y=z$，代入原方程得

$$x^2+x-2=0, x=1 \text{ 或 } -2$$

由第二种情况得 $x=y=1$，代入原方程得 $z=1$；

由第三种情况得 $y=z=1$，代入原方程得 $x=1$；

由第四种情况得 $z=x=1$，代入原方程得 $y=1$.

所以所求的三数组是$(1,1,1)$和$(-2,-2,-2)$.

2 如图 2.1，已知 $\triangle ABC$ 有钝角 CAB 和高线长 h 及 k. 证明：$a+h\geqslant b+k$，并求在何时等号成立.

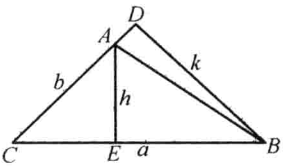

图 2.1

证 由 $\triangle AEC \backsim \triangle BDC$ 得

$$\frac{h}{b}=\frac{k}{a}$$

所以 $$2ah=2bk$$

又因为 $$b^2+k^2<CD^2+k^2=a^2<a^2+h^2$$

所以 $$b^2+k^2+2bk<a^2+h^2+2ah$$

即 $$(b+k)^2<(a+h)^2$$

所以 $$b+k<a+h$$

显然等号无法达到.

3 已知一组球,每个球染成红色或蓝色,每色至少有一个球,每个球的质量为 1 千克或 2 千克,每种质量至少有一个球.证明:有两个球具有不同的质量和不同的颜色.

证 不失普遍性,可设第一个球是红色,第二个球是蓝色.如果它们具有不同的质量,问题就解决了.如果它们有相同的质量,则由已知必有另外质量的第三个球,不论这个球是红是蓝总能和前两个中的一个不同颜色且不同质量.

4 (1) 求一切正整数,它的首位数码是 6,去掉这个 6,所得结果是原整数的$\frac{1}{25}$;

(2) 证明:没有这样的整数,去掉它的首位数码 6,所得结果是原整数的$\frac{1}{35}$.

解 首位数码是 6 的正整数具有形式

$$6\times10^n+m, 0\leqslant m\leqslant10^n-1$$

(1) 这里条件是 $m=\frac{1}{25}(6\times10^n+m)$,化简为 $m=2^{n-2}\times5^n$,所求数具有形式 $6\times10^n+2^{n-2}\times5^n=625\times10^{n-2}$,即

$$625, 6\ 250, 62\ 500, \cdots$$

(2) 这里条件是 $m=\frac{1}{35}(6\times10^n+m)$,化简为 $17m=3\times2^n\times5^n$,这样素数 17 必须是 $3\times2^n\times5^n$ 的因数,这是不可能的.

5 一个四边形在边长为 1 的正方形各边上各有一点.证明:四边形的边长 a,b,c,d 满足不等式 $2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant4$.

证 如图 2.2,首先注意

$$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+v^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2+u^2+(1-u)^2+(1-v)^2$$

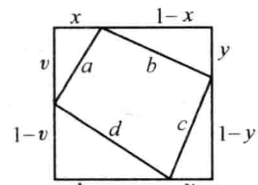

图 2.2

现在考虑

$$x^2+(1-x)^2=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

因为 $0\leqslant x\leqslant1$,容易推求

$$\frac{1}{2}\leqslant x^2+(1-x)^2\leqslant1$$

类似地,也可得到其他三个不等式(x 换为 y,u,v).把四个不等式

相加，便得所求结果.

6 已知三个不共线的点 A,B,C，以 C 为中心作圆，使得由 A 和 B 到圆的切线是平行的.

解 如图 2.3，设 M 是线段 AB 的中点，过 A 和 B 作直线平行于直线 MC. 过 C 作直线垂直于 MC，设此直线与过 A,B 平行于 MC 的直线交于 X,Y，则 $CX=CY$，且 $\angle AXC=\angle CYB=90°$. 所以以 C 为中心，CX 为半径的圆具有所求的性质.

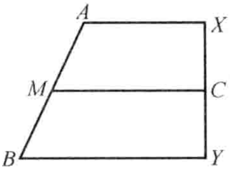

图 2.3

7 证明：由不必相异的五个整数一定可选取其中三个整数，其和能被 3 整除.

证 每个整数被 3 除，余数是 0，1 或 2. 如果五个余数中有三个相等，那么相应的三个数的和就能被 3 整除. 如果没有三个余数相等，那么余数包括 0，1，2，这时相应的三个数的和也能被 3 整除.

8 考虑一端在直线 $y=x$ 上，另一端在直线 $y=2x$ 上，而其长为 4 的一切直线段，求这些线段中点轨迹的方程.

解 设 $A(a,2a)$ 是直线 $y=2x$ 上的任意点，$B(b,b)$ 是直线 $y=x$ 上的任意点. 线段 AB 的中点是 (x,y)，其中，$x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=\dfrac{a+2b}{2}$，而线段 AB 的长是 4. 于是 $(a-b)^2+(2a-b)^2=4^2$，即

$$5a^2-6ab+2b^2=4^2$$

并且
$$a=2(y-x),b=2(2x-y)$$

所以
$$20(y-x)^2-24(y-x)(2x-y)+8(2x-y)^2=4^2$$

即
$$25x^2-36xy+13y^2=4$$

9 设 $f(n)$ 是数列

$$0,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,\cdots$$

的前 n 项和.

(1) 给出 $f(n)$ 的公式；

(2) 证明：$f(s+t)-f(s-t)=st$，其中 s 和 t 是正整数，并且 $s>t$.

解 (1) 如果 n 为偶数，那么

$$f(n)=0+1+2+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)+1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}$$